Équations différentielles
Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], janvier–avril 2021

Mardi 6 avril 2021

5 Flot d'un champ de vecteur autonome

5.1 Ensemble de vie et flot d'un champ de vecteur

Nous considérons un champ de vecteur autonome $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, défini sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et localement lipschitzien. Grâce au théorème de Cauchy–Lipschitz nous savons que, pour chaque $x \in \Omega$, il existe une unique solution locale $t \longmapsto y(t) = x \cdot e^{tX}$ de l'équation $\frac{dy}{dt} = X(y)$ avec la condition initiale $y(0) = x$. De plus nous pouvons étendre cette solution à un intervalle maximal $I^{max}(x) \subset \mathbb{R}$, et ce, de façon unique. Cela nous permet de donner la définition suivante.

Définition 5.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur localement lipschitzien. L'**ensemble de vie** de X est le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \Omega$ défini par*

$$\Delta_X := \{(t, x)\,;\, x \in \Omega, t \in I^{max}(x)\}$$

Une traduction directe du théorème de Cauchy–Lipschitz est le résultat suivant.

Proposition 5.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur localement lipschitzien. Alors*

(i) $\{0\} \times \Omega \subset \Delta_X$ *;*

(ii) Δ_X *est un ouvert de* $\mathbb{R} \times \Omega$.

Il est alors naturel de définir l'application suivante.

Définition 5.2 *Sous les hypothèses précédentes, le **flot du champ de vecteur** X est l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \Delta_X & \longrightarrow & \Omega \\ & (t,x) & \longmapsto & \Phi(t,x) = x \cdot e^{tX} \end{array} \qquad (1)$$

Exemples — 1) Si $X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, localement lipschitzienne, est linéaire ou, plus généralement, à croissance sous-linéaire, alors les solutions maximales du problème de Cauchy sont définies pour tout temps et donc $\Delta_X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
2) Si $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est défini par $X(x) = x^2$, l'ensemble de vie est $\Delta_X = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2\,;\, tx < 1\}$.

La proposition suivante justifie la notation $\Phi(t, x) = x \cdot e^{tX}$ et établit que la famille de bijections $(\Phi(t, \cdot))_{t\in\mathbb{R}}$ a une structure de *pseudogroupe*.

1. Université de Paris, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Proposition 5.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et soit $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur localement lipschitzien. Alors*

(i) $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \Omega$ tels que $(t, x) \in \Delta_X$,

$$(t + s, x) \in \Delta_X \quad \Longleftrightarrow \quad (s, \Phi(t, x)) \in \Delta_X$$

et, si cette condition est réalisée,

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(s, \Phi(t, x)) \tag{2}$$

(ii) $\forall (t, x) \in \Delta_X$, $(-t, \Phi(t, x)) \in \Delta_X$ et

$$\Phi(-t, \Phi(t, x)) = x. \tag{3}$$

Démonstration — La preuve de (2) s'obtient en remarquant que $[s \longmapsto \Phi(t + s, x)]$ et $[s \longmapsto \Phi(s, \Phi(t, x))]$ sont tous les deux solutions de l'équation $\frac{du}{ds}(s) = X(u(s))$, avec la condition de Cauchy $u(0) = \Phi(t, x)$ et en appliquant le théorème d'unicité de Cauchy–Lipschitz. L'identité (3) s'obtient à partir de (2) en choisissant $s = -t$. $\square$

Nous savons que, pour tout $x \in \Omega$ **fixé**, l'application $[t \longmapsto \Phi(t, x)]$ est $\mathcal{C}^1$, mais nous n'avons pas encore démontré de résultat concernant la continuité de $\Phi(t, x)$ en fonction de x.

Dans le prochain paragraphe nous allons montrer que Φ est toujours une fonction continue sur Δ_X, c'est à dire que $\Phi(t, x)$ dépend continuement du couple (t, x). Ce résultat est nécessaire pour compléter la preuve du théorème que nous avons montré précédemment, dans lequel nous avons établi la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre pour un champ de vecteur autonome admettant une fonction de Liapounov stricte.

