

Équations différentielles

Cours de L3 par Frédéric Hélein¹, janvier–avril 2021

Mardi 13 avril 2021

6.1.3 La solution approchée est-elle proche de la solution exacte ? (suite et fin)

Nous avons montré à la dernière séance le résultat suivant.

Proposition 6.1 *Supposons que X est uniformément bornée et uniformément continue sur $I \times \Omega$, où $I = [t_0, t_0 + T]$. Soit $(\varepsilon_{(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$, une suite à valeur dans $]0, +\infty[$ et soit $(y_{(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I, \Omega)$, \mathcal{C}^1 par morceau. Supposons que*

(i) $\forall N$, $y_{(N)}$ est une solution $\varepsilon_{(N)}$ -approchée de l'équation $\frac{dy}{dt} = X(t, y)$;

(ii) $\lim_{N \rightarrow +\infty} \varepsilon_{(N)} = 0$;

(iii) $(y_{(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur I vers $y \in \mathcal{C}^0(I, \Omega)$.

Alors y est \mathcal{C}^1 et est solution de $\frac{dy}{dt} = X(t, y)$.

Peut-on s'affranchir de l'hypothèse (iii), que $(y_{(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers y ?

Pour répondre à cette question, rappelons le :

Théorème 6.1 (d'Ascoli, version lipschitzienne) *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts. Soit $(\varphi_N)_{N \in \mathbb{N}}$ une suite équi-lipschitzienne d'applications de X vers Y , c'est à dire telle que :*

$$\exists C > 0, \quad \forall x, x' \in X, \forall N \in \mathbb{N}, \quad d_Y(\varphi_N(x), \varphi_N(x')) \leq C d_X(x, x')$$

Alors il existe une sous-suite $(\varphi_{\alpha(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une application $\varphi \in \mathcal{C}^0(X, Y)$, qui est elle-même C -lipschitzienne.

A l'aide de ce résultat nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 6.2 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné, soit $X \in \mathcal{C}^0(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$. Supposons que X est uniformément bornée et uniformément continue.*

Soit $(\varepsilon_N)_{N \in \mathbb{N}^}$, une suite à valeur dans $]0, +\infty[$ et soit $(y_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I, \Omega)$, \mathcal{C}^1 par morceau. Supposons que*

(i) $\forall N$, y_N est une solution ε_N -approchée de l'équation $\frac{dy}{dt} = X(t, y)$;

(ii) $\lim_{N \rightarrow +\infty} \varepsilon_N = 0$.

Alors il existe une sous-suite $(y_{\alpha(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément vers une limite $z \in \mathcal{C}^0(I, \Omega)$. De plus z est \mathcal{C}^1 et est une solution de $\frac{dz}{dt} = X(t, z)$.

1. Université de Paris, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Démonstration — En raison du résultat précédent, il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite convergente de $(y_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$. En vertu du théorème d'Ascoli, il suffit pour cela de montrer que la suite $(y_{\alpha(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ est équi-lipschitzienne. Nous devons donc évaluer $\|y_N(t') - y_N(t)\|$ en fonction de $|t' - t|$ et uniformément par rapport à N .

En préliminaire, notons que l'hypothèse que X est uniformément bornée se traduit par le fait qu'il existe $M > 0$ tel que $\|X(t, x)\| \leq M, \forall (t, x) \in I \times \Omega$ et l'hypothèse que y_N est une solution ε_N -approchée de $\frac{dy}{dt} = X(t, y)$ par le fait que $j_N(t) := \frac{dy_N}{dt}(t) - X(t, y_N(t))$ est uniformément bornée par ε_N . Nous en déduisons que, $\forall t, t' \in I$ (en supposant ici $t < t'$, sans perte de généralité),

$$\begin{aligned} \|y_N(t') - y_N(t)\| &= \left\| \int_t^{t'} \frac{dy_N}{dt}(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_t^{t'} \left(\frac{dy_N}{dt}(s) - X(s, y_N(s)) \right) ds + \int_t^{t'} X(s, y_N(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_t^{t'} \left\| \frac{dy_N}{dt}(s) - X(s, y_N(s)) \right\| ds + \int_t^{t'} \|X(s, y_N(s))\| ds \\ &\leq \int_t^{t'} \|j_N(s)\| ds + \int_t^{t'} M ds \leq \int_t^{t'} (\varepsilon_N + M) ds \\ &= (\varepsilon_N + M)|t' - t| \end{aligned}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \varepsilon_N = 0$, la suite $(\varepsilon_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est en particulier bornée, ce qui entraîne la conclusion. \square

