Minimum à retenir/réviser avant l'épreuve, et donc à archiver cette annnée : 1) Etre habitué à utiliser l'aide.

2) opérations classiques en mode exact, approché, algèbre linéaire, calcul modulaire et polynomial. Notamment, pgcd, couples de Bezout, produit de matrices, noyau (y compris pour un élément de $M_n(\mathbb{Z}\ /p\mathbb{Z}\ )$,

3) Quelques instructions de programmation : boucles `for`, `while` , suite : `seq`. Créer une fonction une procédure, créer une fonction à partir d'un symbole, passer en mode debug et afficher une variable pas à pas.

4) Quelques instructions graphique de base, et surtout savoir obtenir ces fonctions et leurs options via les menus déroulant. Ex fonctions (paramétriques, implicites, statistiques ; ex histogrammes) et géométrie (points, droites...) et options d'affichage via le menu déroulant.

Exercice I: Découverte du logiciel

NB : Certaines syntaxes dépendent de la langue choisie (ou de la version installée).

Choisir sa configuration

⚠ Lors du premier lancement, les valeurs par défaut ne coïncident pas forcément avec vos préférences. Au premier lancement on répond à quelques questions. Choisissez le mode xcas car c'est celui de référence par défaut dans la documentation. (Le mode maple est pour les experts en maple, et le mode autre est pour le mode tortue logo...)

On peut ensuite modifier/affiner ses choix dans le menu Cfg. Ensuite, sauvez vos préférences grâce au menu. Il faut donc choisir le mode xcas ou maple, et étudier la configuration du "cas" pour ne pas mal interpréter les réponses. (On peut l'obtenir rapidement en cliquant sur la barre grise entre les boutons SAUVER et STOP)

Pour la configuration du "cas", je conseille de :
COCHER radians, et de DÉCOCHER : approx, complex, `Cmpx_var`, Sqrt. On travaillera ainsi en mode exact dans le corps engendré par les coefficients de l'expression, alors que si l'on coche complex ou Sqrt, on rajoute i et des racines carrées ce qui ne permet pas par exemple une factorisation de polynôme sur un corps prescrit.

Observez dans le Tutoriel :
Dans le tutoriel (menu Aide>Débuter en Calcul Formel) on trouve facilement comment manier les objets du calcul formel.

Ex : comment affecter une variable, définir une fonction, substituer

C'est aussi un endroit où l'on trouve facilement la syntaxe complète de programmation.

1) a) Comment obtenir de l'aide sur un mot donné que l'on connait à peu près (par exemple sqrt) on fait : ?sqrt. Par exemple, comment fait on $\sqrt[3]{23}$?

b) Donner une valeur approchée des résultats précédents. (Soit en forçant xcas a être en flottants (Ex 23. ou approx(23)), soit avec evalf ou approx).

c) Trouver la syntaxe des constantes réelles ou complexes π, e, i (où $i^2 = -1$). Faire afficher (sans que la précision par défaut soit modifiée pour la suite.) les 1000 premières décimales de π.

d) Faire ?digits. Que faut il faire pour travailler par défaut avec 1000 chiffres ? (On pourra utiliser le menu config)

L'interface : Apprenez à supprimer, copier, déplacer une ligne, un dessin, un programme...(ie l'entrée et la réponse)

Exercice II: aide html, bulles, menus

1) AIDE BULLE SUR UN MOT CONNU : Tapez `seq(` et étudiez les paramètres de cette fonction avec l'aide bulle[2]. Cette méthode est utile lorsque l'on connait le mot mais pas très bien les arguments ou les options.

2) ETUDIER LE MENU AIDE. RÉFÉRENCE[3] CALCUL FORMEL. Cette méthode est la plus adaptée (avec les menus déroulants, ou bien lorque ces derniers sont trop succincts) pour trouver une instruction dont on ne connait pas le mot clef.

1. `http://webusers.imj-prg/frederic.han/agreg`
2. Laisser la souris sur la ligne avec la parenthèse ouverte, et attendre que la bulle apparaisse.
3. C'est le plus utile. à retenir

Par exemple trouver la fonction pgcd de deux entiers en utilisant ce menu.

a) Comment ajouter un élément à une liste ? Ex ajoutez l'élément 55 à la liste `l:=[1,33,4]`.

b) `a:=1111;`. Comment libérer la variable `a` ?