5.2 Continuité en fonction de la condition initiale

5.2.1 Résultat local

Théorème 5.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur autonome localement lipschitzien en espace. Alors, $\forall x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage I_0 de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage $\mathcal{O}_0$ de x_0 dans Ω, tels que Φ soit* ***continue*** *sur $I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}$.*

Si $k \in \mathbb{N}$, si X est de classe $\mathcal{C}^k$ et si les dérivées partielles de X d'ordre k sont localement lipschitziennes, alors Φ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration — Nous procédons en améliorant la preuve du théorème de Cauchy–Lipschitz déjà vue. Nous cherchons I_0, $\mathcal{O}_{x_0}$ et $\Phi : I_0 \times \mathcal{O}_{x_0} \longrightarrow \Omega$, tels que

$$\forall x \in \mathcal{O}_{x_0}, \quad \Phi(0, x) = x \quad \text{et} \quad \forall (t, x) \in I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = X(\Phi(t, x))$$

Ces deux conditions se traduisent sous la forme d'une équation intégrale :

$$\forall (t, x) \in I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}, \quad \Phi(t, x) = x + \int_0^t X(\Phi(s, x)) ds \tag{4}$$

En posant $\Phi(t,x) = x + z(t,x)$ la formulation obtenue ci-dessus s'écrit $z(t,x) = \int_0^t X(x + z(s,x))ds$ et s'interprète sous la forme d'une relation $z = T[z]$, où $T[z]$ est l'application $(t,x) \longmapsto \int_{t_0}^t X(s, x + z(s,x))ds$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, notons $I_\varepsilon =]-\varepsilon, \varepsilon[$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha > 0$, $B^n(x,\alpha) := \{x' \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x' - x\| < \alpha\}$.

L'hypothèse que X est localement lipschitzienne nous permet d'affirmer qu'il existe $r > 0$ et une constante $C = C(x_0) > 0$ tels que :

$$\forall x, x' \in B(x_0, 2r), \quad \|X(x') - X(x)\| \leq C\|x' - x\| \tag{5}$$

Par ailleurs, X étant localement lipschitzienne, elle est continue, donc en particulier bornée sur tout compact. Donc il existe $\mathsf{V} > 0$ (comme *vitesse maximale*) tel que

$$\forall x \in B(x_0, 2r), \quad \|X(x)\| \leq \mathsf{V} \tag{6}$$

Pour une valeur de ε que nous fixerons ultérieurement, nous considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I_\varepsilon \times B^n(x_0,r), \mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|z\|_\infty := \sup\{\|z(t,x)\| \,;\, (t,x) \in I_\varepsilon \times B^n(x_0,r)\}$. Nous notons

$$\mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r) := \{z \in \mathcal{C}^0(I_\varepsilon \times B^n(x_0,r), \mathbb{R}^n) \,;\, \|z\|_\infty \leq r\}$$

la boule fermée de centre 0 et de rayon r dans $(\mathcal{C}^0(I_\varepsilon \times B^n(x_0,r), \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$.

Nous considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r) & \longmapsto & \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r) \\ & z & \longmapsto & \left[T[z] : (t,x) \longmapsto \int_0^t X(x + z(s,x))ds\right] \end{array}$$

Nous commençons par chercher une condition suffisante sur ε pour que cette application soit bien définie et qu'elle applique bien $\mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r)$ dans $\mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r)$:

— d'abord nous remarquons que, $\forall z \in \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r)$, $\forall (s,x) \in I_\varepsilon \times B^n(x_0,r)$, la quantité $x + z(s,x)$ est dans $B(x_0, 2r)$:

$$\|x + z(s,x) - x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|z(s,x)\| \leq r + r$$

Nous pouvons donc appliquer (6) avec $x + z(s,x)$.

— nous avons ainsi $\forall z \in \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(0,r)$, $\forall (s,x) \in I_\varepsilon \times B^n(0,r)$, $\|X(x + z(s,x))\| \leq \mathsf{V}$ et donc, $\forall t \in I_\varepsilon$, $\|T[z](t,x)\| \leq \mathsf{V}|t| < \mathsf{V}\varepsilon$. Donc si nous choisissons $\varepsilon \leq \frac{r}{\mathsf{V}}$, alors $T[z]$ est bien contenu dans $\mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(0,r)$.

Ensuite nous cherchons une condition supplémentaire que pour T soit contractante :

— d'après (5), nous avons, $\forall z, z' \in \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r)$,

$$\forall (t,x) \in I_\varepsilon \times B^n(x_0,r), \quad \|T[z'](t,x) - T[z](t,x)\| \leq C\varepsilon \; \|z' - z\|_\infty$$

Il suffit donc de choisir $\varepsilon < 1/C$.

En conclusion, en choisissant $\varepsilon < \min\{\frac{r}{\mathsf{V}}, \frac{1}{C}\}$, l'application T est bien définie et est contractante. Comme la boule $\mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r)$ est fermée dans un espace de Banach, il existe un unique $z \in \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r)$ tel que $T[z] = z$. Donc Φ définie par $\Phi(t,x) = x + z(t,x)$ est bien une solution de (4) et est une fonction continue de (t,x) [2].

