Équations différentielles

Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Mardi 23 mars 2021

4.3.2 Une condition suffisante pour l'instabilité

Une réciproque **partielle** du résultat précédent est le résultat suivant (admis).

Théorème 4.1 *Soit $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre stable. Alors toutes les valeurs propres de dX_a sont de partie réelle négative ou nulle.*

La contraposée de ce résultat est particulièrement utile. Elle affirme que, *s'il existe au moins une valeur propre de dX_a dont la partie réelle est strictement positive, alors a est un équilibre **instable***. En définitive il est possible de décider de la stabilité d'un point d'équilibre à partir de l'étude de la linéarisation dans les cas correspondant à la définition suivante.

Définition 4.1 *Soit $X \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ et $a \in \Omega$ un point d'équilibre de l'équation $\frac{dy}{dt} = X(y)$. On dit que a est un point **hyperbolique** si toutes les valeurs propres de dX_a ont une partie réelle non nulle.*

4.3.3 Cas incertains

Un cas reste non élucidé par ce qui précède : que peut-on dire si les valeurs propres de dX_a sont de partie réelle négative ou nulle ? réponse : *on ne peut rien dire en général*, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple — Considérons les champs de vecteurs $X, Y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ définis par

$$X(x) = \begin{pmatrix} x^2 - x^1\|x\|^2 \\ -x^1 - x^2\|x\|^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 + x^1\|x\|^2 \\ -x^1 + x^2\|x\|^2 \end{pmatrix}, \text{ où } \quad \|x\|^2 := (x^1)^2 + (x^2)^2$$

Ces deux champs de vecteurs admettent 0 comme unique point d'équilibre et ont la même différentielle en 0 :

$$dX_0 = dY_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: A$$

Les valeurs propres sont i et $-i$ et ont donc une partie imaginaire nulle. On ne peut donc ni conclure à la stabilité, ni conclure à l'instabilité par les théorèmes précédents. Observons par ailleurs que $X(x) = A(x) - \|x\|^2 x$ et $Y(x) = A(x) + \|x\|^2 x$. Nous en déduisons que, si $y(t) = x \cdot e^{tX}$, alors

$$\frac{d\|y\|^2}{dt} = 2\left\langle y, \frac{dy}{dt} \right\rangle = 2\left\langle y, Ay - \|y\|^2 y \right\rangle = -2\|y\|^4 \leq 0$$

1. Université de Paris, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Donc $\|y(t)\|^2$ est une fonction décroissante de t, ce qui prouve que 0 est stable. On déduit aussi que, si $y(0)=x$, $\|x\cdot e^{tX}\|^2 = \frac{\|x\|^2}{1+2\|x\|^2 t}$, ce qui prouve que $x\cdot e^{tX}$ tend vers 0 lorsque t vers $+\infty$. Donc 0 est globalement asymptotiquement stable.

A l'inverse, si $z := x\cdot e^{tY}$, alors $\frac{d\|z\|^2}{dt} = 2\|z\|^4 \geq 0$, ce qui entraîne que 0 est instable. De plus $\|x\cdot e^{tY}\|^2 = \frac{\|x\|^2}{1-2\|x\|^2 t}$, quantité qui temps vers $+\infty$ au temps $1/2\|x\|^2$.

La fonction $[x \longmapsto \|x\|^2]$ joue, pour le champ de vecteur X, le rôle de *fonction de Liapounov*.

4.4 Fonctions de Liapounov

Il est possible de prouver la stabilité de certains points d'équilibre sans avoir recours à la la linéarisation, mais en faisant intervenir des quantités qui sont conservées ou bien qui décroissent le long d'une solution d'une équation différentielle. Dans des applications à la physique, ces quantités représentent souvent l'énergie du système.

Prenons l'exemple d'un corps ponctuel de masse m pouvant se déplacer sur un axe et soumis à une force élastique et une force de frottement. Si on note $x(t)\in\mathbb{R}$ la position de ce corps à l'instant t et si la force élastique s'exprime sous la forme $-kx$ et la force de frottement par $-f\frac{dx}{dt}$ (où $k>0$ et $f\geq 0$), la loi de Newton s'écrit