Un corollaire important est le :

Théorème 6.3 (Cauchy–Peano) *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $X \in \mathcal{C}^0(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$. Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Alors $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists z \in \mathcal{C}^1([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \Omega)$, solution de*

$$\frac{dz}{dt}(t) = X(t, z(t)), \quad \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\quad \text{et} \quad z(t_0) = x_0$$

Démonstration — Avec tout ce que nous connaissons, la démonstration de ce résultat est très simple : nous nous restreignons à un sous-ensemble *compact* $J \times K \subset I \times \Omega$ contenant (t_0, x_0) , de sorte que X est uniformément bornée et uniformément continue sur $J \times K$. Nous utilisons alors l'algorithme d'Euler pour construire une suite $(y_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ de solutions ε_N -approchées, avec $\lim_{N \rightarrow +\infty} \varepsilon_N = 0$ (il suffit par exemple de choisir $h_N = T/N$, où T est la longueur de l'intervalle J). En appliquant le théorème précédent, nous obtenons une sous-suite $(y_{\alpha(N)})_{N \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers la solution z demandée. \square

6.2 Méthodes numériques à un pas

Nous étudions dans la suite des méthodes de résolutions approchées d'équations différentielles plus générales que la méthode d'Euler, fondées sur un algorithme de la forme :

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \\ t_{n+1} &= t_n + h_n \end{cases}$$

où les conditions initiales (t_0, y_0) et la suite des valeurs $(h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$ sont données.
Est également donnée la fonction

$$\Phi : I \times \Omega \times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Ainsi, pour la *méthode d'Euler*, on a $\Phi(t, x, h) = X(t, x)$.

6.2.1 Erreur de consistance

La question réellement importante lorsqu'on fait appel à une méthode numérique pour résoudre de façon approchée une équation différentielle, est de savoir quel est l'écart entre la solution calculée par l'ordinateur et la solution exacte.

Nous commençons par définir le « petit morceau d'erreur » réalisé à chaque étape : supposons (juste pour fixer les idées) que la valeur y_n d'une solution approchée à l'instant t_n coïncide avec la valeur $z(t_n)$ d'une solution exacte z de $\frac{dz}{dt} = X(t, z)$, i.e. $y_n = z(t_n)$. À l'instant suivant $t_{n+1} = t_n + h_n$, les valeurs de ces deux applications sont :

$$z(t_n + h_n), \quad \text{tel que } z(t_n) = y_n \text{ et } \frac{dz}{dt}(t) = X(t, z(t))$$

et

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

Définition 6.1 *La différence entre les deux valeurs*

$$e_n := z(t_n + h_n) - y_{n+1} = z(t_n + h_n) - z(t_n) - h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

est l'erreur de consistance de la méthode définie par Φ .

Définition 6.2 (méthode consistante) *On dit que la méthode est **consistante** si, pour toute solution exacte z , la somme des erreurs de consistance relativement à z tend vers 0 lorsque h tend vers 0 :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N \|e_n\| = 0$$

À titre d'exemple voyons ce que cela donne pour la méthode d'Euler si X est \mathcal{C}^1 . Alors la solution exacte z est \mathcal{C}^2 et on peut écrire le développement de Taylor

$$z(t + h) = z(t) + hz'(t) + \frac{h^2}{2}z''(\tau), \quad \text{où } \tau \in [t, t + h]$$

Soit, puisque z est solution exacte de l'équation différentielle,

$$z(t + h) = z(t) + hX(t, z(t)) + \frac{h^2}{2}z''(c)$$

Donc, en appliquant cela à $(t, h) = (t_n, h_n)$, on obtient $z(t_n + h_n) = z(t_n) + h_n X(t_n, y_n) + \frac{h_n^2}{2} z''(\tau_n)$ et donc

$$e_n = \frac{h_n^2}{2} z''(\tau_n)$$

Ainsi $\|e_n\| = \frac{h_n^2}{2} \|z''(\tau_n)\|$ et, puisque z est \mathcal{C}^2 et donc z'' est bornée sur tout compact, on en déduit que l'erreur de consistance est un $\mathcal{O}(h_n^2)$.