Dans le cas où X est $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 1$, et où les dérivées partielles de X d'ordre k sont localement lipschitziennes, la preuve s'obtient par une méthode similaire en remplaçant $\mathcal{C}^0(I_\varepsilon \times B^n(x_0,r), \Omega)$ par $\mathcal{C}^k(I_\varepsilon \times B^n(x_0,r), \Omega)$. □

Proposition 5.3 *Quitte à changer $I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}$ en un voisinage plus petit, il est possible de s'assurer que la restriction de Φ à $I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}$ est un **homéomorphisme** vers son image.*

Démonstration — Considérons

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \Delta_X & \longrightarrow & \Psi(\Delta_X) \subset \mathbb{R} \times \Omega \\ & (t,x) & \longmapsto & (t, \Phi(t,x)) \end{array} \tag{7}$$

Nous remarquons que la bijection inverse de Ψ est $\Psi^{-1} : (t,y) \longmapsto (t, \Phi(-t,y))$. Nous déduisons du théorème précédent qu'il existe $I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}$ tel que $\Psi|_{I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}}$ est continue. Nous pouvons choisir I_0 symétrique par rapport à 0, de sorte que $\Psi^{-1}|_{I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}}$ est aussi continue.

Alors l'image inverse par Ψ de l'ouvert $I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}$ est un ouvert contenant $(0, x_0)$ et donc il existe un voisinage I_0' de 0 et un voisinage $\mathcal{O}_{x_0}'$ de x_0, tels que $I_0' \times \mathcal{O}_{x_0}' \subset (I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}) \cap \Psi^{-1}(I_0 \times \mathcal{O}_{x_0})$. Ainsi :

— comme $I_0' \times \mathcal{O}_{x_0}' \subset I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}$, $\Psi|_{I_0' \times \mathcal{O}_{x_0}'}$ est continue ;

— comme $\Psi(I_0' \times \mathcal{O}_{x_0}) \subset I_0 \times \mathcal{O}_{x_0}$, $\left(\Psi|_{I_0' \times \mathcal{O}_{x_0}'}\right)^{-1} = \Psi^{-1}|_{\Psi(I_0' \times \mathcal{O}_{x_0})}$ est aussi continue.

□

5.2.2 Résultat global

Dans cette section nous montrons le théorème qui suit. Il ne sera pas demandé de retenir sa démonstration, qui suit et qui est assez complexe.

2. Il est possible d'établir une version plus générale du théorème 5.1, valable pour un champ de vecteur *non autonome* $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$, où $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Pour tout $(t_0, x_0) \in U$ on note I_0 un voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ et on considère

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & I_0 \times I_0 \times \mathcal{O}_{x_0} & \longrightarrow & \Omega \\ & (t_1, t_2, x) & \longmapsto & \Psi(t_1, t_2, x) \end{array}$$

qui est solution de $\frac{\partial \Psi}{\partial t_0}(t_1,t_2,x) = X(t_2, \Psi(t_1,t_2,x))$, avec la condition $\Psi(t_1,t_1,x) = x$. La preuve est alors totalement similaire à celle du théorème 5.1 en traduisant les relations satisfaites par Ψ sous la forme $\Psi(t_1,t_2,x) = x + \int_{t_1}^{t_2} X(s, \Psi(t_1,s,x))ds$. Une solution locale continue de cette équation est obtenue en considérant l'espace $\mathcal{C}^0(I_\varepsilon \times I_\varepsilon \times B^n(x_0,r), \mathbb{R}^n)$ et en cherchant un point fixe de l'application

$$\begin{array}{rccc} T : & \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r) & \longmapsto & \mathsf{B}_{\mathcal{C}^0}(r) \\ & z & \longmapsto & \left[T[z] : (t_1,t_2,x) \longmapsto \int_{t_1}^{t_2} X(s, x + z(t_1,s,x))ds\right] \end{array}$$

Théorème 5.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur autonome localement lipschitzien. Soit $\Phi : \Delta_X \longrightarrow \Omega$ définie par (1). Alors Φ est continue.*

Si $k \in \mathbb{N}$, si X est de classe $\mathcal{C}^k$ et si les dérivées partielles de X d'ordre k sont localement lipschitziennes, alors Φ est de classe $\mathcal{C}^k$.

En préliminaire à la preuve nous commençons par établir un lemme de plomberie.