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f\frac{dx}{dt}$$

La position $x=0$ est une position d'équilibre. L'expérience physique nous amène à penser que cet équilibre est stable et, ce, d'autant plus en présence de la force de frottement. Nous savons, grâce à des considérations physiques, que l'énergie totale $E(t) := \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ est une quantité qui décroit (strictement si $f>0$ et qui est conservée si $f=0$). En posant $y(t) = \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ m\dot{x}(t)\end{pmatrix}$, on se ramène au système $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} y^2 \\ -kmy^1 - fy^2\end{pmatrix}$. L'énergie totale se retrouve en définissant la fonction

$$L(y) =:= \frac{k}{2}(y^1)^2 + \frac{1}{2m}(y^2)^2$$

via la relation $E(t) = L\circ y(t)$. On trouve en effet que, si y est solution de l'équation différentielle, alors $\frac{d(L(y(t))}{dt} = -f\left(\frac{y^2}{m}\right)^2 \leq 0$. Donc cette quantité décroit, ce qui va nous permettre de prouver la stabilité de la position d'équilibre $x=0$.

Définition 4.2 *Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Soit $X\in\mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur autonome localement lipschitzien et soit $a\in\Omega$ un point d'équilibre. Soit U un voisinage de a dans Ω et $L\in\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$. On dit que L est une* ***fonction de Liapounov locale*** *pour le point a si*

(i) $L(a)=0$ et, $\forall x\in U\setminus\{a\}$, $L(x)>0$;

(ii) pour tout $x\in U$, $[t\longmapsto L\left(x\cdot e^{tX}\right)]$ est une fonction ***décroissante*** *de t.*

Si, de plus,

(iii) pour tout $x \in U \setminus \{a\}$, $[t \longmapsto L\left(x \cdot e^{tX}\right)]$ *est* ***strictement décroissante****,*

on dit alors que L *est une* ***fonction de Liapounov locale stricte****.*

Théorème 4.2 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*. Soit* $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *un champ de vecteur autonome localement lipschitzien et soit* $a \in \Omega$ *un point d'équilibre. Supposons qu'il existe un voisinage* U *de* a *et une fonction de Liapounov locale* $L \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ *pour* a*. Alors*

(a) a *est un point d'équilibre stable.*

(b) si, de surcroît, L *est une fonction de Liapounov locale* ***stricte****, alors* a *est localement asymptotiquement stable.*

Remarque — Pour démontrer la partie (b) de ce résultat, nous aurons besoin d'utiliser le fait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $[x \longmapsto x \cdot e^{tX}]$ est continue. Ce sera l'objet d'un résultat présenté un peu plus loin.

Démonstration du théorème 4.2 — Sans perte de généralité, on peut supposer que le voisinage U de a sur lequel L est définie est une boule fermée $\bar{B}(a, r)$, où $r > 0$. En particulier U est alors *compact*. Pour tout $\eta > 0$, notons

$$U_\eta := \{x \in U\,;\, L(x) < \eta\}$$

Notons que ∂U, le bord de U, est également compact et donc $\eta_{\partial U} := \min\{L(x)\,;\, x \in \partial U\} > 0$. Nous remarquons également que U_η est toujours un voisinage de a, de surcroît ouvert si $\eta < \eta_{\partial U}$.

L'idée, très simple mais extrêmement puissante, à la base de la preuve est que, d'après la condition (ii) dans la définition d'une fonction de Liapounov,

$$\forall x \in U, \quad x \in U_\eta \implies [\forall t \geq 0,\ x \cdot e^{tX} \in U_\eta]$$

Nous allons donc exploiter cette propriété. Nous pouvons déjà remarquer que celle-ci entraîne que, si $\eta < \eta_{\partial U}$ et si $x \in U_\eta$, la solution $x \cdot e^{tX}$ ne peut pas sortir du compact $\overline{U_\eta} \subset U$ et est donc définie pour tout $t \geq 0$.

(a) Nous établissons (a). Nous commençons par montrer que (notant $B(a, \varepsilon)$ la boule ouverte de rayon ε)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \quad U_\eta \ \subset\ B(a, \varepsilon) \tag{1}$$

Nous raisonnons par l'absurde : supposons que (1) ne soit pas vrai. Alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0, \quad U_\eta \ \cap\ (U \setminus B(a, \varepsilon)) \neq \emptyset$$

Pour une valeur de ε satisfaisant ce qui précède, nous sommes donc capables de construire une suite de réels strictement positifs $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui tend vers 0 et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans $U \setminus B(a, \varepsilon)$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in U_{\eta_n}$. Comme $U \setminus B(a, \varepsilon)$ est compact, nous pouvons extraire une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $U \setminus B(a,\varepsilon)$ et donc, sans perte de généralité, supposer que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x} \in \ U \setminus B(a,\varepsilon).$$

