Équations différentielles

Cours de L3 par Frédéric Hélein[1], janvier–avril 2021

Mardi 23 mars 2021

4 Points d'équilibre et stabilité pour les équations différentielles non linéaires autonomes

Dans ce qui suit nous nous contenterons d'étudier les équations différentielles autonomes.

Remarquons à cette occasion qu'il est toujours possible de ramener l'étude d'une équation différentielle quelconque à celle d'une équation différentielle autonome. En effet, à tout champ de vecteur $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$), non autonome en général, nous pouvons associer le champ de vecteur *autonome*[2] $Y \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^{n+1})$ défini par

$$\forall (t,x) \in U, \quad Y(t,x) := (1, X(t,x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$$

De plus, à tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à toute application $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, nous spouvons associer l'application $z = j^0 y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, définie par : $\forall t \in I$, $z(t) = (t, y(t))$. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in U$ tel que $t_0 \in I$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y(t_0) & = & x_0 \\ \forall t \in I, \frac{dy}{dt}(t) & = & X(t, y(t)) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} z(t_0) & = & (t_0, x_0) \\ \forall t \in I, \frac{dz}{dt}(t) & = & Y(z(t)) \end{array} \right.$$

Dans la suite, si X est localement lipschitzien, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $t \in \mathbb{R}$ nous noterons $x_0 \cdot e^{tX}$ la valeur à l'instant t (si elle existe) de la solution y de l'équation $\frac{dy}{dt} = X(y)$, avec la condition de Cauchy $y(0) = x_0$.

4.1 Équilibres et différentes notions de stabilité

Définition 4.1 *Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Un* ***point d'équilibre*** *de X est un point $a \in \Omega$ tel que $X(a) = 0$.*

À chaque point d'équilibre $a \in \Omega$ de X correspond la solution constante $[\, \mathbb{R} \ni t \longmapsto a \in \Omega \,]$ de l'équation $\frac{dy}{dt} = X(y)$. Nous définissons plusieurs notions de *stabilité* de cette solution.

Définition 4.2 (équilibre stable) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur localement lipschitzien. Soit $a \in \Omega$. On dit que a est un* ***point d'équilibre stable*** *si a est un point d'équilibre et si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Omega, \forall t > 0, \quad \|x - a\| < \delta \implies \|x \cdot e^{tX} - a\| < \varepsilon \tag{1}$$

1. Université de Paris, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

2. Rappelons qu'un champ de vecteur autonome est systématiquement identifié avec une application X d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Si un point d'équilibre ne satisfait pas la condition (1), on dit qu'il est **instable**.

Définition 4.3 *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, a est un* ***point d'équilibre localement asymptotiquement stable*** *si a est un* point d'équilibre stable *et si il existe un voisinage U_a de a dans U tel que*

$$\forall x \in U_a, \quad \lim_{t \to +\infty} x \cdot e^{tX} = a \tag{2}$$

Définition 4.4 *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, a est un* ***point d'équilibre globalement asymptotiquement stable*** *si a est un* point d'équilibre stable *et si*

$$\forall x \in U, \quad \lim_{t \to +\infty} x \cdot e^{tX} = a \tag{3}$$

Les conditions imposées dans les trois définitions précédentes sont de plus en plus fortes. Ainsi :

globalement asymptotiquement stable	$\Longrightarrow$	localement asymptotiquement stable	$\Longrightarrow$	stable

4.2 Stabilité des systèmes linéaires à coefficients constants

Les coefficients d'un système linéaire autonome sont nécessairement constants. Les points d'équilibre d'un système $\frac{dy}{dt} = Ay + B$ (où $A \in M(n, \mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$) sont les solutions x_0 de $Ax_0 = -B$ (si A est inversible, il existe une unique solution qui est $x_0 = -A^{-1}B$). En posant $y(t) = x_0 + x(t)$, on constate que y est solution de $\frac{dy}{dt} = Ay + B$ ssi x est solution de l'équation linéaire homogène associée $\frac{dx}{dt} = Ax$. Nous pouvons donc nous ramener à l'étude des équations différentielles linéaires homogènes. L'origine 0 est alors *toujours* un point d'équilibre.