3) Les menus déroulants sont aussi rapides [4] pour obtenir les instructions selon leur thèmes. (Notez le menu Scolaire où l'on trouve les instruction par niveau scolaire).

a) Quelle est la valeur théorique de

$$44.\arctan(1/57) + 7.\arctan(1/239) - 12.\arctan(1/682) + 24.\arctan(1/12943)$$

Lorsque l'on a de la chance [5], le logiciel peut repondre tout de suite. Il faut cependant être prêt à l'aider. Ex : calculer la tangente en demandant de développer au sens trigonométrique.

b) On pose : `l1:=[1,33,4]` et `l2:=[11,133,14]`. Quelle instruction permet de créer une liste en juxtaposant $l1$ et $l2$?

c) Affectez à `a` la valeur $e^{2i\pi/5}$. Calculez/Simplifiez a^5. Commentez la réponse et essayez d'autres exponentielles. Essayez de simplifier $\sqrt[3]{7}+\sqrt{5}$ expliquez la notion de polynôme pour xcas. Quel est l'intérêt de cette simplification pour des calculs du type $(\sqrt[3]{7}+\sqrt{5})^{100}$?

On peut déssiner un point par son affixe complexe. Essayer `p:=point(1)`. On aimerait avoir ce point en bleu et grosse croix. Il existe une façon intéractive d'ajouter une syntaxe de geométrie. On tape `point(1,` et l'on va chercher l'option d'attributs (on remarquera le racourci clavier pour cette option) dans le menu déroulant pour les graphiques.

d) Tout objet géométrique peut être transformé par une similitude via les opérations usuelles sur les complexes (pour une liste d'objets (⚠ elle doit être entre [6] CROCHET) on peut faire aussi la multiplication par un complexe, en revanche, pour l'addition c'est un peu plus compliqué, il vaut mieux ajouter un vecteur de même taille pour translater les éléments terme à terme). Par exemple, en utilisant `seq` et le point p et a, créez les sommets d'un pentagone régulier en utilisant `seq`.

4) Cherchez dans les menus déroulants comment utiliser les unités physiques. Ajoutez $1dm^3$ et $3cl$ via xcas.

5) L'index (ou complétion par tabulation). Utile pour obtenir un mot clef et ses synonymes, mais aussi des intructions connexes non équivalentes.

On peut aussi obtenir l'index par le menu aide. Par exemple on définit le symbole `P:=x/(x^2+1)` et la fonction `Q(x):=sin(1/x)` (syntaxe équivalente : `Q:=x->sin(1/x)`)

a) Etudiez les types de `P Q Q(x) Q(5) Q(6/pi)` (on pourra simplifier). D'une manière générale, il vaut mieux effectuer les calculs compliqués avec des symboles plutot qu'avec des fonctions. Les résultats seront le plus souvent bien plus lisibles et rapides.

b) Calculer les dérivées de P et Q.

c) (A retenir !) Comment obtenir à partir du symbole P défini ci dessus, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$? En déduire la dérivée de $\dfrac{\sin(1/x)}{(\sin(1/x))^2+1}$

6) la recherche systématique dans le html par F12 Cette méthode est la plus longue (beaucoup d'accès disques), mais elle permet de chercher une chaine de caractère dans tout le contenu de l'aide html.

Exercice III: Composition, valeurs approchées, éditeur de programmes

1) Etudiez la composition des fonctions et trouvez (réviser le tutoriel ?) un symbole pour la composée n-ième d'une fonction (Attention aux parenthèses). Testez cela en calculant $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{65536}}}}$

2) a) Définir la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$. On note $u_n(x)$ la composée n ième de cette fonction avec elle même. Affichez $u_n(x)$ pour quelques valeurs de n par exemple pour présenter/faire visualiser cette suite à quelqu'un.

b) Conjecturez la valeur de $\lim_{n\to+\infty} u_n(0)$

4. mais parfois incomplets
5. ici c'est le cas
6. $(a, b, c) * 6$ a un autre sens

c) Affichez une valeur approchée (sous la forme : 4 chiffres et une puissance de 10) de la différence $u_n - l$ pour n allant de 1 à 150. On prendra soin de choisir une précision suffisante pour ces calculs pour que les 4 chiffres affichés soient corrects.

