Équations différentielles

Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Mardi 2 février 2021

2 Systèmes d'équations différentielles linéaires

2.1 Propriétés générales

Nous ne considérons que des systèmes d'équations différentielles linéaires comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues à valeurs réelles. Soit $J \subset \mathbb{R}^n$ un intervalle et $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$ le n-uplet de fonctions inconnues de ce système. Alors celui-ci s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x}^1(t) & = & a_{11}(t)x^1(t) + a_{12}(t)x^2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x^n(t) + b_1(t) \\ \dot{x}^2(t) & = & a_{21}(t)x^1(t) + a_{22}(t)x^2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x^n(t) + b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{x}^2(t) & = & a_{n1}(t)x^1(t) + a_{n2}(t)x^2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x^n(t) + b_n(t) \end{array} \right.$$

où les coefficients a_{ij} (pour $1 \leq i, j \leq n$) et b_i (pour $1 \leq i \leq n$) sont des fonctions continues sur l'intervalle $J \subset \mathbb{R}$.

De façon équivalent et plus concise, en identifiant $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes réelles à n lignes, nous pouvons écrire ce système comme une équation dont l'inconnue est

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$$

et en introduisant les applications à valeur matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(J, M(n, \mathbb{R})) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$$

le système s'écrit

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) + B(t) \tag{1}$$

Remarquer que l'on pourrait tout aussi bien considérer un système complexe (c'est à dire travailler avec $A \in \mathcal{C}^0(I, M(n, \mathbb{C}))$, $B \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C}^n)$ et $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{C}^n)$) : les résultats que nous allons énoncer seraient essentiellement les mêmes, à part quelques petites adaptations.

1. Université de Paris, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

2.1.1 Systèmes homogènes

Dans le cas particulier où $B = 0$, nous dirons que le système est **linéaire homogène**, il s'écrit $\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t)$. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de cette équation sur un intervalle $I \subset J$ est alors un *sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$. En effet $\mathcal{S}_0$ est non vide car il contient au moins la solution nulle $x \equiv 0$ et, si u et v sont deux solutions, c'est à dire, si $\dot{u} = Au$ et $\dot{v} = Av$, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il est très simple de vérifier que $\lambda u + \mu v$ est aussi solution.

Nous verrons plus tard que :

— les solutions maximales sont définies sur tout J ;

— l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ des solutions est de dimension finie, égale à n.

2.1.2 Systèmes non homogènes

C'est le cas général. Supposons qu'il existe une solution particulière $u \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$ de ce système, c'est à dire telle que $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + B(t)$ et soit y une autre solution du même système. Alors en soustrayant les deux membres des équations

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Au + B \\ \dot{y} &= Ay + B \end{aligned}$$

nous obtenons immédiatement que $x := y - u$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène associée $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. La réciproque est immédiate. Donc l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{u + x \, ; \, x \in \mathcal{S}_0\} \quad \text{où} \quad \mathcal{S}_0 := \{x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n), \, \dot{x} = A(t)x\}$$

Ainsi $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$ d'espace vectoriel associé $\mathcal{S}_0$.

Nous verrons plus loin que l'hypothèse que $\mathcal{S}$ est non vide est toujours vérifiée. Comme $\mathcal{S}_0$ est de dimension n, $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de dimension n de $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$.

2.2 Systèmes linéaires à coefficients constants

Nous supposons ici que A est une application constante. Nous allons donc identifer cette application avec une matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$. Ce cas est important, car il permet d'expliciter de façon complète l'espace des solutions et, de plus, la connaissance des solutions de ce système nous sera utile lorsque nous étudierons le comportement de systèmes d'équations différentielles non linéaires, au voisinage des « points d'équilibre ».

2.2.1 Systèmes linéaires à coefficients constants homogènes

C'est le cas le plus simple, mais, à nouveau d'importance centrale dans la théorie :

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) \tag{2}$$

Commençons par les cas les plus simples, pour aller vers des situations plus générales.

(i) $n = 1$: on retrouve l'équation $\dot{x} = \lambda x$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, déjà étudiée. Nous savons qu'une solution maximale particulière est $(\mathbb{R}, [t \longmapsto e^{\lambda t}])$, nous obtenons toutes les solutions en multipliant le membre de gauche de l'équation par $e^{-\lambda t}$, ce qui nous donne $\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}x(t)\right) = 0$ et nous en déduisons que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions est $\{(\mathbb{R}, [t \longmapsto x_0 e^{\lambda t}]\,;\, x_0 \in \mathbb{R}\}$ (noter que $x(0) = x_0$ est la condition de Cauchy en 0). Nous observons que $\mathcal{S}_0$ est une droite vectorielle, dont une base est $[t \longmapsto e^{\lambda t}]$.