Proposition 4.1 *Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$. Considérons l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = Ax$.*

(i) L'origine 0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable ssi toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.

(ii) Si A a au moins une valeur propre dont la partie réelle est strictement positive, alors 0 est un point d'équilibre instable.

Démonstration — (i) Nous pouvons décomposer $A = P(\Delta + N)P^{-1}$, où $P \in GL(n, \mathbb{C})$, Δ est une matrice diagonale et N est un matrice nilpotente qui commute avec Δ. Supposons que toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative, alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour chaque valeur propre λ, sur la diagonale de Δ, on a $\mathrm{Re}\lambda \leq -\alpha$. Alors, $\forall t > 0$, $|e^{\lambda t}| = e^{(\mathrm{Re}\lambda)t} \leq e^{-\alpha t}$ et donc $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $\|e^{t\Delta} z\| \leq e^{-\alpha t}\|z\|$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\forall t > 0, \quad \|e^{tA}x\| = \|Pe^{t\Delta}e^{tN}P^{-1}x\| \leq \|P\| \; e^{-\alpha t} \; \|e^{tN}P^{-1}x\|$$

Mais comme e^{tN} est un polynôme en t, $\lim_{t\to+\infty} \|e^{tN}P^{-1}x\| = 0$, ce qui entraîne $\lim_{t\to+\infty} \|e^{tA}x\| = 0$.

Nous montrons la réciproque en prouvant sa contraposée, à savoir que, s'il existe une valeur propre dont la partie réelle est positive ou nulle, alors 0 n'est pas globalement (ni même localement) asymptotiquement stable. Soit λ une telle valeur propre.

— Si $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A pour λ. Alors $e^{tA}u = e^{t\lambda}u$ et donc, si $t \geq 0$, $\|e^{tA}u\| = e^{t\mathrm{Re}\lambda}\|u\| \geq \|u\| > 0$.

— Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre. Soit $u \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A pour λ. Alors $\bar{u}$ est un vecteur propre pour $\bar{\lambda}$ et l'application y définie par $y(t) = e^{\lambda t}u + e^{\bar{\lambda}t}\bar{u}$ est une solution réelle de $\frac{dy}{dy} = Ay$. Si nous posons $\lambda = \tau + i\theta$, avec $\tau \in [0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}^*$, alors, $\forall t \geq 0$, $\|y(t)\| = e^{\tau t}\|e^{i\theta t}u + e^{-i\theta t}\bar{u}\| \geq \|e^{i\theta t}u + e^{-i\theta t}\bar{u}\|$. Or il existe une constante $\kappa > 0$ et une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la forme $t_k = t_0 + k\frac{2\pi}{|\theta|}$ (qui tend donc vers $+\infty$) telle que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|e^{i\theta t_k}u + e^{-i\theta t_k}\bar{u}\| = \kappa$. Donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|y(t_k)\| \geq \kappa$ et $y(t)$ ne peut pas tendre vers 0 lorsque t tends vers $+\infty$.

Dans tous les cas, nous pouvons exhiber une solution qui ne tend pas vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Donc l'origine 0 n'est pas globalement asymptotiquement stable.

La preuve de (ii) est dans le prolongement du raisonnement précédent : si, de surcroît, $\mathrm{Re}\lambda > 0$, alors :

— Si λ est réel, $\lim_{t\to+\infty} \|e^{tA}u\| = +\infty$, ce qui contredit (1).

— Si λ n'est pas réel, alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|y(t_k)\| = \kappa e^{\tau t_k}$ tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$, ce qui montre que 0 n'est pas stable.

$\square$

Exemples (pour $n = 2$)

— Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, 0 est globalement asymptotiquement stable ;

— Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 0 est stable mais non asymptotiquement stable ;

— Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 0 est instable.

4.3 Linéarisation d'une équation linéaire au voisinage d'un équilibre

4.3.1 Une condition suffisante pour la stabilité

Considérons une équation différentielle non linéaire autonome $\frac{dy}{dt} = X(y)$, où $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et supposons que $a \in \Omega$ est un point d'équilibre. Nous allons montrer le résultat suivant (dans ce qui suit, dX_a est la *différentielle* de X en a).

