C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 237-240, 1989

Calcul des variations/*Calculus of Variations*

Difféomorphismes harmoniques entre un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et une variété riemannienne

Frédéric HELEIN

Résumé — On montre que tout difféomorphisme harmonique φ entre un ouvert Ω de $\mathbf{R}^3$ et une variété riemannienne est minimisant pourvu qu'en tout point de Ω, la somme des mineurs principaux d'ordre 2 du tenseur énergie-impulsion de la fonctionnelle énergie en φ soit positive ou nulle. En particulier ceci s'applique pour tout difféomorphisme harmonique SO(3)-équivariant entre la boule unité de $\mathbf{R}^3$ et une variété riemannienne.

Harmonic diffeomorphisms between an open subset of $\mathbf{R}^3$ and a Riemannian manifold

Abstract — *One shows that any harmonic diffeomorphism φ between an open subset Ω of $\mathbf{R}^3$ and a Riemannian manifold is minimizing provided that at any point of Ω the sum of the 2-order principal minors of the stress-energy tensor of the energy functional at φ is nonnegative. In particular this applies to all* SO(3)*-equivariant harmonic diffeomorphism between the open unit ball of $\mathbf{R}^3$ and a Riemannian manifold.*

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^3$ à frontière régulière muni de la métrique euclidienne canonique c. Soit N une variété riemannienne difféomorphe à Ω, et soit φ un difféomorphisme de classe C^1 entre Ω et N qui soit une application harmonique de (Ω, c) vers N. Comme dans [2], on peut utiliser la carte φ^{-1} pour représenter N. On se ramène ainsi à étudier l'application identité (que l'on notera Id) de (Ω, c) vers (Ω, g) où g est l'image réciproque de la métrique sur N par φ. On considère l'ensemble $H^1_*(\Omega, \Omega)$ des applications H^1 de Ω vers Ω qui coïncident avec l'application Id sur le bord de Ω. Pour toute application u dans $H^1_*(\Omega, \Omega)$ on note $u^i_\alpha = \partial u^i/\partial x^\alpha$, et on définit l'énergie de u par

$$\text{(1)} \qquad E(u) = (1/2)\int_\Omega \sum_{\alpha, i, j} g_{ij}[u(x)]\, u^i_\alpha u^j_\alpha\, dx = \int_\Omega e(u)\, dx.$$

Comme Id: $(\Omega, c) \to (\Omega, g)$ est harmonique, l'équation suivante est vérifiée par g au sens faible sur Ω (*voir* [2]):

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Big(\sum_i g_{ii}(x)\Big) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}[g_{i\gamma}(x) + g_{\gamma i}(x)] \quad \text{pour} \quad \gamma = 1, 2, 3.$$

Suivant P. Baird et J. Eells [1], nous introduisons le tenseur « énergie-impulsion » de la fonctionnelle E en Id :

$$\text{(3)} \qquad S_{ij}(x) = (1/2)\Big[\sum_k g_{kk}(x)\Big]\delta_{ij} - g_{ij}(x).$$

Il est immédiat que (2) est équivalent au fait que la divergence de S_{ij} soit nulle sur Ω. En tout point x de Ω on définit la somme $a(x)$ des mineurs principaux d'ordre 2 de $S_{ij}(x)$. Si μ_1, μ_2, μ_3 sont les valeurs propres de $S_{ij}(x)$, $a(x) = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1$. On cherche à trouver une condition suffisante pour que Id soit minimisante, c'est-à-dire pour que $E(\mathrm{Id}) \leqq E(u)$ pour tout u dans $H^1_*(\Omega, \Omega)$. On va établir le résultat suivant:

THÉORÈME. — *Si* Id: $(\Omega, c) \to (\Omega, g)$ *est harmonique, si g est continu et si $a(x)$ est positif ou nul sur Ω, alors* Id *est minimisant.*

Note présentée par Haïm BREZIS.

