Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphère

Frédéric HELEIN

Résumé – On démontre que toute application faiblement harmonique définie sur une surface, d'énergie finie et à valeurs dans une sphère de dimension quelconque est harmonique régulière.

Regularity of weakly harmonic maps between a surface and a n-sphere

Abstract – *We show that any weakly harmonic map with finite energy which is defined on a surface into a sphere of arbitrary dimension is smooth harmonic.*

Abridged English Version – Let $(\mathscr{M}, g)$ be a Riemannian surface with or without boundary, let n be a positive integer and let S^n be the Euclidean sphere of dimension n. We consider a map u in $H^1(\mathscr{M}, S^n)=\{u\in H^1(\mathscr{M}, \mathbb{R}^{n+1})\,|\,u(x)\in S^n \text{ for a.e. } x \text{ in } \mathscr{M}\}$ which is weakly harmonic. This means that in local isothermal coordinates on $(\mathscr{M}, g)\,u$ verifies the following vectorial equation in the distribution sense:

$$\Delta u+u\,|\nabla u|^2=0. \tag{1}$$

The aim of this Note is to prove the following:

THEOREM. – *Any weakly harmonic map u in $H^1(\mathscr{M}, S^n)$ is smooth harmonic inside $\mathscr{M}$.*

Remarks. – (*a*) Regularity results under some further hypotheses (*see* [1] to [4]) and removability of singularities (*see* [5]) were already known. (*b*) Regularity theorems in some analogous critical situations are proved in [6], [7] and [8].

Proof. – Because of the invariance of (1) under isothermal change of charts, it suffices to consider the case of a map u with finite energy which is defined on the ball B_2 of center 0 and of radius 2 in $\mathbb{R}^2$, which takes values in S^n and which verifies (1) in the distribution sense.

NOTATIONS. – For r in $]0, 2]$, B_r is the open ball of center 0 and of radius r in $\mathbb{R}^2$. $\mathscr{A}$ is the set of $(n+1)\times(n+1)$ antisymmetric matrices. For any open subset Ω of $\mathbb{R}^2$ if $V(\Omega, \mathscr{A})$ is some Sobolev space of maps defined on Ω and which takes values in $\mathscr{A}$ [for instance $L^p(\Omega, \mathscr{A})$, $H^1(\Omega, \mathscr{A})$...] we note for $k=0, 1, 2$, $\Lambda^k V(\Omega, \mathscr{A})$ the set of differential k-forms on Ω whose coefficients are in $V(\Omega, \mathscr{A})$. The exterior differential acting on the differential k-forms is denoted by d, $\delta=*d*$ is the exterior codifferential.

We define a in $\Lambda^1 L^2(B_2, \mathscr{A})$ by

$$a=(a_\alpha^\beta)_{\alpha\beta} \qquad \text{with} \quad a_\alpha^\beta=u^\alpha\, du^\beta-u^\beta\, du^\alpha, \tag{2}$$

and the operator T_r from $H^{-1}(B_r)$ into $H^1(B_r)$ wich associates to each g in $H^{-1}(B_r)$ the unique solution of

$$\begin{cases} \Delta v=g & \text{on } B_r \\ v=0 & \text{on } \partial B_r. \end{cases}$$

We use the same notation T_r for the operator obtained by the action of T_r on the components of the elements of $\Lambda^k H^{-1}(B_r, \mathscr{A})$. We consider $f=T_2(da)$ in

Note présentée par Haïm BREZIS.

0764-4442/90/03110519 $ 2.00 © Académie des Sciences

$\Lambda^2 H^1(B_r, \mathscr{A})$, and we have:

$$d\delta f = \Delta f = da \quad \Leftrightarrow \quad d(a - \delta f) = 0.$$

Hence there exists φ in $H^1(B_r, \mathscr{A})$ such that

(3) $$d\varphi = a - \delta f.$$

Then remarking after [10], [11] and [12] that $\delta a = 0$, we get

(4) $$\Delta\varphi = \delta d\varphi = \delta a - \delta^2 f = 0.$$

Since $T_2(da)$ is in $\Lambda^2 H^1(B_r, \mathscr{A})$ it is possible to choose r in $[1, 2[$ such that the trace of $T_2(da)$ on ∂B_r has its components in $H^1(\partial B_r)$ by using Fubini's theorem [we choose in the same time r such that $u|_{\partial B_r}$ belongs to $H^1(\partial B_r)$, which will be useful in the following]. Let h in $\Lambda^2 H^2(B_r, \mathscr{A})$ be the unique solution of

