Équations différentielles

Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Mardi 2 mars 2021

3.1 Le théorème de Cauchy–Lipschitz (suite)

Rappelons l'énoncé de ce résultat fondamental.

Théorème 3.1 (Cauchy–Lipschitz) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $X\in\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur* localement lipschitzienne en espace*. Alors*

*(i) (*existence locale*) $\forall(t_0,x_0)\in U$, $\exists I\subset\mathbb{R}$, intervalle ouvert contenant t_0, $\exists y\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ tels que*

(a) $\forall t\in I$, $(t,y(t))\in U$;

(b)

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\forall t\in I,\quad \dfrac{dy}{dt}(t) & = & X(t,y(t))\\ y(t_0) & = & x_0\end{array}} \tag{1}$$

*(ii) (*unicité*) Si $y_1,y_2\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ sont deux solutions de (1), alors $y_1=y_2$.*

3.1.1 Preuve du théorème de Cauchy–Lipschitz : existence

Le bon réflexe et le bon point de départ consiste à traduire le système (1) sous la forme d'une équation intégrale :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\forall t\in I,\quad \dfrac{dy}{dt}(t) & = & X(t,y(t))\\ y(t_0) & = & x_0\end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \forall t\in I,\quad y(t)=x_0+\int_{t_0}^t X(s,y(s))ds$$

En posant $y(t)=x_0+z(t)$ la formulation obtenue s'écrit $z(t)=\int_{t_0}^t X(s,x_0+z(s))ds$, $\forall t\in I$, qui peut s'interpréter sous la forme d'une relation $z=T(z)$, où $T(z)$ est l'application $t\longmapsto\int_{t_0}^t X(s,x_0+z(s))ds$. Le phénomène important est qu'un opérateur tel que T (à définir soigneusement) a de bonnes propriétés en général. Pour démonter le théorème de Cauchy–Lipschitz, nous allons construire l'opérateur T de façon à ce qu'il soit un opérateur contractant sur une boule fermée d'un espace de Banach (espace vectoriel normé complet). Cela nous donnera la solution.

Nous remarquons également que la formulation $\forall t\in I$, $z(t)=\int_{t_0}^t X(s,x_0+z(s))ds$ a un sens pour $z\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$. Nous commencerons donc par chercher une solution *continue* à cette équation intégrale. Il ne sera pas difficile de vérifier *a posteriori* que cette solution est en fait $\mathcal{C}^1$.

1. Université de Paris, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Au travail ! — Étant donnés $(t_0, x_0) \in U$, pour tout $\varepsilon > 0$ (dont nous fixerons la valeur précise plus tard) nous notons $I_\varepsilon =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et nous considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|z\|_\infty := \sup\{\|z(t)\| \; ; \; t \in I_\varepsilon\}$. Nous rappelons que cet espace est un espace de Banach.

L'hypothèse que X est localement lipschitzienne en espace nous permet d'affirmer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, $r > 0$ et une constante $C = C(t_0, x_0) > 0$ tels que :

$$\forall t \in I_{\varepsilon_0}, \forall x, x' \in B(x_0, r), \quad \|X(t, x') - X(t, x)\| \leq C\|x' - x\| \tag{2}$$

Par ailleurs, X étant localement lipschitzienne, elle est continue, donc en particulier bornée sur tout compact. Nous pouvons donc supposer qu'il existe $\mathsf{V} > 0$ (comme *vitesse maximale*) tel que $\forall (t, x) \in I_{\varepsilon_0} \times B(x_0, r)$, $\|X(t, x)\| \leq \mathsf{V}$.

Nous choisissons ε tel que $0 < \varepsilon \leq \min(\varepsilon_0, \frac{r}{\mathsf{V}})$ et nous définissons

$$\begin{array}{rccc} T : & \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(0, r) & \longmapsto & \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(0, r) \\ & z & \longmapsto & \left[t \longmapsto \int_{t_0}^t X(s, x_0 + z(s)) ds\right] \end{array}$$

où $\mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(0, r) := \{z \in \mathcal{C}^0(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n) \; ; \; \|z\|_\infty \leq r\}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon r dans $(\mathcal{C}^0(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Notons que cette application est bien définie car, si $t \in I_\varepsilon$, alors $|t - t_0| < \frac{r}{\mathsf{V}}$, donc $\|T(z)(t)\| \leq |t - t_0|\mathsf{V} \leq r$ et ainsi $T(z) \in \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(0, r)$. En appliquant (2) nous avons, $\forall z, z' \in \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(0, r)$,

