Équations différentielles

Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Mardi 9 mars 2021

3.3.2 L'intervalle maximal est un ouvert

Une autre conséquence du théorème de Cauchy–Lipschitz est le résultat suivant.

Proposition 3.1 *Soit* $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ *une application localement lipschitzienne en espace soit* $(t_0, x_0) \in U$. *Considérons la solution maximale* (I^{Max}, y) *du problème de Cauchy*

$$\forall t \in I^{Max}, \quad \frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t)) \quad \textit{et} \quad y(t_0) = x_0$$

Alors est un intervalle ouvert.

Démonstration – Raisonnons par l'absurde et supposons I^{Max} ne soit pas ouvert, par exemple, $I^{Max} =]t_-, t_+]$. Comme U est ouvert, il est possible d'appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz avec les données de Cauchy $(t_+, y(t_+))$: $\exists \varepsilon > 0$, tel que, si $I_\varepsilon :=]t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon[$, $\exists z \in \mathcal{C}^1(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n)$, solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall t \in I_\varepsilon, \quad \frac{dz}{dt}(t) & = & X(t, z(t)) \\ z(t_+) & = & y(t_+) \end{array} \right.$$

Ainsi z et y sont définies et sont solutions de la même équation différentielle sur l'intervalle $]t_-, t_+] \cap]t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon] =]t_+ - \varepsilon, t_+]$ et coïncident en t_+. Donc, d'après le résultat d'unicité de Cauchy–Lipschitz, ces deux applications coïncident sur tout $]t_+ - \varepsilon, t_+]$. On peut donc prolonger y en une application $\bar{y} \in \mathcal{C}^1(]t_-, t_+ + \varepsilon[, \mathbb{R}^n)$, définie par

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} \forall t \in]t_-, t_+], & \bar{y}(t) & := & y(t), \\ \forall t \in]t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon[, & \bar{y}(t) & := & z(t) \end{array} \right.$$

Alors $\bar{y}$ prolonge la solution y, ce qui contredit le fait que y est la solution maximale. □

3.4 Un critère d'explosion des solutions

Supposons à présent que l'équation différentielle $\frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t))$ soit définie pour un champ de vecteur $X \in \mathcal{C}^1(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. Nous savons que la solution maximale de cette équation *n'est pas nécessairement définie* sur tout l'intervalle I, c'est à dire qu'il est possible que $I^{Max} \subset I$ et $I^{Max} \neq I$. Cela se produit par exemple pour l'équation $\frac{dy}{dt} = y^2$ et nous pouvons observer dans cet exemple que les valeurs de t où la solution cesse d'exister sont celles où la solution *explose*, ce qui signifie que sa norme tend vers $+\infty$. Cette situation est générale comme le montre le résultat suivant.

1. Université de Paris, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

3.4.1 Le théorème principal

Dans ce qui suit, $I \subset \mathbb{R}$ désigne un intervalle et nous convenons que $\sup I$ désigne, soit la borne supérieure de I, si I est majoré, soit $+\infty$, si I est non majoré. De même $\inf I$ désigne, soit la borne inférieure de I, si I est minoré, soit $-\infty$, si I est non minoré.

Théorème 3.1 (Sortie définitive de tout compact) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X \in \mathcal{C}^0(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur* localement lipschitzien en espace. *Soit $(]t_-, t_+[, y)$ une solution maximale de l'équation $\frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t))$.*

(i) si $t_+ < \sup I$, alors $y(t)$ sort définitivement de tout compact lorsque t tend vers t_+, *ce qui signifie*

$$\forall K \subset \Omega,\ \textit{si } K \textit{ est compact}, \quad \exists \bar{t} \in\ ]t_+, t_+[,\ \forall t \in\ [\bar{t}, t_+[, \quad y(t) \notin K \tag{1}$$

(ii) si $\inf I < t_-$, *alors $y(t)$* sort définitivement de tout compact lorsque t tend vers t_-, *ce qui signifie*

$$\forall K \subset \Omega,\ \textit{si } K \textit{ est compact}, \quad \exists \bar{t} \in\ ]t_+, t_+[,\ \forall t \in\ ]t_-, \bar{t}], \quad y(t) \notin K \tag{2}$$

Démonstration — Nous nous contenterons de montrer (i), le résultat (ii) étant totalement symétrique. Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une solution maximale $(]t_-, t_+[, y)$ telle que $t_+ < \sup I$ et que (1) n'est pas vérifié.