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{on } B_r \\ h = T_2(da) & \text{on } \partial B_r. \end{cases}$$

We can then write that on B_r, $f = T_2(da) = T_r(da) + h$. It follows from (3) that on B_r

(5) $$a = \delta f + d\varphi = \delta T_r(da) + \delta h + d\varphi.$$

$\mathscr{R} = \delta h + d\varphi$ is in $\Lambda^1 H^1(B_r, \mathscr{A})$. We remark that for $\beta = 1, \ldots, n+1$,

(6) $$du^\beta = \sum_\alpha u^\alpha (u^\alpha du^\beta - u^\beta du^\alpha), \qquad \text{or} \qquad du = a \,.\, u.$$

So (5) implies that

(7) $$\Delta u = \delta du = \delta(a \,.\, u) = \delta[\delta T_r(da) \,.\, du + \mathscr{R} \,.\, u].$$

Let us introduce the operator $\mathscr{C}$ from $H^{-1}(B_r)$ into $H^1(B_r)$ which associates to g in $H^{-1}(B_r)$ the unique solution of

$$\begin{cases} \Delta v = g & \text{on } B_r \\ v = u & \text{on } \partial B_r. \end{cases}$$

Then from the choice of r, $\mathscr{C}$ maps continuously $W^{1,p}(B_r)$ into $W^{1,p}(B_r)$ for $2 \leq p < +\infty$. We apply $\mathscr{C}$ to (7) and find

(8) $$u - \mathscr{C}\{\delta[(\delta T_r(da)) \,.\, u]\} = \mathscr{C}\{\delta(\mathscr{R} \,.\, u)\}.$$

We prove the regularity of u on B_r by using an argument inspired from J.-M. Coron [13], from H. Brezis and T. Kato [14] and from H. Brezis and E. H. Lieb [15]. We write $u = u_\varepsilon + v_\varepsilon$ with $u_\varepsilon \in C^\infty(\bar{B}_r, S^n)$ and $v_\varepsilon \in H^1(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ and $\|v_\varepsilon\|_{H^1} \leq \varepsilon$.

We split da by $da = da_\varepsilon + db_\varepsilon$ with

$$(da_\varepsilon)^\beta_\alpha = du^\alpha_\varepsilon \wedge du^\beta + du^\alpha \wedge du^\beta_\varepsilon$$
$$(db_\varepsilon)^\beta_\alpha = dv^\alpha_\varepsilon \wedge du^\beta + du^\alpha \wedge dv^\beta_\varepsilon.$$

By replacing in (8) we find that u is a solution of

(10) $$w - \mathscr{U}(w) = \mathscr{G},$$

where $\mathscr{G} = \mathscr{C}\{\delta[(\mathscr{R} + \delta T_r(da_\varepsilon)) \,.\, u]\}$ belongs to $W^{1,p}(B_r)$ for $2 \leq p < +\infty$, and

$$\mathscr{U}(w) = \mathscr{C}\{\delta[(\delta T_r(dv^\alpha_\varepsilon \wedge dw^\beta + dw^\alpha \wedge dv^\beta_\varepsilon)) \,.\, u]\}.$$

We conclude by proving that (10) has a solution in $W^{1,p}(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ for $2 < p < +\infty$, and that (10) has a unique solution in $H^1(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ for ε small enough, and hence that u is in $W^{1,p}(B_r, S^n)$. Regularity of u follows then from a bootstrap argument.

Q.E.D.

Soit $(\mathscr{M}, g)$ une surface riemannienne avec ou sans bord, soit n un entier strictement positif et soit S^n la sphère euclidienne de dimension n. On considère une application u dans $H^1(\mathscr{M}, S^n)=\{u\in H^1(\mathscr{M}, \mathbb{R}^{n+1})\,|\,u(x)\in S^n \text{ p. p.}\}$ qui soit faiblement harmonique. Ceci signifie que dans des coordonnées locales isothermes sur $(\mathscr{M}, g)$, u vérifie l'équation vectorielle suivante au sens des distributions :

$$\Delta u+u\,|\nabla u|^2=0. \tag{1}$$

L'objet de cette Note est de montrer l'assertion suivante :

THÉORÈME. — *Toute application u dans $H^1(\mathscr{M}, S^2)$ faiblement harmonique est harmonique régulière à l'intérieur de $\mathscr{M}$.*

