# Équations différentielles

Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

**Mardi 16 février 2021**

## 2.6 La solution des équations linéaires à coefficients constants non homogènes (suite et fin)

Nous pouvons reformuler les résultats vus à la séance précédente en écrivant que, pour toute matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$, il est possible de trouver une matrice de passage $P \in GL(n, \mathbb{C})$ et des matrices $A_1 \in M(m_1, \mathbb{C}), \cdots, A_r \in M(m_j, \mathbb{C})$ (où $m_1 + \cdots + m_r = n$) telles que

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix} P^{-1}$$

et donc

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tA_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tA_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{tA_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Les entiers $m_j$ sont les dimensions des sous-espaces caractéristiques $C_j$ de l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $A$. L'observation importante est que chaque matrice $A_j$ est la matrice d'un endomorphisme de $C_j$ de la forme $\lambda_j 1_{C_j} + \beta_j$, où $(\beta_j)^{m_j} = 0$. Il s'ensuit que $A_j = \lambda_j 1_{m_j} + N_j$, où $N_j$ est une matrice nilpotente, avec $(N_j)^{m_j} = 0$ et donc

$$e^{tA_j} = e^{t\lambda_j} e^{tN_j} = e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{m_j} \frac{t^k (N_j)^k}{k!}$$

## 2.7 Le cas de la dimension deux

Soit $A \in M(2, \mathbb{R})$ une matrice réelle $2 \times 2$. Il lui correspond le système d'équations différentielles linéaires avec deux fonctions inconnues

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

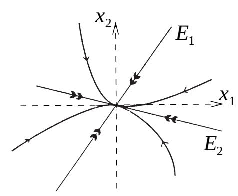
Il est clair que l'application constante, égale à $(0,0)$, est toujours solution de ce système (on dit que $(0,0)$ est un point d'équilibre de ce système, nous reviendrons sur cette notion plus tard). Le polynôme caractérisque de $A$, $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A\, \lambda + \det A$, est scindable dans $\mathbb{C}$. A partir de la connaissance des racines de $P_A$, nous pouvons décrire le comportement qualitatif des solutions du système.

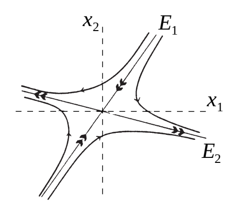
1. Université de Paris, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

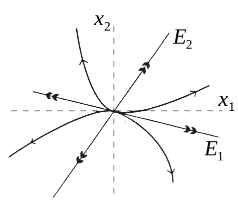
(i) $P_A$ **admet deux racines réelles, simples ou double.** Ce cas admet deux sous-cas :

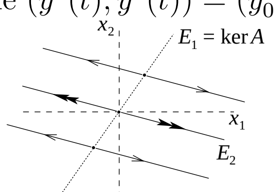
(a) $P_A$ *admet deux racines réelles distinctes* $\lambda_1, \lambda_2$. Alors $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Notant $u_1$ et $u_2$ des vecteurs propres de $A$ pour, respectivement, $\lambda_1$ et $\lambda_2$, une matrice de passage est [2] : $P = (u_1\ u_2)$ et on a alors $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Introduisons les fonctions $(y^1, y^2)$ telles que $x(t) = y^1(t)u_1 + y^2(t)u_2$, les solutions sont de la forme $(y^1(t), y^2(t)) = (y_0^1 e^{t\lambda_1}, y_0^2 e^{t\lambda_2})$. Si $\lambda_1 \neq 0$, on en déduit la relation $|y^2(t)| = \frac{|y_0^2|}{|y_0^1|}|y^1(t)|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$. On en déduit que chaque trajectoire non triviale est une composante connexe dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de la courbe d'équation $|y^2| = \alpha |y^1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ (pour $\alpha \in [0, +\infty[$). Le sens de parcours peut être déterminé en examinant si $|y^1|$ est une fonction croissante ($\lambda_1 > 0$) ou décroissante ($\lambda_1 < 0$) de $t$. Voici l'allure des courbes intégrales :

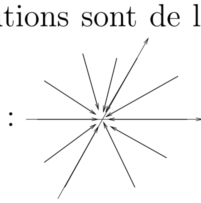
si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ : 

; si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ : 


si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ : 


Si $\lambda_1 = 0$, les solutions sont de la forme $(y^1(t), y^2(t)) = (y_0^1, y_0^2 e^{t\lambda_2})$. L'allure des courbes intégrales si $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ est : 


(b) $P_A$ *admet une racine réelle double* $\lambda$. Alors, soit $A = \lambda 1_2$, soit $A - \lambda 1_2 \neq 0$ et alors $(A - \lambda 1_2)^2 = 0$.