(ii) n quelconque, mais la matrice A est diagonale :

$$A = \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dans ce cas l'équation (2) est équivalente à un système de n équations découplées :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x}^1 & = & \lambda_1 x^1 \\ \vdots & = & \vdots \\ \dot{x}^n & = & \lambda_n x^n \end{array} \right.$$

que l'on résoud séparément aussi simplement que dans le cas précédent : $\forall i = 1, \cdots, n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x^j(t) = x_0^j e^{t\lambda_j}$. Nous pouvons écrire matriciellement cette solution sous la forme $x(t) = e^{t\Delta}x_0$ où

$$e^{t\Delta} := \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$$

(iii) n est quelconque et la matrice A est diagonalisable. Dans ce cas nous pouvons nous ramener au cas précédent. Il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{R})$ (matrice inversible, dite « matrice de passage ») et une matrice diagonale Δ telles que $A = P\Delta P^{-1}$. L'équation (2) s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = P\Delta P^{-1}x \quad \Longleftrightarrow \quad P^{-1}\frac{dx}{dt} = \Delta P^{-1}x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(P^{-1}x\right) = \Delta\left(P^{-1}x\right)$$

Donc, si nous posons $y = P^{-1}x \Longleftrightarrow x = Py$, nous obtenons que y est solution de l'équation $\dot{y} = \Delta y$ exactement identique à celle du cas précédent. Ses solutions sont toutes de la forme $y(t) = e^{t\Delta}y_0$, avec $y_0 = y(0) = P^{-1}x(0) = P^{-1}x_0$, si on appelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la condition de Cauchy en 0. Ainsi

$$x(t) = P\left(e^{t\Delta}P^{-1}x_0\right) = \left(Pe^{t\Delta}P^{-1}\right)x_0 = e^{tA}x_0,$$

où

$$e^{tA} := P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \tag{3}$$

Noter que, si $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs propres (colonnes) de A pour les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, respectivement, alors une matrice de passage s'obtient en posant $P = (u_1 \ \cdots \ u_n)$. De plus, des solutions particulières de (2) sont les applications $e^{t\lambda_j} u_j$, pour tout $j = 1, \cdots, n$.'

Pouvons-nous aller plus loin et nous affranchir de l'hypothèse que A est diagonalisable ? Nous allons voir que oui et la réponse reposera sur une définition plus générale de l'exponentielle d'une matrice.

2.3 Exponentielle de matrices

L'idée consiste à étendre l'identité $e^z := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, valable pour toute variable complexe $z \in \mathbb{C}$.

Définition 2.1 *Pour toute matrice $A \in M(, n\mathbb{R})$, nous définissons son exponentielle comme étant la matrice*

$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{4}$$

Comme cette définition fait intervenir une série, nous devons nous assurer que celle-ci converge. Nous allons le vérifier en montrant que cette série est absolument convergente. Munissons $M(n, \mathbb{R})$ de la « norme du sup » :

$$\|A\| := \sup_{a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

où $\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$, d'où nous déduisons l'inégalité [2]

$$\forall A, B \in M(n, \mathbb{R}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

Cette propriété entraîne par une récurrence immédiate que $\forall A \in M(n, \mathbb{R})$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ et donc le terme général de la série (4) est majoré : $\|\frac{A^k}{k!}\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$. Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$ converge et comme $(M(n, \mathbb{R}), \| \cdot \|)$ est complet (car c'est un espace vectoriel normé de dimension finie), la série (4) est bien absolument convergente.

Le résultat suivant confirme que la définition précédente de l'exponentielle d'une matrice A permet d'expliciter les solutions de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = Ax$.

Théorème 2.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M(n, \mathbb{R})$. L'application*

$$\begin{array}{rccc} e^{\cdot A} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & M(n, \mathbb{R}) \\ & t & \longmapsto & e^{tA} \end{array}$$

satisfait les conditions suivantes :

2. Comme $M(n, \mathbb{R})$ est un espace vetoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et satisfont donc une inégalité de ce type. L'intérêt de la norme du sup est que la constante multiplicative dans la majoration de $\|A\| \, \|B\|$ par $\|AB\|$ est égale à 1, ce qui simplifie les calculs.

(i) cette application est continue et dérivable et

$$\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA} = e^{tA}A \tag{5}$$

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, *e^{tA} est inversible et* $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$*. Par conséquent l'application $e^{\cdot A}$ est à valeur dans $GL(n,\mathbb{R})$.*

(iii) $\forall A, B \in M(n,\mathbb{K})$, ***si*** *$AB = BA$, alors* $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$.

(iv) si A est diagonalisable et $A = P\Delta P^{-1}$, alors les définitions (3) et (4) de e^A coïncident.

