C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, p. 725-730, 1988

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Homéomorphismes quasi conformes entre surfaces riemanniennes

Frédéric HELEIN

Résumé — On montre qu'étant donné un homéomorphisme quasi-conforme u entre deux surfaces riemanniennes, si $(|u_x|^2-|u_y|^2-2i\langle u_x, u_y\rangle)(dz)^2$ est une forme quadratique holomorphe, alors u est harmonique.

Quasi-conformal Homeomorphisms between Riemannian Surfaces

Abstract — *Given a quasi-conformal homeomorphism u between two Riemannian surfaces, we show that if* $(|u_x|^2-|u_y|^2-2i\langle u_x, u_y\rangle)(dz)^2$ *is a holomorphic quadratic form, then u is harmonic.*

Abridged English Version — Let Σ_1 and Σ_2 be two compact Riemannian surfaces without boundary. We use isothermal charts $z=x^1+ix^2$ on Σ_1 and $u=u^1+iu^2$ on Σ_2, the metrics are then $\sigma(z)^2\,dz\,d\bar z$ on Σ_1 and $\rho(u)^2\,du\,d\bar u$ on Σ_2. For any open subset Ω of Σ_1, the energy of a map φ of $H^1(\Sigma_1, \Sigma_2)$ on Ω is $E_\Omega(\varphi)=(1/2)\int_\Omega |\nabla\varphi(z)|^2\,d\Sigma_1$.

We consider a map u of $H^1(\Sigma_1, \Sigma_2)$, and we make the following hypothesis on u: (1) $\omega:=4\rho(u(z))^2 u_z\bar u_z(dz)^2$ is a holomorphic quadratic form, (2) u is quasi-conformal and (3) u is a homeomorphism between Σ_1 and Σ_2. The main result of this paper is

THEOREM. — *If u verifies* (1), (2) *and* (3) *then u is smooth harmonic.*

Proof. — We suppose that ω is not the null form. Indeed in the contrary u would minimize E_{Σ_1} in its homotopy class and would be smooth harmonic because of [5]. In our case, since ω is holomorphic, ω has a finite number of zero. Let z_0 be a point of Σ_1 such that $\omega(z_0)\neq 0$ and B_1 an open ball of Ω such that $\omega(z)\neq 0$ on $\overline{B_1}$. Hence there exists a positive constant C_1 such that $|\nabla u|^2\geqq C_1^2$ a. e. on B_1. Computations using (1) and (2) lead to

$$|(\nabla u)^{-1}|^2\leqq[4/(1-k^2)C^1]^2 \text{ a. e. on } B_1. \tag{5}$$

We will prove that the restriction of u to B_1 minimizes E_{B_1} among maps from B_1 to $B_2=u(B_1)$ which have the same boundary data. Then a result of Morrey [5] ensures the regularity of u on B_1. Let f be in $C^1(B_1, B_2)$ which agrees with u on ∂B_1, let $\eta=u^{-1}\circ f$. We use the following lemma whose proof is evocated at the end of this text.

LEMMA. — *If u verifies* (3), (4) *and* (5) *on* B_1, *then* u^{-1} *is Lipschitz from* B_2 *to* B_1 *and* $\nabla(u^{-1})(v)=[\nabla u(u^{-1}(v))]^{-1}$ *for almost every* v *in* B_2.

This Lemma allows us to apply derivation's rule to $\eta=u^{-1}\circ f$ which gives

$$\nabla f(x)=\nabla u[\eta(x)].\nabla\eta(x) \text{ f. a. e. } x. \tag{6}$$

Let us introduce a holomorphic map g on B_1 such that $\omega=g(z)^2(dz)^2$,

$$h(z)=\int_{z_0}^{z} g(t)\,dt,\quad \theta(z)=\mathbf{Re}(h(z))\quad (\text{so } g(z)=\theta_1-i\theta_2),$$

and

$$H(\nabla u)(z)=[|u_1|^4+|u_2|^4+4\langle u_1, u_2\rangle^2-2|u_1|^2|u_2|^2]^{(1/2)}(z)=(\theta^2+\theta_2^2)(z)\,\sigma(z)^{-2}.$$

Note présentée par Haïm BREZIS.