0249-6291/89/03080237 $ 2.00

Démonstration. — Comme dans [3] on va montrer ce théorème en deux étapes : d'abord on montre que $e(u)(x)$ est supérieur à un lagrangien $L[u(x), \nabla u(x)]$ partout sur Ω, puis on montre que L est un lagrangien nul, c'est-à-dire que l'intégrale de L sur Ω ne dépend que de la trace de u sur la frontière de Ω. Soit u dans $H^1_*(\Omega, \Omega)$; grâce à un résultat de densité de [2], on peut en fait supposer que u est de classe C^1 sur Ω.

1re *étape.* — Soit U la comatrice de ∇u, c'est-à-dire $U^{i_1}_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} u^{i_2}_{\alpha_2} & u^{i_3}_{\alpha_2} \\ u^{i_2}_{\alpha_3} & u^{i_3}_{\alpha_3} \end{vmatrix}$ où (i_1, i_2, i_3) et $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont dans $I = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$. On montre que pour tout x dans Ω,

$$e(u)(x) \geqq \sum_{\alpha, i} S_{i\alpha}(u(x))\, U^i_\alpha(x).$$

Fixons x dans Ω et diagonalisons $g_{ij}(u(x))$: il existe une matrice de rotation R et une matrice $\lambda = \text{diagonale}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ telles que $g_{ij}(u(x)) = \sum_k R^k_i \lambda_k R^k_j$. On a alors

$$\begin{aligned} e(u)(x) &= (1/2) \sum_{\alpha, i, j, k} R^k_i \lambda_k R^k_j u^i_\alpha u^j_\alpha \\ &= (1/2) \sum_{\alpha, \beta, \gamma, i, j, k} R^k_i \lambda_k R^k_j R^\gamma_\alpha R^\gamma_\beta u^i_\alpha u^j_\beta \\ &= (1/2) \sum_{\gamma, k} (y^k_\gamma)^2 \lambda_k \qquad \text{avec} \quad y^k_\gamma = \sum_{\alpha, i} R^k_i u^i_\alpha R^\gamma_\alpha. \end{aligned}$$

Notons $|y^k|^2 = \sum_\gamma (y^k_\gamma)^2$, $Y^{i_1}_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} y^{i_2}_{\alpha_2} & y^{i_3}_{\alpha_2} \\ y^{i_2}_{\alpha_3} & y^{i_3}_{\alpha_3} \end{vmatrix}$ où (i_1, i_2, i_3) et $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont dans I, et introduisons les valeurs propres $\mu_k = (1/2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_k$ de $S_{ij}[u(x)]$. On a

$$\begin{aligned} e(u)(x) &= (1/2)[(|y^2|^2 + |y^3|^2)\mu_1 + (|y^3|^2 + |y^1|^2)\mu_2 + (|y^1|^2 + |y^2|^2)\mu_3] \\ &= A + Y^1_1 \mu_1 + Y^2_2 \mu_2 + Y^3_3 \mu_3, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A = (1/2)\,[&\mu_1 (y^2_2 - y^3_3)^2 + \mu_2 (y^3_3 - y^1_1)^2 + \mu_3 (y^1_2 - y^2_2)^2 \\ &+ \mu_1 (-y^2_1)^2 + \mu_2 (-y^1_2)^2 + \mu_3 (y^1_2 + y^2_1)^2 + \mu_1 (-y^3_1)^2 + \mu_2 (y^3_1 + y^1_3)^2 + \mu_3 (-y^1_3)^2 \\ &+ \mu_1 (y^2_3 + y^3_2)^2 + \mu_2 (-y^3_2)^2 + \mu_3 (-y^2_3)^2]. \end{aligned}$$