Lemme 5.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur autonome localement lipschitzien. Soit $x_0, x_1 \in \Omega$ et $t_1 \in]0, +\infty[$.*

Soit $I_0 \subset \mathbb{R}$ et $I_1 \subset \mathbb{R}$ deux intervalles ouverts contenant 0 et soit $\mathcal{O}_0 \subset \Omega$ et $\mathcal{O}_1 \subset \Omega$ deux ouverts contenant respectivement x_0 et x_1. On note $t_1 + I_1 := \{t_1 + t \in \mathbb{R}\,;\, t \in I_1\}$. On suppose que ($\Psi$ étant définie par (7)) :

(i) $t_1 \in I_0$;

(ii) $\Psi(t_1, x_0) = x_1$;

(iii) $\Psi|_{I_0 \times \mathcal{O}_0}$ *et* $\Psi|_{I_1 \times \mathcal{O}_1}$ *sont continues.*

Alors il existe un ouvert $\mathcal{O}_0' \subset \mathcal{O}_0$ contenant x_0 et tel que $\Psi|_{(I_0 \cup (t_1 + I_1)) \times \mathcal{O}_0'}$ soit continue.

Démonstration — Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \chi : & \mathcal{O}_0 & \longrightarrow & \Omega \\ & x & \longmapsto & \Phi(t_1, x) \end{array}$$

et posons $\mathcal{O}_0' := \chi^{-1}(\mathcal{O}_1)$. D'après les hypothèses, χ est continue et $\mathcal{O}_0'$ est un ouvert, contenant x_0 à cause de (ii). Alors Ψ est continue sur $(I_0 \cup (t_1 + I_1)) \times \mathcal{O}_0' = (I_0 \times \mathcal{O}_0') \cup ((t_1 + I_1) \times \mathcal{O}_0')$. En effet :

— Ψ est continue sur $I_0 \times \mathcal{O}_0'$ puisque $I_0 \times \mathcal{O}_0' \subset I_0 \times \mathcal{O}_0$;

— $\Psi|_{(t_1 + I_1) \times \mathcal{O}_0'}$ est la composition des deux applications

$$\begin{array}{ccccc} (t_1 + I_1) \times \mathcal{O}_0' & \longrightarrow & I_1 \times \mathcal{O}_1 & \longrightarrow & \Omega \\ (t, x) & \longmapsto & (t - t_1, \chi(x)) & \longmapsto & \Phi(t - t_1, \chi(x)) \end{array}$$

qui sont chacunes bien définies et continues.

□

Démonstration du théorème 5.2 — Soit $(T, x_0) \in \Delta_X$, nous allons montrer que Φ est continue en (T, x_0). Notons $\gamma(s) = x_0 \cdot e^{sX}$, $\forall s \in [0, T]$, et considérons l'ensemble $\Gamma_{(T, x_0)} := \{(s, \gamma(s))\,;\, s \in [0, T]\} \subset \mathbb{R} \times \Omega$. Cet ensemble est clairement compact car il est l'image de $[0, T]$ par γ, qui est $\mathcal{C}^1$.

Étape 1 — Pour tout $s \in [0, T]$, nous pouvons appliquer le théorème 5.1 et la proposition 5.3 pour affirmer qu'il existe $\varepsilon_s > 0$ et un voisinage U_s de $\gamma(s)$ tels que la restriction de Ψ (définie par (7)) à $]-2\varepsilon_s, 2\varepsilon_s[\times U_s$ soit un homéomorphisme vers son image. De plus, comme γ est continue, quitte à remplacer ε_s par une valeur plus petite, nous pouvons supposer que

$$\forall t \in]-2\varepsilon_s, 2\varepsilon_s[, \quad \gamma(s + t) \in U_s \tag{8}$$

Par ailleurs, de façon évidente, $\forall s \in [0,T]$, $(s,\gamma(s)) \in]s-\varepsilon_s, s+\varepsilon_s[\times U_s$ et donc

$$\Gamma_{(T,x_0)} \subset \bigcup_{s\in[0,T]}]s-\varepsilon_s, s+\varepsilon_s[\times U_s$$

Nous pouvons donc extraire un recouvrement de $\Gamma_{(T,x_0)}$ par une famille d'ouverts

$$(]s_k-\varepsilon_{s_k}, s_k+\varepsilon_{s_k}[\times U_{s_k})_{0\leq k\leq N}$$

où $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = T$ est une suite finie. Nous supposerons que ce recouvrement est optimal, c'est à dire que, si l'on retire un ouvert dans la famille, alors on perd la propriété de recouvrement.