0249-6291/88/03070725 $ 2.00

Computations using (6) give

$$E_{B_1}(f)=(1/2)\int_{B_1}\lambda(\eta)^2|\nabla\eta|^2 d\Sigma_1+(1/2)\int_{B_1}|\nabla(\theta\circ\eta)|^2 d\Sigma_1,$$

where $\lambda(\eta)^2(s)=(1/2)[|\nabla u(\eta)|^2(s)-H(\nabla u(\eta))(s)]$ belongs to $L^2(B_1)$ for any η. The first integral is graeter or equal than

$$\int_{B_1}\lambda(\eta)^2 \det(\nabla\eta)\,\sigma(\eta(z))^2\sigma(z)^{-2}d\Sigma_1=\int_{B_1}\lambda(Id)^2\det(Id)\,d\Sigma_1.$$

Since θ is real harmonic, the second integral is greater or equal than $(1/2)\int_{B_1}|\nabla(\theta)|^2 d\Sigma_1$. Therefore $E_{B_1}(f)\geqq E_{B_1}(u)$. And this holds too for any f in $H^1(B_1, B_2)$ by density.

We prove that u is smooth harmonic everywhere except where ω vanishes, *i.e.* except on a finite subset of Σ_1. The conclusion of the theorem follows then from Theorem 3.6 in [7]. Q.E.D.

Idea of the proof of the Lemma. — This proof is inspired from [1]. We take a map u in $H^1(B_1, B_2)$ which verifies $|[\nabla u(x)]^{-1}|\leqq C_1$ a.e. on B_1, and with positive Jacobian. The idea is to consider a smooth approximation x_ε of u^{-1} which is given by (8), and to prove that if ε is small enough x_ε is C_1-Lipschitz on any compact subset of B_1 and to conclude by passing to the limit.

Soient Σ_1 et Σ_2 deux surfaces riemanniennes compactes sans bord. On utilise des systèmes de cartes isothermales sur Σ_1 et Σ_2 : Σ_1 est munie des coordonnées complexes $z=x^1+ix^2$ et de la métrique $\sigma(z)^2\,dz\,d\bar z$, et Σ_2 est munie des coordonnées complexes $u=u^1+iu^2$ et de la métrique $\rho(u)^2\,du\,d\bar u$. Pour toute application φ dans $H^1(\Sigma_1, \Sigma_2)$, on note $\varphi^i_\alpha(z)=(\partial/\partial x^\alpha)\,\varphi^i(z)$,

$$\langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle=\rho(\varphi(z))^2\sigma(z)^{-2}\sum_{i=1}^{2}\varphi^i_\alpha(z)\,\varphi^i_\beta(z),\qquad |\varphi_\alpha|^2=\langle\varphi_\alpha, \varphi_\alpha\rangle,$$

$$|\nabla\varphi|^2=\sum_{\alpha=1}^{2}|\varphi_\alpha|^2\qquad\text{et}\qquad d\Sigma_1=\sigma(z)^2\,dz\,d\bar z.$$

Pour tout ouvert Ω inclus dans Σ_1 l'énergie de φ sur Ω est

$$E_\Omega(\varphi)=(1/2)\int_\Omega|\nabla\varphi(z)|^2 d\Sigma_1.$$

On considère u dans $H^1(\Sigma_1, \Sigma_2)$ et on suppose que

(1) $$\begin{aligned}\omega: &=(|u_x|^2-|u_y|^2-2i\langle u_x, u_y\rangle)\,\sigma(z)^2(dz)^2\\ &=4\rho(u(z))^2 u_z\bar u_z(dz)^2\end{aligned}$$

est une forme quadratique holomorphe sur Σ_1,

(2) u est quasi conforme, c'est-à-dire qu'il existe une constante $k<1$ telle que

$$|u_{\bar z}|<k|u_z|\ \text{p.p.}$$

(3) u est un homéomorphisme de Σ_1 vers Σ_2.

Le résultat principal de cette Note est que :

THÉORÈME. — *Si* $u \in H^1(\Sigma_1, \Sigma_2)$ *vérifie* (1), (2) *et* (3), *alors u est harmonique régulière.*

Démonstration. — Nous allons supposer que ω n'est pas identiquement nulle; en effet dans le cas contraire u minimiserait E_{Σ_1} dans la classe d'homotopie de u et d'après [5] serait harmonique régulière. Dans notre cas, comme ω est holomorphe, ω n'a qu'un nombre fini de zéros. Soit z_0 un point de Σ_1 tel que $\omega(z_0) \neq 0$, et soit B_1 une boule ouverte dans Σ_1 contenant z_0 et dont l'adhérence ne rencontre pas $\omega^{-1}(\{0\})$. Un calcul simple montre que (2) implique

$$\rho(u(z))^2 \sigma(z)^{-2} \det(\nabla u) \geqq [(1-k^2)/4] |\nabla u|^2 \text{ p. p.} \tag{4}$$