Nous pouvons être plus précis en évaluant z'' : en dérivant par rapport à t les deux membres de l'équation $\frac{dz}{dt}(t) = X(t, z(t))$, on obtient

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial X}{\partial t}(t, z) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^i}(t, z) \frac{dz^i}{dt}$$

et, en réutilisant l'équation différentielle, à savoir $\frac{dz_i}{dt} = X_i(t, z)$, on a

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial X}{\partial t}(t, z) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^i}(t, z) X_i(t, z) = X^{(1)}(t, z(t)),$$

où

$$X^{(1)}(t, x) := \frac{\partial X}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^i}(t, x) X^i(t, x) \quad (1)$$

Donc si $M^{(1)} > 0$ est une constante telle que $\forall (t, x) \in I \times \Omega$, $\|X^{(1)}(t, x)\| \leq M^{(1)}$, on obtient

$$\|e_n\| \leq M^{(1)} \frac{h_n^2}{2}$$

et, si $\bar{h} := \sup\{h_n | 0 \leq n < N\}$, on a donc $\|e_n\| \leq M^{(1)} \frac{\bar{h}^2}{2}$.

6.2.2 Ordre d'une méthode

Définition 6.3 *Considérons une méthode de résolution numérique à un pas définie par une application Φ . On dit que cette méthode est d'ordre p ($p \in \mathbb{N}$) si, pour toute solution exacte z , l'erreur de consistance relativement à la solution exacte z au pas n satisfait*

$$\forall n, 0 \leq n < N, \quad \|e_n\| \leq C \bar{h}^{p+1},$$

pour une constante $C > 0$.

Comme on l'a vu précédemment, la méthode donnée par l'algorithme d'Euler est d'ordre 1. Une question est de savoir s'il existe des méthodes plus précises, c'est dire, dont l'erreur serait d'ordre 2, 3 ou plus.

Une telle méthode peut s'obtenir par exemple en partant du développement de Taylor à l'ordre 2 d'une solution exacte z de l'équation :

$$z(t+h) = z(t) + h z'(t) + \frac{h^2}{2} z''(t) + \frac{h^3}{6} z'''(c), \quad \text{où } c \in]t, t+h[$$

En utilisant la relation $\frac{dz}{dt} = X(t, z)$, la relation $\frac{d^2z}{dt^2} = X^{(1)}(t, z)$ obtenue en dérivant la précédente et, enfin, la relation $\frac{d^3z}{dt^3} = X^{(2)}(t, z)$ (qu'on peut obtenir par le même procédé en dérivant encore une fois), on déduit du développement de Taylor précédent

$$z(t+h) = z(t) + hX(t, z(t)) + \frac{h^2}{2}X^{(1)}(t, z(t)) + \frac{h^3}{6}X^{(2)}(t, z(t))$$

On peut alors choisir d'utiliser les termes de ce développement, à l'exception du dernier, pour concevoir un algorithme pour passer de la valeur y_n (à l'instant t_n) à la valeur y_{n+1} (à l'instant $t_n + h_n$) :

$$y_{n+1} = y_n + h_n X(t_n, y_n) + \frac{h_n^2}{2} X^{(1)}(t_n, y_n)$$

Cela revient à prendre comme algorithme $y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$, avec

$$\Phi(t, x, h) := X(t, x) + \frac{h}{2} X^{(1)}(t, x)$$

On peut démontrer que cet algorithme est d'ordre 2 et, plus précisément, que $\|e_n\| \leq \frac{h_n^3}{6} M^{(2)}$, où $M^{(2)}$ majore uniformément $X^{(2)}$.

En suivant une stratégie similaire (à partir du développement de Taylor d'ordre plus élevé), on peut construire des méthodes d'ordre arbitrairement grand (si X est dérivable un nombre suffisant de fois). Toutefois ces méthodes ne sont pas très intéressantes numériquement car le coût du calcul de Φ devient très grand.