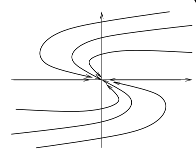
Dans le premier cas, $e^{tA} = e^{t\lambda} 1_2$ et donc les solutions sont de la forme $x(t) = e^{t\lambda} x_0$. L'allure des courbes intégrales si $\lambda < 0$ est : 

Dans le deuxième cas, $A$ n'est pas diagonalisable mais il existe un vecteur propre

2. chaque vecteur étant identifié avec un vecteur colonne

$u$ pour $\lambda$. On choisit un vecteur $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}u$ (de sorte que $(u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$). Alors $Av - \lambda v$ est un vecteur propre et est donc colinéaire à $u$. Quitte à multiplier $v$ par un réel, on peut supposer que $Av - \lambda v = u$. Alors en prenant la matrice de passage $P = (u\ v)$, on a $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$ et $e^{tA} = e^{t\lambda} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.
Les solutions sont de la forme

$$x(t) = y_0^1 e^{t\lambda} u + y_0^2 e^{t\lambda}(v + tu) = (y_0^1 + t y_0^2) e^{t\lambda} u + y_0^2 e^{t\lambda 2} v$$

En éliminant $t$, on obtient la relation $y^1(t) = \left( \frac{y_0^1}{y_0^2} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y^2(t)}{y_0^2} \right) y^2(t)$. L'allure des courbes intégrales si $\lambda < 0$ est : 

(ii) $P_A$ **admet une racine complexe non réelle** $\lambda$. En ce cas, comme $P_A$ est un polynôme à coefficients réels, $\bar{\lambda}$ est aussi une racine de $P_A$ et, comme $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, les deux racines $\lambda$ et $\bar{\lambda}$ sont distinctes, donc $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ : $\exists P \in GL(2, \mathbb{C})$, $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} P^{-1}$. Décomposons $\lambda = a + ib$. On a alors [3]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} C^{-1} \qquad (2)$$

3. On peut retrouver ce résultat par les considérations suivantes. On remarque que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + iY \\ X - iY \end{pmatrix} \qquad (1)$$

avec

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et comme

$$\begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} X + iY \\ X - iY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

on peut traduire la relation (1) sous la forme

$$\begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

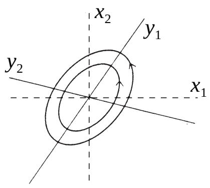
avec $C := \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ et $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$A = Q\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}Q^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$$

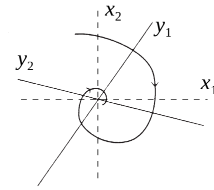
où $Q = PC = P\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. Donc

$$e^{tA} = e^{ta}Q\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos tb \end{pmatrix}Q^{-1}$$

Dans le cas où $a = 0$, les trajectoires sont des ellipses centrées en l'origine :




Dans le cas où $a \neq 0$, les trajectoires sont des spirales :




## 2.8 La formule de Dyson

Il est possible d'étendre les résultats obtenus pour l'équation $\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t)$ dans le cas où on remplace la matrice $A$ par une application $A \in \mathcal{C}^0(I, M(n,\mathbb{R}))$. Nous verrons un peu plus loin une approche générale permettant d'établir que l'ensemble des solutions est non vide et qu'il a une structure d'espace vectoriel réel de dimension $n$. Mais il est également possible d'obtenir ce résultat à l'aide d'une formule, qui repose sur une généralisation de l'exponentielle $e^{tA}$. Cette formule est due au mathématicien et physicien Freeman Dyson, né en 1923 et décédé en 2020. Nous considérons donc, sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, l'équation

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) \tag{3}$$

avec $A \in \mathcal{C}^0(I, M(n,\mathbb{R}))$. Il s'agit, pour tout $t_0 \in I$, de construire une application $t \longmapsto U(t,t_0) \in GL(n,\mathbb{R})$ qui est solution de :

$$\frac{dU(t,t_0)}{dt} = A(t)U(t,t_0) \quad \text{avec} \quad U(t_0,t_0) = 1_n \tag{4}$$

L'idée est de construire $U(t,t_0)$ à l'aide d'une série entière :

$$U(t,t_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t,t_0)$$

Pour cela, nous posons $u_0(t,t_0) = 1_n$, $\forall t \in I$ et nous définissons les applications $u_k \in \mathcal{C}^0(I, M(n,\mathbb{R}))$ par récurrence en posant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1}(t_0,t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in I, \quad \frac{du_{k+1}}{dt}(t,t_0) = A(t)u_{k+1}(t,t_0)$$

Il est alors simple de vérifier que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t,t_0)$ est *formellement* une solution de (4).