Remarques — (1) Si $A, B \in M(n,\mathbb{K})$, on note $[A,B] := AB - BA$ le *commutateur* de A et B. La propriété (iii) signifie que, si $[A,B] = 0$ (on dit que A et B *commutent*), alors $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$. Cette identité est fausse en général si $[A,B] \neq 0$.
(2) Le résultat *(i)* et la relation (5) entraînent par une récurrence immédiate que $e^{\cdot A}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = A^p e^{tA}$.
Démonstration du théorème — (i) Pour montrer *(i)* nous montrons directement que $e^{\cdot A}$ est dérivable, c'est à dire que $\lim_{s\to 0; s\neq 0} \frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s}$ existe et vaut Ae^{tA}. Fixons $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, nous avons

$$e^{(t+s)A} - e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^k A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left((t+s)^k - t^k\right)\frac{A^k}{k!}$$

et donc, comme $Ae^{tA} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p A^{p+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}\frac{A^k}{(k-1)!}$,

$$\begin{aligned} \frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} - Ae^{tA} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t+s)^k - t^k}{s}\frac{A^k}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}\frac{A^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t+s)^k - t^k - skt^{k-1}}{s}\frac{A^k}{k!} \end{aligned}$$

Donc, en notant $a_k(s) := \frac{(t+s)^k - t^k - skt^{k-1}}{s}\frac{A^k}{k!}$,

$$\frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} - Ae^{tA} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(s) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k(s) \quad \text{car } a_1(s) = 0.$$

Supposons sans perte de généralité que $|s| \leq R$ et $|s+t| \leq R$, où $R \in]0,+\infty[$. Alors un développement de Taylor à l'ordre 2 nous donne $|(t+s)^k - t^k - skt^{k-1}| \leq s^2\frac{k(k-1)}{2}R^{k-2}$ et donc $\|a_k(s)\| \leq \frac{s}{2}\frac{R^{k-2}\|A\|^k}{(k-2)!}$. On en déduit que

$$\left\|\frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} - Ae^{tA}\right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{s}{2}\frac{R^{k-2}\|A\|^k}{(k-2)!} = \frac{s}{2}\|A\|^2 e^{R\|A\|}$$

On obtient donc le résultat en faisant tendre s vers 0.
(ii) Pour montrer *(ii)* nous allons utiliser le fait que, si u et v sont deux applications $\mathcal{C}^1$ définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $M(n,\mathbb{R})$, alors :

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)v(t)\right) = \frac{du}{dt}(t)v(t) + u(t)\frac{dv}{dt}(t)$$

(Formule de *Leibniz*, à vérifier en exercice, il faut ici prendre garde au fait que l'ordre des facteurs importe car ces matrices ne commutent pas en général.) Nous appliquons cela à $u(t) = e^{tA}$ et $v(t) = e^{-tA}$, en utilisant le résultat précédent :

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}e^{-tA}\right) = \frac{de^{tA}}{dt}e^{-tA} + e^{tA}\frac{de^{-tA}}{dt} = \left(e^{tA}A\right)e^{-tA} + e^{tA}\left(-Ae^{-tA}\right) = e^{tA}(A-A)e^{-tA} = 0$$

Nous en déduisons que $e^{tA}e^{-tA}$ est constant. Comme e^{tA} et e^{-tA} valent 1_n en $t=0$, la valeur de cette constante est 1_n, ce qui prouve que e^{-tA} et l'inverse de e^{tA}. En particulier e^{tA} est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(iii) Nous pouvons montrer *(iii)* par une méthode similaire. Supposons que $AB = BA$. Alors il est facile de voir que $Be^{tA} = e^{tA}B$. En utilisant la formule de Leibniz, nous obtenons que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}e^{tB}\right) = \frac{de^{tA}}{dt}e^{tB} + e^{tA}\frac{de^{tB}}{dt} = \left(Ae^{tA}\right)e^{tB} + e^{tA}\left(Be^{tB}\right) = (A+B)e^{tA}e^{tB}$$

Et comme $\frac{de^{-t(A+B)}}{dt} = -e^{-t(A+B)}(A+B)$, on obtient en utilisant à nouveau la formule de Leibniz que la dérivée de $e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB}$ est nulle. Comme cette quantité coïncide avec 1_n en $t=0$, elle est constante, égale à 1_n, d'où le résultat.
(iv) La vérification de *(iv)* est laissée à la lectrice ou au lecteur, à titre d'exercice. □

Corollaire 2.1 *(i) Soit $A \in M(n,\mathbb{R})$. La solution de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = Ax$ (2), avec la condition de Cauchy $x(t_0) = x$ est $x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0)$.*
(ii) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ de dimension n.

Démonstration — Pour montrer *(i)* on observe que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0)$ est bien solution de (2) sur $\mathbb{R}$ avec la condition de Cauchy $x(t_0) = x_0$ et que, réciproquement, si x est solution de ce problème, alors $\frac{d}{dt}\left(e^{(t_0-t)A}x(t)\right) = 0$ et donc $e^{(t_0-t)A}x(t)$ est constant, égal à $x(t_0)$. *(ii)* est alors une conséquence de *(i)*. □