3) a) On peut créer des procédures courtes en ligne, et même sur plusieurs lignes en utilisant shift entrée. En revanche il est souvent plus clair d'utiliser l'éditeur de programmes. Créez une fonction `best(n)` qui retourne la fraction $\frac{a}{b}$ qui approche le mieux l parmis les fractions de dénominateur inférieur ou égal à celui de l'écriture réduite de u_n. (On pourra réviser la syntaxe de programmation dans le tutoriel)

b) Vous pouvez aussi executer un programme en mode pas à pas ou debugger : Ex : `debug(best(10))`

Exercice IV:

1) Exprimer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$ (où a est une variable formelle).

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{2+\sin x} dx$, ainsi qu'une primitive P de $\frac{\cos x}{2+\sin 3x}$. Dériver P et vérifiez que c'est correct. (Le jury apprécie l'esprit critique)

3) Que se passe t'il avec $\int \frac{\cos(5*x)}{2+\sin(3*x)}$ et $\int \frac{1}{2+\sin(5*x)}$? Affichez un dessin de la réponse pour vérifier la continuité.

Exercice V: Dénombrement et séries génératrices.

1) Afficher le coefficient de t^3 dans la série formelle associée à $\prod_{i=1}^{4} \frac{1}{1-a_i.t}$?

2) Généraliser l'exemple précédent pour en déduire de manière théorique le nombre d'éléments croissants dans $\{1,2,3,4\}^n$, puis dans $\{1,\dots,k\}^n$

3) Quel est le cardinal de :
$\{(x_1,\dots,x_5) \in \mathbb{N}^5 | x_1+3x_2+2x_3+x_4+4x_5 = 208\}$

4) En adaptant la formule $\sum_{n>0} p_n.t^n = \Pi_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^i}$ où p_n est le nombre de partitions[7] de n, calculer p_{50}.

5) Trouver le coefficient de $a^3b^2cd^2$ dans $(a+b+c+d)^8$. Vérifier votre réponse théorique avec la forme développée (utiliser `normal` pour développer un calcul lourd). (On pourra étudier l'aide de coeff pour recupérer le coefficient d'un monôme).

Exercice VI: Illustration groupe des nombres complexes de module 1.

(Illustration d'un lemme utile pour montrer la surjectivité de l'exponentielle sur le cercle unité)

1) Etudiez la fonction `element`. (Particulièrement utile en mode geometrie2d. cf menu deroulant nouvelle figure 2d). Crées le cercle unité `C`, et choisissez un point $m0$ sur C d'argument 3 grâce à cette commande.

2) Affectez à `a` l'affixe de `m0` et créez la liste de 10 éléments contenant les points $m_0, m_1, \dots, m_9$ d'affixe les itérés i ièmes de `sqrt` calculés en a.

3) Selectionnez le mode pointeur dans le menu déroulant de votre fenêtre de géométrie et déplacez m_0 sur le cercle. Expliquez les choix pour la racine carrée et pourquoi m_i aura un élément dans le domaine de convergence de la série $\sum \frac{(z-1)^n}{n}$ et donc que m_0 est dans l'image de la fonction exponentielle.

Exercice VII:

1) Il existe dans xcas plusieurs façons de développer[8] : `ratnormal`, `normal`, `simplify`, `expand`. Lors de calculs lourds sur les polynômes il faut vraiment préférer "ratnormal" ou "normal" qui optimiseront. "simplify" sera plus lent car il tentera des simplifications plus sophistiquées. On pourra l'utiliser après avoir fait un "normal" non satisfaisant. En fait, "expand" travaillera avec les objets les plus généraux et pourra être très lourd car il ne regroupe pas les dénominateurs. Essayez ces intructions sur, `P1:=(x^2-1)/(x-1)`, `P2:=-cos(5*x)+16*cos(x)*sin(x)^4-12*cos(x)*sin(x)^2+cos(x)` et `P3:=(a*sqrt(3)+b/sqrt(6))^4`

7. Une partition de n est une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{N}^*$ de somme n.
8. sans compter les synonymes

2) Factoriser $x^{12}-1$ dans $\mathbb{Z}[x]$. En factorisant des polynômes judicieusement choisis, obtenir la valeur du polynôme cyclotomique Φ_{12} ?