(a) Le fait que (1) ne soit pas satisfait signifie qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

$$\forall \bar{t} \in\ ]t_+, t_+[,\ \exists t \in\ [\bar{t}, t_+[, \quad y(t) \in K$$

En appliquant cette propriété pour des valeurs de $\bar{t}$ qui tendent vers t_+ (par exemple pour $\bar{t} = t_+ - \frac{1}{k}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$), nous obtenons qu'il existe une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$[\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad t_k \in\ ]t_-, t_+[\text{ et } y(t_k) \in K\ ] \qquad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} t_k = t_+$$

Comme K est compact, il est possible d'extraire une sous-suite $(t_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $(t_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que $(y(t_{\varphi(k)}))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $y_+ \in K$. Pour alléger les notations, nous noterons $t_k = t_{\varphi(k)}$. Ainsi

$$\lim_{k \to +\infty} y(t_k) = y_+ \in K \subset \Omega$$

Interlude — L'idée est de procéder comme dans la preuve de la proposition 3.1, sauf que les choses sont compliquées par le fait que t_+ n'est pas dans l'intervalle sur lequel est défini y et que rien ne garantit *a priori* que $y(t)$ tend vers y_+ lorsque t tend vers t_+ (cela n'est vrai que pour une suite). Nous allons pour cela construire un *piège*, sous la forme d'un voisinage de (t_+, y_+), de la forme $]t_+ - \tau, t_+ + \tau[\times \bar{B}(y_+, r)$ (voir plus bas), et attendre que $(t_k, y(t_k))$ passe dans ce piège.

(b) Comme I et Ω sont ouverts, il existe $\alpha > 0$ et $r > 0$ tels que le compact $K_+^{2\alpha,2r} := [t_+ - 2\alpha, t_+ + 2\alpha] \times \bar{B}(y_+, 2r)$ soit inclus dans $I \times \Omega$ (ici $\bar{B}(y_+, 2r)$ désigne la boule *fermée* de centre y_+ et de rayon $2r$). Comme X est localement lipschitzien par rapport à x, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (t,x), (t,x') \in K_+^{2\alpha,2r}, \quad \|X(t,x') - X(t,x)\| \leq C\|x' - x\|$$

De plus nous pouvons aussi borner X sur ce même compact : il existe $\mathsf{V} > 0$ tel que

$$\forall (t,x) \in K_+^{2\alpha,2r}, \quad \|X(t,x)\| \leq \mathsf{V}$$

Nous appliquons le théorème de Cauchy–Lipschitz. Notons $K_+^{\alpha,r} := [t_+ - \alpha, t_+ + \alpha] \times \bar{B}(y_+, r)$, nous avons : $\forall (s,x) \in K_+^{\alpha,r}$,

$$\exists \tau > 0,\ \exists z \in \mathcal{C}^1(]s-\tau, s+\tau[, \mathbb{R}^n),\ \text{solution de } \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dz}{dt}(t) & = & X(t, z(t)), \quad \forall t \in]s-\tau, s+\tau[\\ z(s) & = & x \end{array} \right.$$

La **chose importante** ici est le fait que τ peut être choisi *indépendamment de* $(s,x) \in K_+^{\alpha,r}$. En effet, en examinant la preuve du théorème de Cauchy–Lipschitz, on voit qu'il suffit de supposer que $\tau < \min(\alpha, \frac{1}{C}, \frac{r}{\mathsf{V}})$. *Le piège est prêt.*

(c) Comme $\lim_{k\to+\infty} t_k = t_+$ et $\lim_{k\to+\infty} y(t_k) = y_+$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(t_k, y(t_k)) \in\ ]t_+ - \tau, t_+ + \tau[\times \bar{B}(y_+, r)$$

On applique alors ce qui précède avec $(s,x) = (t_k, y(t_k))$: il existe $z \in \mathcal{C}^1(]t_k-\tau, t_k+\tau[, \mathbb{R}^n)$ tel que

$$z(t_k) = y(t_k) \quad \text{et} \quad \left[\ \forall t \in\ ]t_k - \tau, t_k + \tau[, \quad \frac{dz}{dt}(t) = X(t, z(t))\ \right]$$

D'après le théorème d'unicité de Cauchy–Lipschitz, y et z coïncident sur $]t_-, t_+[\ \cap\ ]t_k - \tau, t_k+\tau[\ =\ ]t_k-\tau, t_+[$ et on peut donc prolonger y en une solution $\bar{y}$ définie sur $]t_-, t_+[\ \cup\ ]t_k-\tau, t_k+\tau[\ =\ ]t_-, t_k+\tau[$. Or $t_+ - \tau < t_k$, ce qui équivaut à $t_+ < t_k + \tau$: l'intervalle $]t_-, t_k+\tau[$ contient donc strictement $]t_-, t_+[$, ce qui signifie que y n'est pas la solution maximale, c'est une **contradiction**. □

3.4.2 Les corollaires

Le théorème précédent admet plusieurs corollaires.