Nous remarquons que A est toujours positif ou nul. En effet, pour tous réels α, β, γ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, la quantité

$$\mu_1 \alpha^2 + \mu_2 \beta^2 + \mu_3 \gamma^2 = (\mu_1 + \mu_3)\alpha^2 + 2\mu_3 \alpha\beta + (\mu_2 + \mu_3)\beta^2$$

est toujours positive ou nulle car le discriminant de ce polynôme est égal à $-a(x)$, et $\mu_1 + \mu_3 = \lambda_2$ et $\mu_2 + \mu_3 = \lambda_1$ sont strictement positifs. Il vient donc

$$e(u)(x) \geqq Y^1_1 \mu_1 + Y^2_2 \mu_2 + Y^3_3 \mu_3. \tag{4}$$

Étudions par exemple Y^3_3 :

$$\begin{aligned} Y^3_3 &= \begin{vmatrix} \sum_{i_1, \alpha_1} R^1_{i_1} u^{i_1}_{\alpha_1} R^1_{\alpha_1} & \sum_{i_2, \alpha_1} R^2_{i_2} u^{i_2}_{\alpha_1} R^1_{\alpha_1} \\ \sum_{i_1, \alpha_2} R^1_{i_1} u^{i_1}_{\alpha_2} R^2_{\alpha_2} & \sum_{i_2, \alpha_2} R^2_{i_2} u^{i_2}_{\alpha_2} R^2_{\alpha_2} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i_1, i_2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} R^1_{i_1} R^2_{i_2} R^1_{\alpha_1} R^2_{\alpha_2} \begin{vmatrix} u^{i_1}_{\alpha_1} & u^{i_2}_{\alpha_1} \\ u^{i_1}_{\alpha_2} & u^{i_2}_{\alpha_2} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i_1 < i_2} \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} \begin{vmatrix} R^1_{i_1} & R^2_{i_1} \\ R^1_{i_2} & R^2_{i_2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} R^1_{\alpha_1} & R^2_{\alpha_1} \\ R^1_{\alpha_2} & R^2_{\alpha_2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u^{i_1}_{\alpha_1} & u^{i_2}_{\alpha_1} \\ u^{i_1}_{\alpha_2} & u^{i_2}_{\alpha_2} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha, i} R^3_i R^3_\alpha U^i_\alpha. \end{aligned}$$

Donc (4) donne

$$e(u)(x) \geqq \sum_k \sum_{\alpha, i} \mu_k \mathrm{R}_i^k \mathrm{R}_\alpha^k \mathrm{U}_\alpha^i = \sum_{\alpha, i} \mathrm{S}_{i\alpha}[u(x)]\, \mathrm{U}_\alpha^i(x).$$

2^e *étape.* — $\mathscr{L}(u) = \int_\Omega \mathrm{L}(u, \nabla u)(x)\, dx$ est constant pour u variant dans $\mathrm{H}_*^1(\Omega, \Omega) \cap \mathrm{C}^1(\Omega, \Omega)$. Pour le voir, on considère la 3-forme différentielle ψ définie dans $\{(x, y) \in \Omega \times \Omega\}$ par

$$\psi = \sum_\alpha dx^\alpha \wedge [\sum_{(i_1, i_2, i_3) \in \mathrm{I}} \mathrm{S}_{i_3 \alpha}(y)\, dy^{i_1} \wedge dy^{i_2}].$$

D'une part, si $\Gamma(u)$ est le graphe de u dans $\Omega \times \Omega$, et si u est de classe C^1, $\mathscr{L}(u) = \int_{\Gamma(u)} \psi$. D'autre part la divergence de S_{ij} est nulle, ce qui implique que ψ est une forme fermée. D'où pour tout u dans $\mathrm{H}_*^1(\Omega, \Omega) \cap \mathrm{C}^1(\Omega, \Omega)$

$$\mathrm{E}(u) \geqq \int_{\Gamma(u)} \psi = \int_{\Gamma(\mathrm{Id})} \psi = \mathrm{E}(\mathrm{Id}). \tag{5}$$