3) On pose $a=e^{\frac{2i\pi}{12}}$. Vérifiez que a^{12} vaut bien 1 pour xcas. Etudier $e^{\frac{2i\pi}{9}}$.

4) Factorisez $P=(2x+1)^2(x^5-1)/(x-1)$ dans $\mathbb{R}[x]$ et dans $\mathbb{C}[x]$. Peut t'on espérer un résultat exact ?

a) Factoriser $X^{12}-1$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ et sur $\mathbb{Q}[\sqrt{3},i]$ et sur $\mathbb{Q}[e^{2i\pi/9}]$. (On peut tenter de rajouter une liste d'éléments en option de factor)

Exercice VIII:

1) a) Effectuer un changement de variable pour que les inégalités $0<a<b<c$ soient facile à lire.

b) Démontrer en demandant un calcul élémentaire au logiciel que

$$3/2 \leq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

(Il ne s'agit pas de trouver une instruction du logiciel pour résoudre directement ce problème en tenant compte des hypothèses, mais de poser une question judicieuse pour que la réponse rende la preuve évidente.)

Exercice IX: Tri par dénombrement

1) Créer une procédure `triD(A)` qui retourne la suite des éléments de A triée par ordre croissant lorsque A est un tableau d'entiers naturels majorés par k. On rappelle l'algorithme. Si n est la dimension de A, on utilise un tableau B de dimension n, et un tableau C de dimension k. On initialise C à 0 (on pourra utiliser un raccourci de répétition)

a) Illustrez ce que fait une boucle sur les éléments de A qui ferait : $C_{A_j} \leftarrow C_{A_j}+1$. Par exemple avec 2 diagrammes superposés. Attention, que donne `classes([2.5,2.5,5,6],0,1)`. Préférez une syntaxe avec où vous fournissez les intervalles. (on pourra utiliser seq)

b) Puis une boucle de 1 à k $C_j \leftarrow C_j + C_{j-1}$. Que vaut C_j à cette étape ? Illustrez.

c) Puis pour j de $n-1$ à 0 on fait : $B_{C_{A_j}-1} \leftarrow A_j$ et $C_{A_j} \leftarrow C_{A_j}-1$ k où k est le nombre d'éléments de A distincts.

d) Programmez ce tri et illustrez son fonctionnement en utilisant la fonction debug et en affichant les valeurs des tableaux pas à pas.

Exercice X: géométrie, conjectures et calculs formels

On accèdera aux fonctions graphiques facilement via le menu déroulant.

1) Créer une fonction : $M : t \mapsto (\frac{\cos t}{\sin^3 t}, \frac{\sin t}{\sin^3 t})$

2) a) En mode géométrie, dessiner le point $M(\pi/2)$

b) Déssiner la courbe $C_1 : t \mapsto M(t)$. (Cf menu déroulant pour trouver l'instruction)

c) En utilisant la commande `assume(t1:=[0.7,0,Pi]);` en géométrie intéractive, utilisez le bouton apparu à droite pour expliquez ce qu'est une courbe paramétrée en affichant le point `point(M(t1))`. On peut insérer des `attributs` graphiques via le menu déroulant.

d) Ajoutez aussi l'élément `t2` de $]0..\pi[$ et dessiner $M(t_1), M(t_2), M(-t_1-t_2)$. Afficher ces points avec une grosse croix en taille un peu plus grande.

e) Dessiner la droite $M(t1), M(t2)$ en bleu. Que conjecturez vous ?

3) Démontrez votre conjecture par un calcul formel. (Les vecteurs se notent simplemenent `[ , , ]` (et les parenthèses ne comptent pas).

4) a) Exprimez les coordonnées de $M(t)$ en fonction de $u=\tan(t/2)$. On pourra utiliser une instruction xcas pour passer en $\tan(t/2)$ puis `subst` pour subtituer les `tan(t/2)` par des `u`. Stockez les dans `xu` et `yu`.

b) On considère l'équation :
`mystere:=factors(resultant(denom(xu)*x-numer(xu),denom(yu)*y-numer(yu),u))[2];` ou bien celle ci : `mystere2:=eliminate([x=xu,y=yu],u)[0];` Dessinez la.

c) Démontrez que $M(t)$ appartient à cette courbe. (On pourra utiliser la fonction `unapply` pour transformer un symbole en une fonction.)