Théorème 4.1 *Si toutes les valeurs propres de dX_a sont de partie réelle strictement négative, alors a est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable.*

Afin de démontrer ce théorème, nous établissons le lemme suivant.

Lemme 4.1 *Soit $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Supposons que, pour toute valeur propre λ_j de A, on ait $Re\lambda_j < 0$. Alors il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ sur $\mathbb{R}^n$ et un constante $\alpha > 0$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, Ax \rangle_A \leq -\alpha \|x\|_A^2 \tag{4}$$

Démonstration — Nous notons, pour tous $u, v \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle u, v \rangle := \sum_{j=1}^{n} \overline{u}_j v_j = \begin{pmatrix} \overline{u}^1 & \cdots & \overline{u}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

le produit hermitien de u et de v. Nous savons qu'il existe $P \in GL(n, \mathbb{C})$ et $T \in M(n, \mathbb{C})$, de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1;n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda + N$$

(où Λ est diagonale et N est nilpotente) tels que $A = PTP^{-1}$. Pour tout $\delta > 0$, nous introduisons la matrice

$$Q_\delta := \begin{pmatrix} \delta^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

et nous posons, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle_\delta := \text{Re} \, \langle \, Q_\delta P^{-1} x \, , \, Q_\delta P^{-1} y \, \rangle$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \langle x, Ax \rangle_\delta &= \text{Re} \, \langle \, Q_\delta P^{-1} x \, , \, Q_\delta P^{-1} (PTP^{-1}) x \, \rangle \\ &= \text{Re} \, \langle \, Q_\delta P^{-1} x \, , \, Q_\delta T \; P^{-1} x \rangle \\ &= \text{Re} \, \langle \, Q_\delta P^{-1} x \, , \, Q_\delta T \; Q_{1/\delta} Q_\delta \; P^{-1} x \, \rangle \\ &= \text{Re} \, \langle \, z \, , \, Q_\delta T Q_{1/\delta} \; z \, \rangle \end{aligned}$$

où $z := Q_\delta P^{-1} x$. Or

$$Q_\delta T Q_{1/\delta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta \, a_{12} & \cdots & \delta^{n-1} a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta \, a_{n-1;n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda + Q_\delta N Q_{1/\delta}$$

À présent utilisons l'hypothèse $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, $\forall j$: il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{Re}\lambda_j \leq -2\alpha$, $\forall j$. Alors

$$\begin{aligned} \langle x, Ax\rangle_\delta &= \mathrm{Re}\,\langle\, z\ ,\ \Lambda T\ z\,\rangle + \mathrm{Re}\,\langle\, z\ ,\ Q_\delta N Q_{1/\delta}\ z\,\rangle \\ &\leq -2\alpha\|z\|^2 + \mathrm{Re}\left(\sum_{1\leq j<k\leq n} \delta^{k-j} a_{jk}\overline{z}_j z_k\right) \\ &\leq -2\alpha\|z\|^2 + \delta\ \frac{n-1}{2} \sup_{1\leq j<k\leq n} |a_{jk}|\ \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \\ &\leq (C\delta - 2\alpha)\ \|z\|^2 \end{aligned}$$

où $C = \frac{n-1}{2}\ \sup_{1\leq j<k\leq n} |a_{jk}|$. On choisit δ suffisamment petit pour que $C\delta \leq \alpha$. On a alors $\langle x, Ax\rangle_\delta \leq -\alpha\|z\|^2$. Mais comme $z := Q_\delta P^{-1}x$, il vient de la définition de $\langle\cdot,\cdot\rangle_\delta$ que $\|z\|^2 = \|x\|_\delta^2$, d'où l'inégalité (4). $\square$

Démonstration du théorème 4.1 — Sans perte de généralité nous supposons que 0 est un point d'équilibre et nous étudions la situation au voisinage de 0. Comme X est $\mathcal{C}^1$, $\forall x \in U$, on a (quitte à remplacer U par un ouvert convexe si nécessaire)

$$X(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(X(tx)\right) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(tx) x^j dt$$