Corollaire 3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X \in \mathcal{C}^0(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur* localement lipschitzien en espace. *Soit (I^{Max}, y) une solution maximale de l'équation $\frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t))$. Supposons qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $y(t)$ reste dans K pour tout temps. Alors $I^{Max} = I$.*

Démonstration — Cette proposition est équivalente à sa contraposée qui s'énonce : *si $I^{Max} \neq I$, alors $\forall K$, compact inclus dans Ω, $y(t)$ sort au moins une fois de K.* Or cet énoncé est lui-même une conséquence du théorème 3.1 qui affirme que, si $I^{Max} \neq I$, alors $y(t)$ sort *définitivement* de tout compact. □

Corollaire 3.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur* localement lipschitzien en espace. *Soit (I^{Max}, y) une solution maximale de l'équation $\frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t))$. Supposons qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $y(t)$ reste dans K pour tout temps. Alors $I^{Max} = \mathbb{R}$.*

Démonstration — Ce résultat est lui-même un cas particulier du corollaire précédent. $\square$

Exemples

(i) Nous avons vu qu'aucune solution maximale de l'équation $y' = y^2$ n'est définie sur tout $\mathbb{R}$, à l'exception de la solution nulle. En effet, pour une donnée de Cauchy $y(t_0) = y_0 \neq 0$, la solution maximale est $y(t) = \frac{y_0}{1+y_0(t_0-t)}$ et est définie sur $]-\infty, t_0 + \frac{1}{t_0}[$, si $y_0 > 0$, et sur $]t_0 + \frac{1}{t_0}, +\infty[$, si $y_0 < 0$. Nous sommes dans un cas d'explosion de la solution à l'instant $t_0 + \frac{1}{y_0}$.

(ii) Le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dy^1}{dt} & = & y^2\sqrt{1 + (y^1)^2 + (y^2)^2} = y^2\sqrt{1 + \|y\|^2} \\ \frac{dy^1}{dt} & = & -y^1\sqrt{1 + (y^1)^2 + (y^2)^2} = -y^1\sqrt{1 + \|y\|^2} \end{array} \right.$$

est non linéaire, avec une non linéarité qui croît de façon quadratique lorsque $\|y\| := \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}$ tend vers $+\infty$, comme dans l'exemple précédent. Néanmoins nous observons que, si $y = (y^1, y^2)$ est une solution, alors

$$\frac{d\|y\|^2}{dt} = 2y^1\frac{dy^1}{dt} + 2y^2\frac{dy^2}{dt} = 2\left(y^1y^2 - y^2y^1\right)\sqrt{1 + \|y\|^2} = 0.$$

Cela implique que $y(t)$ prend ses valeurs dans le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\|y(t_0)\|$, qui est compact. Donc d'après le corollaire précédent, les solutions maximales sont définies sur tout $\mathbb{R}$.

3.5 Champs de vecteur à croissance sous-linéaire

Définition 3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On dit que X est à* ***croissance sous-linéaire*** *s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$\forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n, \quad \|X(t, x)\| \leq C_1 + C_2\|x\| \tag{3}$$

Exemples

(i) Tout système linéaire de la forme $\frac{dy}{dt}(t) = A(t)y(t) + B(t)$, où $A \in \mathcal{C}^0(I, M(n, \mathbb{R}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ sont *bornés* sur I est à croissance sous-linéaire.

(ii) L'équation $\frac{dy}{dt} = \sqrt{1 + y^2}$ à est croissance sous-linéaire.

(iii) L'équation $\frac{dy}{dt} = y^2$ **n'est pas** à croissance sous-linéaire.

Théorème 3.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur* localement lipschitzien en espace *et à* croissance sous-linéaire*. Alors, toute solution maximale de l'équation $\frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t))$ est définie sur tout I.*

Démonstration — Nous allons montrer que si (I^{Max}, y) est une solution maximale de $\frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t))$ et si $t_0 \in I^{Max}$, alors

(i) pour tout intervalle borné $[a, b] \subset I$, la solution y est *bornée* sur $[a, b] \cap I^{Max}$;

(ii) le précédent résultat se traduit en disant que la restriction de y à $[a, b] \cap I^{Max}$ prend ses valeurs dans un compact de $\mathbb{R}^n$, ce qui permet d'appliquer le corollaire 3.1 pour montrer que la restriction de y à $[a, b] \cap I^{Max}$ est définie sur tout $[a, b]$;

(iii) Comme le raisonnement précédent est valable pour tout intervalle $[a, b] \subset I^{Max}$ contenant t_0 et comme I est la réunion de tels intervalles, on en déduit que y est définie sur tout I.