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in I_\varepsilon, \quad \|T(z')(t) - T(z)(t)\| & = & \left\| \int_{t_0}^t \left(X(s, x_0 + z'(s)) - X(s, x_0 + z(s))\right) ds \right\| \\ & \leq & \left| \int_{t_0}^t \|X(s, x_0 + z'(s)) - X(s, x_0 + z(s))\| \, ds \right| \\ & \leq & \left| \int_{t_0}^t C\|z'(s) - z(s)\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t C\|z' - z\|_\infty ds \right| \\ & \leq & C\varepsilon \; \|z' - z\|_\infty \end{array}$$

Et donc $\|T(z') - T(z)\| \leq C\varepsilon \; \|z' - z\|_\infty$. Ainsi T est lipschitzienne de coefficient $C\varepsilon = C(t_0, x_0)\varepsilon$. Il suffit alors de choisir ε suffisamment petit pour que $C\varepsilon < 1$ pour que l'application T soit contractante. Comme la boule $\mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(0, r)$ est fermée dans un espace de Banach, il existe un unique $z \in \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(0, r)$ tel que $T(z) = z$.

Il est alors immédiat que $T(z)$, étant définie comme la primitive d'une fonction continue, est une fonction $\mathcal{C}^1$. Donc $z = T(z)$ est $\mathcal{C}^1$. Donc l'application $y \in \mathcal{C}^1(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n)$ définie par $y(t) = x_0 + z(t)$ est bien une solution de (1). □

Remarque — Il apparaît clairement dans la preuve que l'on peut définir la solution sur un intervalle I_ε pourvu que $\varepsilon < \frac{1}{C(t_0, x_0)}$.

3.1.2 Preuve du théorème de Cauchy–Lipschitz : unicité

Nous commençons par montrer l'unicité locale et nous en déduirons un résultat global.

Lemme 3.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $X \in \mathcal{C}^0(U,\mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur* localement lipschitzien en espace. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $t_0 \in I$ et $y^1, y^2 \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ deux applications telles que $\forall t \in I$, $(t, y_1(t)), (t, y_2(t)) \in U$ et*

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \forall t \in I, & \frac{dy_1}{dt}(t) & = & X(t, y_1(t)) \\ \forall t \in I, & \frac{dy_2}{dt}(t) & = & X(t, y_2(t)) \end{array}\right. \qquad et \qquad y_1(t_0) = y_2(t_0)$$

Alors il existe un intervalle $I_\varepsilon =]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ tel que $\forall t \in I_\varepsilon$, $y_1(t) = y_2(t)$.

Démonstration — Soit $x_0 = y_1(t_0) = y_2(t_0)$. Par hypothèse il existe $\varepsilon_0, r, C > 0$ tels que, $\forall t \in I_{\varepsilon_0}$, $\forall x, x' \in B(x_0, r)$, $\|X(t,x') - X(t,x)\| \leq C\|x'-x\|$. Comme y_1 et y_2 sont continues, il existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ tel que, $\forall t \in I_\varepsilon$, $y_1(t)$ et $y_2(t) \in B(x_0, r)$. Nous choisissons une telle valeur de ε, si bien que,

$$\forall t \in I_\varepsilon, \quad \|X(t, y_2(t)) - X(t, y_1(t))\| \leq C\|y_2(t) - y_1(t)\| \tag{3}$$

Nous considérons alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & I_\varepsilon & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \|y_2(t) - y_1(t)\|^2 \end{array}$$

où la norme utilisée sur $\mathbb{R}^n$ est la norme *euclidienne* (c'est à dire, $\forall x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$). Alors f est une fonction $\mathcal{C}^1$ et $\frac{df}{dt} = 2\left\langle y_2 - y_1, \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right\rangle$, donc, en utilisant l'inégalité de *Cauchy–Schwarz*, puis (3),

$$\begin{array}{rcl} \left|\dfrac{df}{dt}\right| & = & 2\left|\left\langle \dfrac{dy_2}{dt} - \dfrac{dy_1}{dt}, y_2 - y_1\right\rangle\right| \leq 2\left\|\dfrac{dy_2}{dt} - \dfrac{dy_1}{dt}\right\| \|y_2 - y_1\| \\ & = & 2\,\|X(t,y_2) - X(t,y_1)\|\,\|y_2 - y_1\| \\ & \leq & 2\,C\|y_2 - y_1\|\|y_2 - y_1\| = 2\,Cf \end{array}$$