Donc

$$X(x) - dX_0(x) = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial X}{\partial x^j}(tx) - \frac{\partial X}{\partial x^j}(0)\right) dt\right) x^j = \sum_{j=1}^n g_j(x) x^j$$

où, $\forall j = 1, \cdots, n$, $g_j \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ s'annule en 0. Autrement dit, en notant $G \in \mathcal{C}^0(U, \mathrm{End}(\mathbb{R}^n))$, l'application qui, à tout $x \in U$, associe $G_x \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ défini par : $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $G_x(\xi) = \sum_{j=1}^n g_j(x)\xi^j$, nous avons

$$\forall x \in U, \quad X(x) = dX_0(x) + G_x(x) \tag{5}$$

Nous utilisons maintenant l'hypothèse essentielle du théorème, à savoir que les parties réelles des valeurs propres de dX_0 sont toutes strictement négatives. D'après le lemme 4, cela entraîne qu'il existe un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\delta$ et un réel $\alpha > 0$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, dX_0(x)\rangle_\delta \leq -\alpha\|x\|_\delta^2$. En utilisant (5) nous obtenons que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, X(x)\rangle_\delta = \langle x, dX_0(x)\rangle_\delta + \langle x, G_x(x)\rangle_\delta \leq -\alpha\|x\|_\delta^2 + \|x\|_\delta \|G_x(x)\|_\delta$$

et, en notant $\|G_x\|_\delta := \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|G_x(x)\|_\delta}{\|x\|_\delta}$,

$$\forall x \in U, \quad \langle x, X(x)\rangle_\delta \leq (\|G_x\|_\delta - \alpha)\, \|x\|_\delta^2$$

Notons, pour tout $r \leq 0$, $B_\delta(r) := \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \|x\|_\delta \leq r\}$. Comme G est continue et s'annule en 0, $\exists \rho > 0$ tel que $B_\delta(\rho) \subset U$ et, $\forall x \in B_\delta(\rho)$, $\|G_x\|_\delta \leq \alpha/2$ et donc

$$\forall x \in B_\delta(\rho), \quad \langle x, X(x)\rangle_\delta \leq -\frac{\alpha}{2}\|x\|_\delta^2$$

Soit $x \in B_\delta(\rho)$ et I l'intervalle de vie maximal de $[t \longrightarrow x \cdot e^{tX}]$. Alors, en notant $y(t) := x \cdot e^{tX}$,

$$\forall t \in I \cap [0, +\infty[, \quad \frac{d\|y\|_\delta^2}{dt} = 2 \left\langle y, \frac{dy}{dt} \right\rangle_\delta = 2 \left\langle y, X(y) \right\rangle_\delta \leq -\alpha \|y\|_\delta^2$$

Nous remarquons que cette inégalité implique que y reste dans le compact $B_\delta(\rho)$ si $t \geq 0$ et donc que $I \cap [0, +\infty[= [0, +\infty[$. De plus, nous en déduisons : $\forall t \geq 0$, $\frac{d}{dt}\left(e^{t\alpha}\|y(t)\|_\delta^2\right) \leq 0$. Donc $t \longmapsto e^{t\alpha/2}\left\|x \cdot e^{tX}\right\|_\delta$ est une fonction décroissante et

$$\forall t \geq 0, \quad \left\|x \cdot e^{tX}\right\|_\delta \leq e^{-t\alpha/2}\|x\|_\delta \leq \rho e^{-t\alpha/2} \tag{6}$$

Observons que, comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, $\exists C > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{1}{C}\|x\| \leq \|x\|_\delta \leq C\|x\|_\delta$$

Donc, $\forall x \in U$, $\forall t \geq 0$,

$$\|x\| \leq \frac{\rho}{C} \implies \|x\|_\delta \leq \rho \implies \left\|x \cdot e^{tX}\right\|_\delta \leq e^{-t\alpha/2}\|x\|_\delta \implies \left\|x \cdot e^{tX}\right\| \leq C\rho e^{-t\alpha/2}$$

Cela prouve que 0 est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable. $\square$