**Lemme 2.1** *Supposons que $A \in \mathcal{C}^0(I, M(n,\mathbb{R}))$. Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t,t_0)$ est normalement convergente sur tout compact de $I$.*

*Démonstration* — Considérons un intervalle compact $K \subset I$. Alors, comme $A$ est continue, $A$ est borné sur $K$ : $\exists C > 0$, $\|A(t)\| \leq C$, $\forall t \in K$. Nous allons montrer par récurrence sur $k$ que, si $R := \sup\{|t-t_0|\ ;\ t \in K\}$, alors, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in K, \quad \|u_k(t,t_0)\| \leq \frac{|t-t_0|^k C^k}{k!} \tag{5}$$

Comme $u_0(t,t_0) = 1_n$, la propriété (5) est immédiate pour $k=0$. Supposons que (5) est vrai pour $k \in \mathbb{N}$ et montrons que cela entraîne qu'elle est vraie pour $k+1$. A partir de la définition de $u_{k+1}(\cdot,t_0)$, nous avons $u_{k+1}(t,t_0) = \int_{t_0}^t A(s)u_k(s,t_0)ds$ et donc

$$\|u_{k+1}(t,t_0)\| \leq \left|\int_{t_0}^t \|A(s)\|\|u_k(s,t_0)\|ds\right| \leq \left|\int_{t_0}^t C\frac{|s-t_0|^k C^k}{k!}ds\right| = \frac{|t-t_0|^{k+1}C^{k+1}}{(k+1)!}$$

On en déduit que $U(t,t_0)$ existe et est une fonction continue de $t$. En utilisant le fait que $\frac{u_{k+1}}{dt}(t,t_0) = A(t)u_{k+1}(t,t_0)$, on en déduit que la série dérivée est aussi normalement convergente et donc que $U(\cdot,t_0)$ est $\mathcal{C}^1$ et satisfait (4). $\square$

Ainsi la solution $x$ de (3) telle que $x(t_0) = x_0$ est $x(t) = U(t,t_0)x_0$.
**Remarque** — *On peut expliciter chaque terme $u_k(t,t_0)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, sous la forme*

$$u_k(t,t_0) = \int_{t_0<s_1<\cdots<s_k<t} A(s_k)\cdots A(s_1)\ ds_1\cdots ds_k \qquad \text{si } t_0 < t \text{ et}$$

$$u_k(t,t_0) = (-1)^k \int_{t_0>s_1>\cdots>s_k>t} A(s_k)\cdots A(s_1)\ ds_1\cdots ds_k \qquad \text{si } t < t_0$$

*Cette quantité est notée dans les deux cas*

$$u_k(t,t_0) = \frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^t\right)^k \mathrm{T}\left(A(s_1)\cdots A(s_k)\right) ds_1\cdots ds_k$$

*dans laquelle le symbole* T *signifie que les facteurs dans le produit $A(s_1)\cdots A(s_k)$ doivent être systématiquement réordonnés dans un ordre chronologique, du passé vers le futur de droite à gauche si $t_0 < t$ et du passé vers le futur de gauche à droite si $t < t_0$ (en prenant garde qu'alors $\left(\int_{t_0}^t\right)^k = (-1)^k\left(\int_t^{t_0}\right)^k$). La notation utilisée par les physisicens pour $U(t,t_0)$ est*

$$U(t,t_0) = \mathrm{T}exp\left(\int_{t_0}^t A(s)ds\right)$$

*et est appelée* exponentielle chronologique*.* ***Attention !*** *ce n'est pas une exponentielle au sens ordinaire, sauf si $A$ est constant.*

**Exercice**

(i) On pose $v_0(t_0,t) = 1_n$ et on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} \in \mathcal{C}^0(I, M(n,\mathbb{R}))$ par $v_{k+1}(t_0,t_0) = 0$ et $\frac{dv_{k+1}}{dt}(t_0,t) = -v_{k+1}(t_0,t)A(t)$. On pose $V(t_0,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t_0,t)$. Démontrer que $V(t_0,t)$ est une application $\mathcal{C}^1$ de $t$ et que, $\forall t \in I$, $V(t_0,t) = U(t,t_0)^{-1}$. (Indication : considérer l'application $t \longmapsto V(t_0,t)U(t,t_0)$).