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant donner une application du théorème précédent dans le cas où le difféomorphisme φ est SO(3)-équivariant. Dans cette situation, on peut toujours se ramener à deux cas de figure: soit $\Omega = \mathrm{B}^3 = \{x \in \mathbf{R}^3 \,|\, |x| < 1\}$, soit $\Omega = \mathrm{C}_b^3 = \{x \in \mathbf{R}^3 \,|\, 1 < |x| < b\}$. On a à étudier $\mathrm{Id}: (\Omega, c) \to (\Omega, g)$ où g est continu et ne dépend que de $|x| = r$, et (*voir* [2])

$$g_{ij}(x) = g_{//}(r)\, x^i x^j r^{-2} + g_\perp(r)\,[\delta_{ij} - x^i x^j r^{-2}].$$

L'équation (2) implique alors (*cf.* [2]):

$$4 g_{//}(r) + r g'_{//}(r) = 4 g_\perp(r) + 2 r g'_\perp(r). \tag{6}$$

COROLLAIRE. — *Soit φ un difféomorphisme harmonique* SO(3)-*équivariant entre* (Ω, c) *et* N. *Alors φ est minimisant dans les cas suivants:*

(i) $\Omega = \mathrm{B}^3$

ou

(ii) $\Omega = \mathrm{C}_b^3$ *et* $2 g_\perp(1) - g_{//}(1) + r^4 g_{//}(r) > 0$ *sur* Ω.

Démonstration. — Nous allons examiner le cas (ii), le premier cas (i) étant plus simple. Pour établir le corollaire, il suffit de vérifier que $a(x) = (2 g_\perp(r) - g_{//}(r))\, (g_{//}(r))^2/8$ est positif. Posons $k(r) = 2 g_\perp(r) - g_{//}(r)$. De (6) il vient $(r^4 k(r))' = 4 r^3 g_\perp(r) \geqq 0$. Si $k(1) \geqq 0$, la preuve est terminée. Sinon on décompose g sous la forme $g = {}^1g + {}^2g$ où ${}^2g_{ij}(x) = -k(1)\, x^i x^j r^{-6}$.

Alors l'hypothèse $2 g_\perp(1) - g_{//}(1) + r^4 g_{//}(r) > 0$ garantit que ${}^1g$ est une métrique définie positive sur C_b^3. Le ${}^1k(1)$ correspondant à ${}^1g$ est nul, donc $\mathrm{Id}: (\Omega, c) \to (\Omega, {}^1g)$ vérifie toutes les hypothèses du théorème de cette Note, donc est minimisante. De plus, pour tout u dans $\mathrm{H}_*^1(\Omega, \Omega)$ on a

$$\int_\Omega \sum_{\alpha, i, j} {}^2g_{ij}[u(x)]\, u_\alpha^i u_\alpha^j\, dx = -k(1) \int_\Omega |\nabla(|u(x)|^{-1})|^2\, dx$$

$$\geqq -k(1) \int_\Omega |\nabla(r^{-1})|^2\, dx = \int_\Omega \sum_i {}^2g_{ii}(x)\, dx$$

car r^{-1} est harmonique réel sur Ω. La conclusion du corollaire s'obtient donc en sommant cette dernière inégalité avec (5) appliquée à Id : $(\Omega, c) \to (\Omega, {}^1 g)$.

C.Q.F.D.

L'auteur tient à exprimer sa gratitude à Jean-Michel Coron pour ses remarques et suggestions.
Recherche financée par la D.R.E.T., D.G.A.

Note remise le 26 décembre 1988, acceptée le 9 janvier 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. BAIRD et J. EELLS, A conservation law for harmonic maps, *Geometry Symp.*, Utrecht, 1980, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 894, 1981, p. 1-25.

[2] J.-M. CORON et F. HELEIN, Harmonic diffeomorphisms, minimizing harmonic maps, and rotational symmetry, *Compositio Math.* (à paraître).

[3] F. H. LIN, A remark on the map $x/|x|$, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 305, série I, 1987, p. 529-531.

Centre de Mathématiques, Unité associée au C.N.R.S. n° 169,
École polytechnique, 91128 *Palaiseau Cedex.*