Étape 2 — La propriété (8) implique que, pour tout $\tau \in]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[$,

$$\forall t \in]s_k-\varepsilon_k, s_k+\varepsilon_k[, \quad \gamma(t) \in \Phi(\tau, U_{s_k}) := \{\Phi(\tau,x)\,;\, x \in U_{s_k}\}$$

Car en effet, $\forall \tau \in]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[$ et $\forall t \in]s_k-\varepsilon_k, s_k+\varepsilon_k[$, on a $t = s_k + t'$, où $t' \in]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[$. Donc $t'-\tau \in]-2\varepsilon_s, 2\varepsilon_s[$ et donc (8) entraîne :

$$\Phi(-\tau,\gamma(t)) = \Phi(-\tau,\Phi(s_k+t',x_0)) = \Phi(s_k+t'-\tau,x_0) = \gamma(s_k+t'-\tau) \in U_{s_k}$$

Par ailleurs Ψ est continue sur $(-\tau+]-\varepsilon_k,\varepsilon_k[)\times\Phi(\tau,U_{s_k})$ (où $-\tau+]-\varepsilon_k,\varepsilon_k[\ :=\ ]-\tau-\varepsilon_k, -\tau+\varepsilon_k[$), car $\Psi|_{(-\tau+]-\varepsilon_k,\varepsilon_k[)\times\Phi(\tau,U_{s_k})}$ est égale à la composition des trois applications continues

$$\begin{array}{ccccccc} (-\tau+]-\varepsilon_k,\varepsilon_k[)\times\Phi(\tau,U_{s_k}) & \xrightarrow{\chi_\tau} &]-\varepsilon_k,\varepsilon_k[\times U_{s_k} & \xrightarrow{\Psi} &]-\varepsilon_k,\varepsilon_k[\times\Omega & \to & (-\tau+]-\varepsilon_k,\varepsilon_k[)\times\Omega \\ (t,x) & \mapsto & (t+\tau,\Phi(-\tau,x)) & \mapsto & (t+\tau,\Phi(t,x)) & \mapsto & (t,\Phi(t,x)) \end{array}$$

où χ_τ est continue parce que $\left(\Psi|_{]-\varepsilon_k,\varepsilon_k[\times U_{s_k}}\right)^{-1}$ est continue car $\Psi|_{]-\varepsilon_k,\varepsilon_k[\times U_{s_k}}$ est un homéomorphisme avec son image.

Étape 3 — Nous exploitons l'inclusion $[0,T] \subset \bigcup_{0\leq k\leq N}]s_k-\varepsilon_{s_k}, s_k+\varepsilon_{s_k}[$. Si $N=0$, ce qui signifie que $T \in]-\varepsilon_{s_0},\varepsilon_{s_0}[$, le résultat est immédiat. Sinon, il existe nécessairement $k_1 > 0$ tel que $]-\varepsilon_{s_0},\varepsilon_{s_0}[\cap]s_{k_1}-\varepsilon_{s_{k_1}}, s_{k_1}+\varepsilon_{s_{k_1}}[$ soit non vide. Si $T \in]s_{k_1}-\varepsilon_{s_{k_1}}, s_{k_1}+\varepsilon_{s_{k_1}}[$, on peut ne garder que les deux ouverts correspondant à $k=0$ et $k=k_1$, sinon, cela signifie qu'il existe $k_2 > k_1$ tel que $]-\varepsilon_{s_0}, s_{k_1}+\varepsilon_{s_{k_1}}[\cap]s_{k_2}-\varepsilon_{s_{k_2}}, s_{k_2}+\varepsilon_{s_{k_2}}[$ soit non vide, etc. On sélectionne ainsi une suite de valeurs de k telle que chaque intervalle $]s_k-\varepsilon_{s_k}, s_k+\varepsilon_{s_k}[$ rencontre l'union des précédents.

Sans perte de généralité (en ne gardant que les valeurs de k ainsi sélectionnées), on supposera que, pour tout k tel que $0\leq k<N$, $]s_k-\varepsilon_{s_k}, s_k+\varepsilon_{s_k}[\,\cap\,]s_{k+1}-\varepsilon_{s_{k+1}}, s_{k+1}+\varepsilon_{s_{k+1}}[$ est non vide et donc qu'il existe t_{k+1} dans cette intersection. Notons alors

$$I_k :=]s_k-t_k-\varepsilon_k, s_k-t_k+\varepsilon_k[\quad \text{et} \quad \mathcal{O}_k := \Phi(t_k-s_k, U_{s_k})$$

En appliquant les résultats de l'étape 2 qui précède avec $\tau = t_k - s_k \in]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[$, nous obtenons que

$$\forall t \in t_k + I_k, \quad \Phi(x_0, t) \in \mathcal{O}_k$$

et donc $\Gamma_{(T,x_0)} \subset \bigcup_{0\leq k\leq N}(t_k + I_k) \times \mathcal{O}_k$, et que Ψ est continu sur $I_k \times \mathcal{O}_k$. En notant $x_k := \gamma(t_k)$, la situation est alors la suivante :

— $0 \in I_0$ et $t_1 \in I_0 \cap (t_1 + I_1)$;

— $x_0 \in \mathcal{O}_0$ et $x_1 = \Phi(t_1, x_0) \in \mathcal{O}_1$;

— $\Psi|_{I_0\times\mathcal{O}_0}$ et $\Phi|_{I_1\times\mathcal{O}_1}$ sont continues.