Cela entraîne, en utilisant le fait que L est continue, que

$$\lim_{n\to+\infty} L(x_n) = L(\bar{x}) \tag{2}$$

Mais par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in U_{\eta_n} \quad \Longleftrightarrow \quad L(x_n) < \eta_n$$

et donc (puisque U ne prend que des valeurs positives ou nulles), $\lim_{n\to+\infty} L(x_n) = 0$. Donc, à cause de (2), $L(\bar{x}) = 0$. En utilisant la propriété (i) dans la définition d'une fonction de Liapounov, on en déduit que $\bar{x} = a$, c'est une contradiction, puisque $\bar{x} \in U \setminus B(a,\varepsilon)$. Donc (1) est vrai.

Nous pouvons à présent prouver la stabilité de a : $\forall\varepsilon > 0$, grâce à (1), $\exists\eta > 0$ tel que $U_\eta \subset B(a,\varepsilon)$. Comme U_η est aussi un voisinage de a, $\exists\alpha > 0$ tel que $B(a,\alpha) \subset U_\eta$. Donc, $\forall x \in U$,

$$x \in B(a,\alpha) \implies x \in U_\eta \implies [\forall t \geq 0,\ x\cdot e^{tX} \in U_\eta] \implies [\forall t \geq 0,\ x\cdot e^{tX} \in B(a,\epsilon)]$$

D'où la stabilité.

(b) Montrons à présent (b). Soit η tel que $0 < \eta < \eta_{\partial U}$ et une valeur $x \in U_\eta$ fixée. D'une part, nous considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & t & \longmapsto & L(x\cdot e^{tX}) \end{array}$$

Comme L est une fonction de Liapounov, h est décroissante, et comme elle minorée par 0, elle converge : $\exists\ell \in [0,+\infty[$, $\ell = \lim_{t\to+\infty} h(t)$.

D'autre part, comme, pour $t \geq 0$, $x\cdot e^{tX}$ prend ses valeurs dans le compact U, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et il existe $\bar{x} \in U$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} x\cdot e^{t_nX} = \bar{x}$$

Nous allons montrer que, $\forall s \geq 0$, $L(\bar{x}\cdot e^{sX}) = \ell$.

Pour tout $s \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x\cdot e^{(t_n+s)X} = \left(x\cdot e^{t_nX}\right)\cdot e^{sX}$, donc, en utilisant le fait que $[z \longmapsto z\cdot e^{sX}]$ est continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} x\cdot e^{(t_n+s)X} = \left(\lim_{n\to+\infty} x\cdot e^{t_nX}\right)\cdot e^{sX} = \bar{x}\cdot e^{sX}$$

On en déduit donc, puisque L est continue, que

$$\ell = \lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{n\to+\infty} h(t_n+s) = \lim_{n\to+\infty} L\left(x\cdot e^{(t_n+s)X}\right) = L(\bar{x}\cdot e^{sX})$$

Donc, $[s \longmapsto L(\bar{x} \cdot e^{sX})]$ est une fonction constante. À ce point, nous utilisons l'hypothèse que L est strictement Liapounov : celle-ci implique que $\bar{x} = a$. Donc $\ell = L(\bar{x}) = 0$.

Nous pouvons maintenant conclure que $\lim_{t\to+\infty} x \cdot e^{tX} = a$: pour tout $\varepsilon > 0$, d'après (1), il existe $\eta > 0$ tel que $U_\eta \subset B(a,\varepsilon)$. Comme $\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$, il existe $T >$ tel que, $\forall t \geq T$, $L(x \cdot e^{tX}) < \eta$, ce qui équivaut à $x \cdot e^{tX} \in U_\eta$ et entraîne donc que $x \cdot e^{tX} \in B(a,\varepsilon)$. $\square$

4.5 Etude d'un exemple

Un pendule est constitué d'une masse suspendue par un fil (ou une tige rigide) à un point fixe. Il oscille librement dans un plan vertical, en étant soumis à la force de gravitation. Dans une situation idéalisée, dans laquelle on néglige les forces de frottements et on repère la configuration du pendule à un instant t par l'angle $\theta(t)$ que fait le fil avec la direction verticale vers le bas, on peut modéliser le mouvement du pendule par l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin\theta = 0$$

dans laquelle les constantes physiques ont été absorbées par diverses normalisations.