On en déduit l'encadrement

$$\forall t \in I_{\varepsilon_0}, \quad -2Cf(t) \leq \frac{df}{dt}(t) \leq 2Cf(t)$$

c'est à dire, $\forall t \in I_{\varepsilon_0}$, les deux inégalités

$$\begin{array}{llcll} & & 0 \leq \frac{df}{dt}(t) + 2Cf(t) & \text{et} & \frac{df}{dt}(t) - 2Cf(t) \leq 0 \\ \Longleftrightarrow & & 0 \leq e^{2Ct}\left(\frac{df}{dt}(t) + 2Cf(t)\right) & \text{et} & e^{-2Ct}\left(\frac{df}{dt}(t) - 2Cf(t)\right) \leq 0 \\ \Longleftrightarrow & & 0 \leq \frac{d}{dt}\left(e^{2Ct}f(t)\right) & \text{et} & \frac{d}{dt}\left(e^{-2Ct}f(t)\right) \leq 0 \\ \Longrightarrow & \text{si } t \leq t_0, & e^{2Ct}f(t) \leq e^{2Ct_0}f(t_0) & \text{et si } t_0 \leq t, & e^{-2Ct_0}f(t_0) \geq e^{-2Ct}f(t) \end{array}$$

Mais comme $f(t_0) = 0$, on en déduit que, si $t \leq t_0$, alors $e^{2Ct}f(t) \leq 0$ et, si $t \geq t_0$, alors $e^{-2Ct}f(t) \leq 0$. Dans tous les cas $f(t) \leq 0$, ce qui n'est possible que si $f(t) = 0$, c'est à dire si $y_1(t) = y_2(t)$, $\forall t \in I_{\varepsilon_0}$. $\square$

De ce résultat nous déduisons l'unicité globale.

Proposition 3.1 *Sous exactement les mêmes hypothèses que celles du lemme précédent, y_1 et y_2 coïncident sur I.*

Démonstration — Considérons l'ensemble

$$A := \{t \in I \; ; \; y_1(t) = y_2(t)\}$$

Nous observons que nous pouvons traduire l'énoncé du lemme précédent en affirmant que, toujours sous les mêmes hypothèses, l'ensemble A est *ouvert*. Par ailleurs A est aussi égal à l'image inverse par l'application $y_2 - y_1$ du fermé $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Comme $y_2 - y_1$ est continue, A est donc aussi *fermé*. Donc comme $A \subset I$ et que I est un intervalle, soit $A = \emptyset$, soit $A = I$. Mais la première possibilité est impossible puisqu'on suppose qu'il existe $t_0 \in A$. Donc $A = I$. □

3.1.3 Que se passe-t-il si le champ de vecteur n'est pas localement lipschitzien en espace ?

L'hypothèse $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ est suffisante pour établir l'*existence* d'une solution locale au problème de Cauchy : cela est une conséquence du théorème de Cauchy–Peano, que nous verrons ultérieurement. En revanche la propriété d'*unicité* n'est plus vraie en général.

Exemple — Pour tout $\alpha > 1$ et $\tau \in \mathbb{R}$, nous définissons l'application $y_\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall t \in]-\infty, \tau], \quad y_\tau(t) & = & 0 \\ \forall t \in]\tau, +\infty[, \quad y_\tau(t) & = & (t-\tau)^\alpha \end{array} \right.$$

Il est alors simple de vérifier que $y_\tau \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall t \in]-\infty, \tau], \quad \frac{dy_\tau}{dt}(t) & = & 0 \\ \forall t \in]\tau, +\infty[, \quad \frac{dy_\tau}{dt}(t)(t) & = & \alpha(t-\tau)^{\alpha-1} \end{array} \right.$$

Donc y_τ est solution de l'équation $\frac{dy}{dt} = \alpha |y|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$. Nous notons ici que, comme $0 < \frac{\alpha-1}{\alpha} < 1$, l'application $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(x) = \alpha|x|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ est continue, mais *n'est pas lipschitzienne*. Donc X ne satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz.

Or nous observons que, pour tout $\tau \geq 0$, y_τ est solution d'un même problème de Cauchy :

$$\frac{dy}{dt} = \alpha|y|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad \text{et} \quad y(0) = 0$$

Il y a donc une infinité de solutions à ce problème.