Le lemme 5.1 nous permet de prouver l'existence d'un ouvert $\mathcal{O}'_0$ contenant x_0 tel que $\Phi|_{(I_0\cup(t_1+I_1))\times\mathcal{O}'_0}$ soit continue. Cela permet d'initialiser une récurrence finie qui utilise à chaque étape le fait que, pour tout k,

— $t_k \in t_k + I_k$ et $t_{k+1} \in (t_k + I_k) \cap (t_{k+1} + I_{k+1})$;

— $x_k \in \mathcal{O}_k$ et $x_{k+1} = \Phi(t_{k+1} - t_k, x_k) \in \mathcal{O}_{k+1}$;

— $\Phi|_{I_k\times\mathcal{O}_k}$ et $\Phi|_{I_{k+1}\times\mathcal{O}_{k+1}}$ sont continues.

En utilisant le lemme 5 à chaque itération, on montre ainsi que Φ est continue sur un ouvert de la forme $\left(\bigcup_{0\leq k\leq N}(t_k + I_k)\right) \times \mathcal{O}_0^{(N)}$, où $\mathcal{O}_0^{(N)}$ est un voisinage ouvert de x_0. $\square$

6 Approximations numériques des solutions

Nous abordons ici des questions différentes de tout ce qui précède : nous souhaitons approcher les valeurs prises par la solution d'une équation différentielle via des calculs par ordinateur. Cela nécessite de se ramener à un problème avec un nombre fini de degrés de liberté (alors qu'une équation différentielle est un problème avec un nombre infini de degrés de liberté).

Pour cela on remplace l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ par une suite finie de réels $(t_0, \cdots, t_N)$ telle que

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = t_0 + T$$

On note $h_n := t_{n+1} - t_n$ l'écart entre deux tels instants. On cherche à approcher une solution *exacte* $z \in \mathcal{C}^1([t_0, t_0+T], \Omega)$ de l'équation $\frac{dz}{dt}(t) = X(t, z(t))$ ou, plus précisément, les valeurs $(z(t_0), z(t_0), z(t_2), \cdots, z(t_N))$, par une suite de valeurs

$$(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_N) \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Dans ce qui suit on impose la condition initiale $z(t_0) = x_0 = y_0$.

6.1 L'algorithme d'Euler

Une idée très naturelle est la suivante : supposons que y_n soit suffisamment proche de $z(t_n)$, i.e. $y_n \simeq z(t_n)$, alors

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + z'(t_n)(t_{n+1} - t_n) + o(t_{n+1} - t_n) \simeq y_n + z'(t_n)(t_{n+1} - t_n)$$

mais comme z est une solution de l'équation différentielle $\frac{dz}{dt}(t) = X(t, z(t))$, on peut remplacer $z'(t_n)$ par $X(t_n, z(t_n)) \simeq X(t_n, y_n)$ et donc

$$z(t_{n+1}) \simeq y_n + X(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n)$$

ou, si l'on note $h_n := t_{n+1} - t_n$, pour $0 \leq n \leq N-1$,

$$z(t_{n+1}) \simeq y_n + h_n X(t_n, y_n)$$

On définit ainsi l'**algorithme d'Euler** en construisant deux suites $(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_N) \in \Omega^{N+1}$ et $(t_0, t_1, \cdots, t_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ en partant de la condition initiale (t_0, y_0) et en posant, pour $0 \leq n \leq N-1$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t_{n+1} & = & t_n + h_n \\ y_{n+1} & = & y_n + h_n X(t_n, y_n) \end{array} \right.$$

6.1.1 L'algorithme d'Euler est-il bien défini ?

En particulier, dans l'hypothèse où l'on suppose que X n'est définie (ou bien contrôlée) que sur un domaine $I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, il faut s'assurer qu'aucune valeur (t_n, y_n) s'échappe de ce domaine.

Pour fixer les idées, supposons que X est définie sur $I \times B^n(y_0, r)$, où $I = [0, T]$ et $B^n(y_0, r)$ est la boule de centre y_0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$ et que $\|X(t, x)\| \leq M$, $\forall (t, x) \in I \times B^n(y_0, r)$.