Comme de plus ω ne s'annule pas sur le compact $\overline{B_1}$, il existe une constante C_1 strictement positive telle que $|\nabla u|^2 \geqq C_1^2$ p. p. sur $\overline{B_1}$. Cette dernière inégalité jointe avec (4) entraîne

$$|(\nabla u)^{-1}|^2 \leqq [4/(1-k^2) C^1]^2 \text{ p. p.} \tag{5}$$

L'idée est de montrer que la restriction de u sur B_1 minimise l'énergie E_{B_1} parmi les applications de B_1 vers $B_2 = u(B_1)$ ayant les mêmes conditions aux bords; ceci suffit à prouver la régularité de u sur B_1 grâce à un résultat de Morrey [5]. Soit $f \in H^1(B_1, B_2)$ coïncidant avec u sur ∂B_1; en régularisant f on peut en fait supposer f de classe C^1 sur $\overline{B_1}$; et soit $\eta = u^{-1} \circ f$. Nous allons utiliser le lemme suivant dont la preuve, inspirée de [1], se trouve à la fin de cette Note.

LEMME. — *Si u vérifie* (3), (4) *et* (5) *sur* B_1, *alors* u^{-1} *est lipschitzienne de* $B_2 = u(B_1)$ *vers* B_1, *et* $\nabla(u^{-1})(v) = [\nabla u(u^{-1}(v))]^{-1}$ *pour presque tout* v *dans* B_2.

u^{-1} étant lipschitzienne et f de classe C^1 sur $\overline{B_1}$, $\eta = u^{-1} \circ f$ sera lipschitzienne sur B_1; de plus on peut appliquer la règle de dérivation à $\eta = u^{-1} \circ f$, ce qui donne

$$\nabla \eta(x) = \nabla(u^{-1})(f(x)) . \nabla f(x) \text{ p. p. t. } x$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \nabla u[u^{-1}(f(x))] . \nabla \eta(x) \\ &= \nabla u[\eta(x)] . \nabla \eta(x) \text{ p. p. t. } x. \end{aligned} \tag{6}$$

Évaluons $E_{B_1}(f)$ en utilisant (6) :

$$\begin{aligned} E_{B_1}(f) &= (1/2) \int_{B_1} |\nabla(u \circ \eta)|^2 d\Sigma_1 \\ &= (1/2) \int_{B_1} [|u_1|^2(\eta(z)) |\nabla \eta^1|^2 + |u_2|^2(\eta(z)) |\nabla \eta^2|^2 \\ &\qquad + 2[\langle u_1, u_2 \rangle(\eta(z))] \langle \nabla \eta^1, \nabla \eta^2 \rangle] d\Sigma_1. \end{aligned}$$

Comme ω est holomorphe et ne s'annule pas sur B_1, il existe une fonction holomorphe g sur B_1 telle que $\omega = g^2 (dz)^2$. Si on pose

$$h(z) = \int_{z_0}^{z} g(t)\, dt, \qquad \text{et} \qquad \theta(z) = \mathbf{Re}(h(z)),$$

alors $g(z) = \theta_1 - i\theta_2$, et θ est harmonique réelle sur B_1. On pose également

$$H(\nabla u)(z) = [|u_1|^4 + |u_2|^4 + 4\langle u_1, u_2 \rangle^2 - 2|u_1|^2 |u_2|^2]^{(1/2)}(z) = (\theta^2 + \theta_2^2)(z) \sigma(z)^{-2}.$$

On a :

$$
\begin{aligned}
E_{B_1}(f)=(1/4)\int_{B_1} & [|\nabla u|^2(\eta(z))-H(\nabla u)(\eta(z))]\,|\nabla\eta^2]\,d\Sigma_1 \\
& +(1/4)\int_{B_1}[(|u_1|^2-|u_2|^2+H(\nabla u))\,|\nabla\eta^1|^2 \\
& +(|u_2|^2-|u_1|^2+H(\nabla u))\,|\nabla\eta^2|^2 \\
& +4\langle u_1, u_2\rangle\langle\nabla\eta^1, \nabla\eta^2\rangle]\,d\Sigma_1. \\
& =(1/2)\int_{B_1}\lambda(\eta)^2\,|\nabla\eta|^2\,d\Sigma_1+(1/2)\int_{B_1}|\nabla(\theta\circ\eta)|^2\,d\Sigma_1.
\end{aligned}
$$