(ii) Montrer que la solution de l'équation $\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) + B(t)$ avec $x(t_0) = x_0$ est

$$x(t) = U(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,s)B(s)ds$$

(iii) En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation $\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) + B(t)$ a une structure d'espace affine de dimension $n$.

# 3 Théorie locale des équations différentielles non linéaires

Nous revenons maintenant à une situation beaucoup plus générale, à savoir l'étude du problème de Cauchy pour une équation différentielle

$$[\ y(t_0) = y_0\ ] \quad \text{et} \quad \left[\ \forall t \in I, \quad \frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t))\ \right] \tag{6}$$

où le *champ de vecteur* $X$ est un élément de $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$, $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ contenant $(t_0, y_0)$ et l'inconnue est un couple $(I, y)$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, tels que $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in U$.

Nous ne pourrons ni expliciter la solution d'une telle équation, ni même décrire son comportement pour tout temps en toute généralité. En revanche il sera possible de prouver l'existence d'une solution *locale* au problème (6) et, sous certaines hypothèses supplémentaires, l'*unicité* de cette solution. Ces hypothèses reposent sur la notion de fonction *lipschitzienne.*

## 3.1 Le théorème de Cauchy–Lipschitz

**Définition 3.1** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert* convexe, *$(Y, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $F : \Omega \longrightarrow Y$ une application. On dit que $F$ est* ***lipschitzienne*** *s'il existe une contante $C > 0$ telle que*

$$\forall (x_1, x_2) \in \Omega^2, \quad \|F(x_2) - F(x_1)\| \leq C\|x_2 - x_1\| \tag{7}$$

**Remarques** (a) Cette notion peut se définir dans le cadre, plus large, des espaces métriques : une application $F : X \longrightarrow Y$ entre deux espaces métriques $(X, \mathsf{d}_X)$ et $(Y, \mathsf{d}_Y)$ est lipschitzienne si elle satisfait $\mathsf{d}_Y(F(x_1), F(x_2) \leq C\ \mathsf{d}_X(x_1, x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in X^2$.

(b) Dans la définition précédente, on a supposé que $\Omega$ est convexe, car ainsi la quantité $\|x_2 - x_1\|$ mesure bien la distance entre $x_1$ et $x_2$ dans $\Omega$. Des exemples de convexes sont les boules d'un espace vectoriel (pour n'importe quelle norme) et les produits cartésiens de convexes.
(c) **Toute application lipschitzienne est continue**, mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{|x|}$ est continue, mais n'est pas lipschitzienne (notamment l'inégalité (7) ne marche pas pour $x_1 = 0$).

**Définition 3.2** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur. On dit que $X$ est* ***localement lipschitzienne en espace*** *ou* ***localement lipschitzienne par rappport à*** *$x$ si, $\forall (t_0, x_0) \in U$, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists r > 0$, $\exists C(t_0, x_0) > 0$ tels que*

*(i)* $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times B(x_0, r) \subset U$

*(ii)* $\forall t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, $\forall x_1, x_2 \in B(x_0, r)$

$$\|X(t, x_2) - X(t, x_1)\| \leq C(t_0, x_0)\|x_2 - x_1\| \tag{8}$$

**Théorème 3.1 (Cauchy–Lipschitz)** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur* localement lipschitzienne en espace. *Alors*

*(i) (*existence locale*) $\forall (t_0, x_0) \in U$, $\exists I \subset \mathbb{R}$, intervalle ouvert contenant $t_0$, $\exists y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ tels que*

*(a)* $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in U$ ;

*(b)*

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \forall t \in I, & \dfrac{dy}{dt}(t) & = & X(t, y(t)) \\ & y(t_0) & = & x_0 \end{array}} \tag{9}$$

*(ii) (*unicité*) Si $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ sont deux solutions de (9), alors $y_1 = y_2$.*

Nous verrons la preuve de ce résultat à la prochaine séance.