Proposition 6.1 *Soit $I = [0, T]$ et $X \in \mathcal{C}^0(I \times B^n(y_0, r), \mathbb{R}^n)$ (non nécessairement localement lipschitzien en espace). Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, $\forall (t, x) \in I \times B^n(y_0, r)$, $\|X(t, x)\| \leq M$. Alors, si $TM \leq r$, l'algorithme est bien défini.*

Le fait que l'algorithme soit bien défini signifie que les suites (t_n) et (y_n) sont bien définies.
Démonstration — On montre par récurrence sur n que

$$\|y_n - y_0\| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} h_k$$

c'est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire $\|y_{n+1} - y_0\| \leq \|y_{n+1} - y_n\| + \|y_n - y_0\|$ et de $\|y_{n+1} - y_n\| = h_n \|X(t_n, y_n)\| \leq M h_n$. Le corollaire de cette inégalité est que $\|y_n - y_0\| \leq MT$, puisque $\sum_{k=0}^{n-1} h_k \leq \sum_{k=0}^{N-1} h_k = T$, et donc $\|y_n - y_0\| \leq r$. □

6.1.2 L'algorithme d'Euler réalise-t-il une bonne simulation de l'équation différentielle ?

Pour répondre à cette question, il est utile de construire à partir de la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ une application y que l'on puisse comparer avec la solution exacte z. Un moyen simple consiste à imposer à y d'être continue et affine par morceau et de satisfaire $y(t_n) = y_n$, $\forall n$. Cela nous donne :

$$\forall t \in [t_n t_{n+1}], \quad y(t) = y_n + \frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n}(t - t_n)$$

mais puisque y_n est défini par l'algorithme d'Euler (i.e. $y_{n+1} = y_n + h_n X(t_n, y_n)$), cela revient à prendre

$$\forall t \in [t_n t_{n+1}], \quad y(t) = y_n + (t - t_n) X(t_n, y_n)$$

Nous remarquons que y est continue et, en particulier, $\mathcal{C}^1$ par morceau et que, $\forall t \in [t_n t_{n+1}]$, $\frac{dy}{dt}(t) = X(t_n, y_n)$.

Nous pouvons ainsi formuler la question précédente de façon plus précise : y est-elle « proche » de satisfaire l'équation différentielle, autrement dit, est-ce que $\frac{dy}{dt}(t) - X(t, y(t))$ est « petit » ?

Il s'agit donc de savoir à quelle condition la quantité

$$u(t) := \left\| \frac{dy}{dt}(t) - X(t, y(t)) \right\| = \|X(t_n, y_n) - X(t, y(t))\|$$

reste petite, pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Comme la longueur de $[t_n, t_{n+1}]$ est h_n, on pressent qu'une condition suffisante pour que $u(t)$ soit petit est que h_n soit petit et que X soit *uniformément continu*. Nous supposerons donc :

Hypothèse : X est *uniformémement continue.*

Cette hypothèse peut être formulée de façon quantitative en introduisant ce qui suit.

Définition 6.1 (Module de continuité) *Soit $X \in \mathcal{C}^0(I \times B^n(y_0, r), \mathbb{R}^n)$. Le* module de continuité *de X est la fonction $\omega_X :]0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ définie par*

$$\omega_X(\rho) := \sup\{\|X(t,x) - X(t',x')\| \| \ (t,x), (t',x') \in I \times B^n(y_0, r), \|(t,x) - (t',x')\| \leq \rho\}$$

En effet il n'est pas difficile de voir que X *est uniformément continue si et seulement si* $\lim_{\rho \to 0} \omega_X(\rho) = 0$. De plus on a l'inégalité

$$\|X(t,x) - X(t',x')\| \leq \omega_X(\|(t',x') - (t,x)\|).$$

et ainsi, $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$

$$u(t) \leq \omega_X\left(\|(t, y(t)) - (t_n, y_n)\|\right).$$

D'autre part, si $t \in [t_n, t_{n+1}]$,

$$\|y(t) - y_n\| = (t - t_n)\|X(t_n, y_n)\| \leq h_n M.$$

et donc, $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$,

$$\|(t, y(t)) - (t_n, y_n)\| \leq \|t - t_n\| + \|y(t) - y_n\| \leq h_n + h_n M = (M+1) h_n$$

et nous en déduisons que, $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$,

$$u(t) \leq \omega_X\left(\|(t, y(t)) - (t_n, y_n)\|\right) \leq \omega_X((M+1) h_n).$$

Concluons : notons $\bar{h} := \sup(h_n)_{0 \leq n \leq N-1}$. Supposons que $X \in \mathcal{C}^0(I \times B^n(y_0, r))$ est borné ($\|X(t, x\| \leq M$) et uniformément continue, alors

$$\forall t \in I \setminus \{t_0, t_1, \cdots, t_N\}, \quad \left\| \frac{dy}{dt}(t) - X(t, y(t)) \right\| \leq \omega_X((M+1)\bar{h}).$$