Ici $\lambda(\eta)^2(s)=(1/2)[|\nabla u(\eta)|^2(s)-H(\nabla u(\eta))(s)]$ est bien défini p. p. et $\lambda(\eta)$ appartient à $L^2(B_1)$ pour tout η. La première intégrale est supérieure ou égale à $\int_{B_1}\lambda(\eta)^2\det(\nabla\eta)\,\sigma(\eta(z))^2\,\sigma(z)^{-2}\,d\Sigma_1$, qui est égale à $\int_{B_1}\lambda(\mathrm{Id})^2\det(\mathrm{Id})\,d\Sigma_1$ car η est lipschitzienne. Comme θ est harmonique réelle et que η coïncide avec Id sur ∂B_1, la seconde intégrale est supérieure à $(1/2)\int_{B_1}|\nabla(\theta)|^2\,d\Sigma_1$. On peut donc conclure que

$$E_{B_1}(f)\geqq E_{B_1}(u).$$

Nous avons prouvé que u était régulière en tout point où ω ne s'annule pas, donc que u est harmonique en dehors de l'ensemble fini $\omega^{-1}(\{0\})$. La conclusion du théorème s'obtient donc en utilisant le théorème 3.6 de [7]. C.Q.F.D.

Preuve du lemme. — Soit $u\in H^1(B_1, B_2)$ un homéomorphisme vérifiant $|[\nabla u(x)]^{-1}|\leqq C_1$ p. p. sur B_1, et dont le jacobien est positif presque partout. Pour toute fonction ψ strictement positive, C^∞ à support compact dans B_2, de masse $\int_{B_2}\psi(v)\,dv$ égale à 1, la formule suivante

$$\text{degré}\,(u, B_1)=1=\int_{B_1}\psi(u(z))\det(\nabla u(z))\,dz\,d\bar{z}, \tag{7}$$

bien connue si u est C^1 (*cf.* [6]), s'étend par densité lorsque $u\in H^1\cap C^0$. On définit une suite de fonctions x_ε dans $C^\infty(B_2, B_1)$ par

$$x_\varepsilon(v)=\int_{B_1}\psi_\varepsilon(v-u(y))\,y\det(\nabla u(y))\,dy\,d\bar{y} \tag{8}$$

où ψ_ε est une fonction positive ou nulle, de classe C^∞ à support strictement contenu dans $B(0, \varepsilon)$, et de masse égale à 1. Alors x_ε est C^∞ et

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_\varepsilon^\alpha(v)}{\partial v^i} &= \int_{B_1}\psi_{\varepsilon, i}(v-u(y))\,y^\alpha\det(\nabla u(y))\,dy\,d\bar{y} \\
&= -\int_{B_1}\frac{\partial}{\partial y^\beta}[\psi_\varepsilon(v-u(y))]\,(\mathrm{adj}\,[\nabla u(y)])_i^\beta\,y^\alpha\,dy\,d\bar{y}.
\end{aligned}
$$

Ici adj $[\nabla u(y)]$ est la transposée de la comatrice de $\nabla u(y)$. Utilisons provisoirement une approximation C^∞, u_r, de u qui tend vers u dans $H^1\cap C^0$ lorsque r tend vers 0.

Remarquant que $\partial/\partial y^\beta (\operatorname{adj}[\nabla u_r(y)])_i^\beta = 0$, on a

$$(9)\quad \frac{\partial}{\partial y^\beta}[\psi_\varepsilon(v-u_r(y))(adj[\nabla u_r(y)])_i^\beta y^\alpha]$$

$$=(\operatorname{adj}[\nabla u_r(y)])_i^\beta y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\beta}[\psi_\varepsilon(v-u_r(y))]+\psi_\varepsilon(v-u_r(y))(\operatorname{adj}[\nabla u_r(y)])_i^\alpha.$$