Nous nous ramenons à un système du premier ordre en posant

$$y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

et en introduisant le champ de vecteur $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ défini par

$$X(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -\sin x^1 \end{pmatrix}$$

Alors θ est solution de l'équation du pendule ssi y est solution de $\frac{dy}{dt} = X(y)$.

Les points d'équilibre de X sont $(2k\pi, 0)$ et $(\pi + 2k\pi, 0)$, où $k \in \mathbb{Z}$. Comme X est 2π-périodique par rapport à la variable x^1, il suffit d'étudier le comportement des courbes intégrales aux voisinages de $(0,0)$ et $(\pi, 0)$. La linéarisation de X au voisinage de $(0,0)$ est donnée par

$$dX_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\pm i$, elles sont de partie réelle : *on ne peut donc rien déduire de la linéarisation de X en* $(0,0)$. En revanche la linéarisation de X au voisinage de $(\pi, 0)$ est donnée par

$$dX_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont ± 1. L'une d'elle est strictement positive, donc cet équilibre est instable. Un vecteur propre pour la valeur propre 1 est $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur propre pour la valeur propre -1 est $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'existence d'une fonction de Liapounov particulière s'avère particulièrement utile dans ce cas. Celle-ci est connue en physique depuis très longtemps : revenons à l'équation du pendule et multiplions de chaque côté par $\frac{d\theta}{dt}$, nous obtenons

$$0 = \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\sin\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \cos\theta\right)$$

Nous en déduisons que la quantité $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos\theta$ est conservée le long d'une trajectoire. Cette quantité n'est rien d'autre que l'énergie totale du système, le premier terme correspondant à l'énergie cinétique, le second à l'énergie potentielle.

La traduction de cette observation pour le système du premier ordre est que la fonction $L \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $L(x) = 1 - \cos x^1 + \frac{1}{2}(x^2)^2$ est une fonction de Liapounov pour le champ de vecteur X. Celle-ci est particulière car on a $\frac{dL\circ y}{dt} = 0$, pour toute solution y de $\frac{dy}{dt} = X(y)$. Une conséquence est que l'image $\{y(t)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ est contenue dans une courbe de niveau de la fonction L. Nous en déduisons que les points $(2k\pi, 0)$ sont des équilibres stables, mais non asymptotiquement stables.

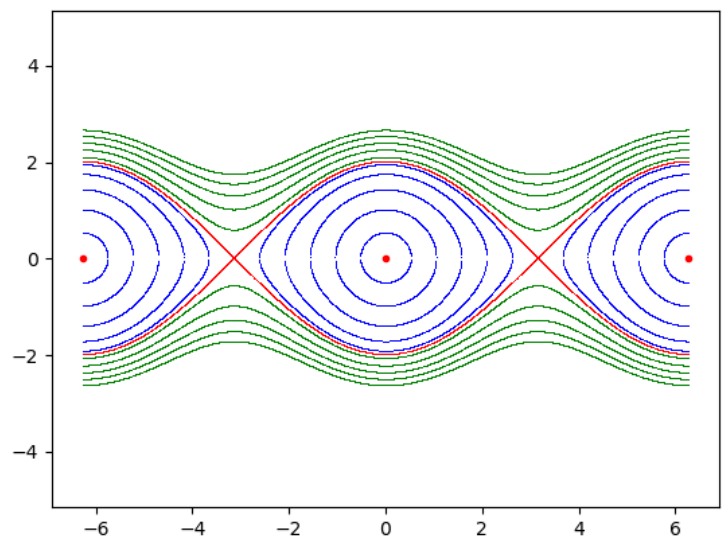

FIGURE 1 – Portrait de phase pour l'équation du pendule : les courbes représentent des lignes de niveau $L^h = L^{-1}(\{h\})$. Les points rouges $(-2\pi, 0)$, $(0, 0)$ et $(2\pi, 0)$ sont dans L^0 et correspondent à des équilibres stables. Les courbes bleues sont des composantes connexes de L^h, pour $0 < h < 2$ et sont compactes. La courbe rouge est L^1 et est l'union des points d'équilibres instables $(\pi + 2k\pi, 0)$ et des courbes intégrales qui joignent ces points. Les courbes vertes sont dans L^h pour $h > 1$ et correspondent à des trajectoires non compactes.