Définition 6.2 *Soit $y \in \mathcal{C}^0(I, \Omega)$ une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceau (donc $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus C$, où $C \subset I$ est un sous-ensemble fini) et $\varepsilon > 0$. On dit que y est une solution ε-*approchée de l'équation $\frac{dz}{dt} = X(t, z)$ *si,*

$$\forall t \in I \setminus C, \quad \left\| \frac{dy}{dt}(t) - X(t, y(t)) \right\| \leq \varepsilon$$

En conclusion nous avons montré le résultat suivant.

Proposition 6.2 *Supposons que $\|X\|$ est uniformément borné par $M > 0$ et que X est uniformément continu et soit $\bar{h} := \sup(h_n)_{0 \leq n \leq N-1}$. Alors l'algorithme d'Euler donne des solutions ε-approchées, avec*

$$\varepsilon = \omega_X((M+1)\bar{h}).$$

6.1.3 La solution approchée est-elle proche de la solution exacte ?

Il s'agit de savoir si la solution y fournie par l'algorithme d'Euler approche réellement la solution exacte z de $\frac{dz}{dt} = X(t, z)$.

Proposition 6.3 *Supposons que X est uniformément bornée et uniformément continue sur $I \times \Omega$, où $I = [t_0, t_0 + T]$. Soit $(\varepsilon_{(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$, une suite à valeur dans $]0, +\infty[$ et soit $(y_{(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I, \Omega)$, $\mathcal{C}^1$ par morceau. Supposons que*

(i) $\forall N$, $y_{(N)}$ est une solution $\varepsilon_{(N)}$-approchée de l'équation $\frac{dy}{dt} = X(t, y)$;

(ii) $\lim_{N \to +\infty} \varepsilon_{(N)} = 0$;

(iii) $(y_{(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur I vers $y \in \mathcal{C}^0(I, \Omega)$.

Alors y est $\mathcal{C}^1$ et est solution de $\frac{dy}{dt} = X(t, y)$.

Démonstration — Une idée naïve serait de chercher à passer à la limite dans $\frac{dy_{(N)}}{dt} = X(t, y_{(N)}) + j_{(N)}(t)$, où $j_{(N)}$ est la fonction qui donne l'« erreur » et qui, donc, tend uniformément vers 0 par hypothèse. Mais le problème est que l'on ne peut *rien déduire directement des hypothèses sur la limite de la dérivée* $\frac{dy_{(N)}}{dt}$. Le bon réflexe pour s'en tirer est toujours le même : utiliser l'équation sous sa forme intégrée

$$y_{(N)}(t) - y_{(N)}(t_0) = \int_{t_0}^{t} X(s, y_{(N)}(s))ds + \int_{t_0}^{t} j_{(N)}(s)ds \tag{9}$$

Nous allons alors passer à la limite dans le terme de gauche et dans les deux intégrales à droite.
Par l'hypothèse de convergence uniforme (iii), on sait que

$$y_{(N)}(t) - y_{(N)}(t_0) \longrightarrow y(t) - y(t_0) \quad \text{uniformément sur } I \text{ quand } t \to +\infty$$

Par l'hypothèse (i), on a

$$\left\| \int_{t_0}^{t} j_{(N)}(s)ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \left\| j_{(N)}(s) \right\| ds \leq \int_{t_0}^{t} \varepsilon_{(N)} ds \leq T\varepsilon_{(N)}$$

et donc, par l'hypothèse (ii), $\lim_{N\to+\infty} \left\| \int_{t_0}^{t} j_{(N)}(s)ds \right\| = 0$.
Il ne reste que le terme $\int_{t_0}^{t} X(s, y_{(N)}(s))ds$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^{t} X(s, y_{(N)}(s))ds - \int_{t_0}^{t} X(s, y(s))ds \right\| &\leq \int_{t_0}^{t} \left\| X(s, y_{(N)}(s) - X(s, y(s)) \right\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \omega_X(\|y_{(N)}(s) - y(s)\|)ds \end{aligned}$$

et comme l'intégrand dans cette dernière intégrale tend uniformément vers 0, l'intégrale tend vers 0.

Conclusion : on peut passer à la limite dans la convergence uniforme dans la relation (9) et on obtient

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} X(s, y(s))ds$$

On en déduit que y est $\mathcal{C}^1$ et, en dérivant par rappport à t, que y est solution de $\frac{dy}{dt} = X(t, y)$. $\square$