Pour tout compact K intérieur à B_2, on choisit ε tel que l'adhérence de $B(K, \varepsilon)=\{w\in\Sigma_2 \mid d(w, K)<\varepsilon\}$ soit contenu dans B_2; alors il existe toujours un r suffisamment petit pour que $\psi_\varepsilon(v-u_r(y))=0$ lorsque v appartient à K et y appartient à un voisinage de ∂B_1 dans B_1. D'où en intégrant (9) sur B_1 lorsque v appartient à K

$$-\int_{B_1}\frac{\partial(\psi_\varepsilon(v-u_r(y)))}{\partial y^\beta}(\operatorname{adj}[\nabla u_r(y)])_i^\beta y^\alpha\, dy\, d\bar{y}=\int_{B_1}\psi_\varepsilon(v-u_r(y))(\operatorname{adj}[\nabla u_r(y)])_i^\alpha\, dy\, d\bar{y}$$

et en passant à la limite lorsque r tend vers 0,

$$\frac{\partial x_\varepsilon^\alpha(v)}{\partial v^i}=\int_{B_1}\psi_\varepsilon(v-u(y))(\operatorname{adj}[\nabla u_r(y)])_i^\alpha\, dy\, d\bar{y}$$

$$=\int_{B_1}\psi_\varepsilon(v-u(y))([\nabla u(y)]^{-1})_i^\alpha \det(\nabla u(y))\, dy\, d\bar{y}.$$

D'où l'estimation

$$\left|\frac{\partial x_\varepsilon^\alpha(v)}{\partial v^i}\right|\leqq C_1\int_{B_1}\psi_\varepsilon(v-u(y))\det(\nabla u(y))\, dy\, d\bar{y}=C_1.$$

Donc x_ε est C_1-lipschitzienne sur K lorsque on choisit ε suffisamment petit. Or pour v dans K on va vérifier que $x_\varepsilon(v)$ tend vers $x'=u^{-1}(v)$ lorsque ε tend vers 0. Utilisant (7) et (8),

$$x_\varepsilon(v)-x'=\int_{B_1}\psi_\varepsilon(v-u(y))(y-x')\det(\nabla u(y))\, dy\, d\bar{y}.$$

Mais comme u^{-1} est continu, pour tout $\eta>0$ donné il existe ε_0 tel que si $|u(x')-u(y)|<\varepsilon_0$, alors $|x'-y|<\eta$, donc, lorsque ε est inférieur à ε_0, on a

$$|x_\varepsilon(v)-x'|\leqq\int_{B_1}\psi_\varepsilon(v-u(y))\,\eta\det(\nabla u(y))\, dy\, d\bar{y}=\eta.$$

On a donc montré que x_ε tendait sur tout compact inclus dans B_2 vers u^{-1} et que x_ε était C_1-lipschitzienne sur B_2. Ainsi u^{-1} est C_1-lipschitzienne sur B_2.

C.Q.F.D.

Remarques. — 1. Cette Note résout un problème initialement posé par H. C. J. Sealey dans [8], puis par J. Eells et L. Lemaire dans [3] (5.11).

2. L'application u étudiée dans cette Note est un difféomorphisme harmonique entre deux surfaces riemanniennes. Grâce à un résultat dû à J.-M. Coron et à l'auteur [2], u est en fait une application harmonique minimisante de Σ_1 vers Σ_2.

Je tiens à remercier particulièrement J.-M. Coron pour ses encouragements et ses suggestions, ainsi que J.-P. Bourguignon pous des discussions fructueuses et J. Eells.

Note reçue le 4 juillet 1988, acceptée le 20 septembre 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. M. BALL, Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter, *Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh*, 88 A, 1981, p. 315-328.

[2] J.-M. CORON et F. HELEIN, Harmonic diffeomorphisms, minimizing harmonic maps and rotational symmetry, *Comp. Math.* (à paraître).
preprint.

[3] J. EELLS et L. LEMAIRE, *Another report on harmonic maps*, preprint.

[4] J. JOST, A note on harmonic maps between surfaces, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non lin.*, 2, 1985, p. 397-405.

[5] C. B. MORREY, The problem of Plateau on a Riemannian manifold, *Ann. Math.*, 49, 1948, p. 807-851.

[6] L. NIRENBERG, *Topics in nonlinear functional analysis*, New York, Courant Institute Lecture Notes, 1974.

[7] J. SACKS et K. UHLENBECK, The existence of minimal immersions of 2-spheres, *Ann. of Math.*, 113, 1981, p. 1-24.

[8] H. C. J. SEALEY, Harmonic diffeomorphisms of surfaces, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 949, 1980, p. 140-145.

Centre de Mathématiques, Unité associée au C.N.R.S. n° 169,
École polytechnique, 91128 *Palaiseau Cedex.*