3.2 Un cas important d'application du théorème de Cauchy–Lipschitz

Les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz sont satisfaites pour une classe très importante d'équations différentielles.

Proposition 3.2 *Soit $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ un ouvert et $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$. Supposons que, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, X admette une dérivée partielle par rapport à la coordonnée d'espace x^j et que, $\frac{\partial X}{\partial x^j}$ est* ***continue*** *sur U. Alors X est localement lipschitzienne en espace.*

Ainsi le théorème de Cauchy–Lipschitz s'applique pour tout champ de vecteur satisfaisant les hypothèses de cette proposition. Cela est vrai en particulier si $X \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$.
Démonstration — Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, nous pouvons trouver $\varepsilon, r > 0$ tels que $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{B}(x_0, r) \subset U$ (où $\bar{B}(x_0, r)$ est la boule fermée de rayon r dans $\mathbb{R}^n$). Comme les dérivées partielles de X sont continues sur U et comme $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{B}(x_0, r)$ est compact, ces dérivées partielles sont bornées sur ce même compact. Donc il existe $C > 0$ tel que

$$\forall j = 1, \cdots, n,\ \forall (t, x) \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{B}(x_0, r), \quad \left\| \frac{\partial X}{\partial x^j}(t, x) \right\| \leq C$$

Nous appliquons alors le théorème des accroissements finis entre deux valeurs (t, x_1) et $(t, x_2) \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{B}(x_0, r)$:

$$\begin{aligned}
\|X(t, x_2) - X(t, x_1)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left[X(t, (1-s)x_1 + sx_2) \right] ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial X}{\partial x^j}(t, (1-s)x_1 + sx_2)\ (x_2^j - x_1^j) ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} \left\| \frac{\partial X}{\partial x^j}(t, (1-s)x_1 + sx_2) \right\| |x_2^j - x_1^j|\ ds \\
&\leq \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} C |x_2^j - x_1^j|\ ds \leq \int_0^1 C\sqrt{n} \|x_2 - x_1\| ds \\
&= C\sqrt{n}\|x_2 - x_1\|
\end{aligned}$$

Ce qui prouve bien le résultat. □

3.3 Conséquences du théorème de Cauchy–Lipschitz

Nous supposons dans cette section que le champ de vecteur $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ est localement lipschitzien en espace.

3.3.1 Solutions maximales

Une conséquence de la Proposition 3.1 est la suivante.
— Si I_1 et I_2 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$,
— si $y_1 \in \mathcal{C}^1(I_1, \mathbb{R}^n)$ et $y_2 \in \mathcal{C}^1(I_2, \mathbb{R}^n)$ sont solutions de, respectivement, $\frac{dy_1}{dt} = X(t, y_1)$ et $\frac{dy_2}{dt} = X(t, y_2)$
— et si $\exists t_0 \in I_1 \cap I_2$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$,

alors y_1 et y_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$. De ce fait nous pouvons définir une application $y \in \mathcal{C}^1(I_1 \cup I_2, \mathbb{R}^n)$ telle que $y|_{I_1} = y_1$ et $y|_{I_2} = y_2$ et alors y est solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} = X(t,y)$.

Nous pouvons ainsi construire la *solution maximale* du problème de Cauchy : étant donné $(t_0, x_0) \in U$, nous posons

$$\mathcal{I}_{(t_0,x_0)} := \left\{ (I,y) \; ; \left[\begin{array}{c} I : \text{ intervalle de } \mathbb{R} \text{ contenant } t_0 \\ y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \\ \forall t \in I, \frac{dy}{dt} = X(t,y) \text{ et } y(t_0) = x_0 \end{array} \right. \right\}$$

Nous définissons alors

$$I^{Max} := \bigcup_{(I,y) \in \mathcal{I}_{(t_0,x_0)}} I$$

et $y^{Max} \in \mathcal{C}^1(I^{Max}, \mathbb{R}^n)$ par :

$$\forall t \in I^{Max}, \quad y^{Max}(t) = y(t) \text{ pour tout } (I,y) \in \mathcal{I}_{(t_0,x_0)} \text{ tel que } t \in I$$

Alors $(I^{Max}, y^{Max}) \in \mathcal{I}_{(t_0,x_0)}$ est la solution maximale : toute autre solution dans $\mathcal{I}_{(t_0,x_0)}$ est obtenue en choisissant un intervalle $I \subset I^{Max}$ contenant t_0 et en prenant la restriction de y^{Max} à I.