Ainsi il suffit de montrer (i) et le reste suivra.

Pour tout $t \in [a, b] \cap I^{Max}$, posons $u(t) := \|y(t)\|^2$. Cela définit une application de classe $\mathcal{C}^1$ à valeur $[0, +\infty[$. Nous avons, en utilisant (3)

$$\begin{aligned}\left|\frac{du}{dt}(t)\right| &= 2\left|\left\langle y, \frac{dy}{dt}\right\rangle\right| \leq 2\|y\| \left\|\frac{dy}{dt}\right\| = 2\|y\| \, \|X(t, y)\| \\ &\leq 2\|y\| \, (C_1 + C_2\|y\|) = 2C_1\|y\| + 2C_2\|y\|^2\end{aligned}$$

Donc, en utilisant l'inégalité $2C_1\|y\| \leq C_1^2 + \|y\|^2$, nous obtenons

$$\left|\frac{du}{dt}\right| \leq \alpha + \beta u,$$

où $\alpha := C_1^2$ et $\beta := 1 + C_2$. Cela équivaut aux deux inégalités

$$0 \leq \frac{du}{dt} + \beta u + \alpha \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} - \beta u - \alpha \leq 0 \tag{4}$$

La première de ces inégalités équivaut à :

$$0 \leq e^{\beta t}\left(\frac{du}{dt} + \beta u + \alpha\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{\beta t} u + \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta t}\right)$$

Donc $\left[t \longmapsto e^{\beta t} u + \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta t}\right]$ est une fonction croissante sur $[a, b] \cap I^{Max}$, ce qui entraîne en particulier que, $\forall t \in [a, b] \cap I^{Max}$,

$$t \leq t_0 \quad \Longrightarrow \quad e^{\beta t}\left(u(t) + \frac{\alpha}{\beta}\right) \leq e^{\beta t_0}\left(u(t_0) + \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad u(t) \leq e^{\beta(t_0 - t)}\left(u(t_0) + \frac{\alpha}{\beta}\right) - \frac{\alpha}{\beta}$$

Un raisonnement analogue montre que la deuxième inégalité dans (4) implique que, $\forall t \in [a, b] \cap I^{Max}$,

$$t \geq t_0 \quad \Longrightarrow \quad u(t) \leq e^{\beta(t - t_0)}\left(u(t_0) + \frac{\alpha}{\beta}\right) - \frac{\alpha}{\beta}$$

On en conclut que $u(t)$ est majoré par $\left(u(t_0)+\frac{\alpha}{\beta}\right)\max\left(e^{\beta(t_0-a)},e^{\beta(b-t_0)}\right)-\frac{\alpha}{\beta}$. Donc y est bornée sur $[a,b]\ \cap\ I^{Max}$. □

Exemples

(i) Nous retrouvons ainsi que tout système linéaire dont les coefficients sont bornés admet des solutions sur tout le domaine où est défini l'équation, comme nous l'avions vu grâce à la formule de Dyson.

(ii) Le théorème que nous avons montré entraîne que l'équation $\frac{dy}{dt}=\sqrt{1+y^2}$ admet une solution sur tout $\mathbb{R}$.

(iii) Le théorème est optimal au sens où, si le champ de vecteur X a une croissance légèrement plus forte qu'une croissance linéaire, alors les solutions de l'équation différentielle ne sont pas nécessairement définies sur tout l'intervalle. Par exemple, si $\alpha>0$ et si $X\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times]0,+\infty[,\mathbb{R})$ est défini par $X(t,x)=x^{1+\alpha}$, alors X a une croissance surlinéaire et, pour $t_0\in\mathbb{R}$ et $y_0\in]0,+\infty[$, la solution de l'équation $\frac{dy}{dt}=y^{1+\alpha}$ telle que $y(t_0)=y_0$ est

$$y(t)=\frac{y_0}{\left(1+\alpha y_0^\alpha(t_0-t)\right)^{1/\alpha}}$$

Cette solution définie sur $]-\infty,t_0+\frac{1}{\alpha y_0^\alpha}[$ et elle explose lorsque t tend vers $t_0+\frac{1}{\alpha y_0^\alpha}$.