Remarques. — (*a*) Sous certaines hypothèses supplémentaires, on connaissait des résultats de régularité : si u est minimisante (C. B. Jr Morrey [1]), si u est faiblement conforme (M. Grüter [2]), si la différentielle de Hopf $\omega=[|u_x|^2-|u_y|^2-2i\langle u_x, u_y\rangle]$ de u est holomorphe (R. Schoen [3]), ou si u a son image contenue dans une boule géodésique convexe (S. Hildebrandt, H. Kaul et K.-J. Widman [4]). Enfin dans [5], J. Sacks et K. Uhlenbeck montrent que si une application d'énergie finie est harmonique régulière sur une surface sauf peut-être en des points isolés, alors cette application peut être prolongée de façon régulière et harmonique sur toute la surface. (*b*) Des théorèmes de régularité dans des situations critiques analogues ont été prouvés dans [6] par N. S. Trudinger (problème de Yamabe), dans [7] par H. Wente et [8] par E. Heinz (surfaces à courbure moyenne prescrite).

Preuve. — Soit m un point de la surface $\mathscr{M}$, nous allons montrer que u est régulière sur un voisinage de m. Tout d'abord nous utilisons une carte locale isotherme d'un voisinage de m pour nous ramener au cas d'une application d'énergie finie u définie sur B_2, la boule de centre 0 et de rayon 2 dans $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans la sphère S^n et vérifiant l'équation (1) au sens des distributions.

NOTATIONS. — Pour r dans $]0, 2]$, B_r est la boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^2$. $\mathscr{A}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques $(n+1)\times(n+1)$. Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, si $V(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace de Sobolev de fonctions définies sur Ω et à valeurs dans $\mathscr{A}$ (par exemple $L^p(\Omega, \mathscr{A})$, $H^1(\Omega, \mathscr{A})\ldots$) on note pour $k=0, 1, 2$, $\Lambda^k V(\Omega, \mathscr{A})$ l'ensemble des k-formes différentielles sur Ω dont les coefficients sont dans $V(\Omega, \mathscr{A})$. La différentielle extérieure agissant sur les k-formes différentielles est notée d, et $\delta=\ast d\ast$ est la codifférentielle extérieure.

Soit a dans $\Lambda^1 L^2(B_2, \mathscr{A})$ défini par

$$a=(a_\alpha^\beta)_{\alpha\beta} \qquad \text{avec} \quad a_\alpha^\beta=u^\alpha\,du^\beta-u^\beta\,du^\alpha. \tag{2}$$

Remarquons que comme u est dans $H^1(B_2, S^n)$, on a $d(u^\alpha\,du^\beta-u^\beta\,du^\alpha)=2\,du^\alpha\wedge du^\beta$ mais que ceci ne serait pas vrai en général si on avait seulement u dans $W^{1,p}(B_2, S^n)$ avec $1\leq p<2$ (*voir* [9]). Pour tout r dans $]0, 2]$, nous introduisons l'opérateur T_r de $H^{-1}(B_r)$ vers $H^1(B_r)$ défini de la façon suivante : pour tout g dans $H^{-1}(B_r)$, $T_r(g)$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \Delta v=g & \text{sur } B_r \\ v=0 & \text{sur } \partial B_r, \end{cases}$$

et on utilisera la même notation T_r pour l'opérateur obtenu par l'action de T_r sur les composantes des éléments de $\Lambda^k H^{-1}(B_r, \mathscr{A})$ vers $\Lambda^k H^1(B_r, \mathscr{A})$.

Considérons $f=T_2(da)$ appartenant à $\Lambda^2 H^1(B_r, \mathscr{A})$; on a au sens des distributions :

$$d\delta f=\Delta f=da \quad\Leftrightarrow\quad d(a-\delta f)=0,$$

donc il existe φ dans $\Lambda^0 H^1(B_2, \mathscr{A})$ tel que

$$d\varphi = \alpha - \delta f. \tag{3}$$

Nous allons utiliser la caractérisation suivante des applications faiblement harmoniques à valeurs dans une sphère, déjà remarquée par Y. Chen [10], J. Keller, J. Rubinstein et P. Sternberg [11] et J. Shatah [12] : si u dans $H^1(B_2, S^n)$ est solution de (1), alors on a $\delta a = 0$ au sens des distributions. Donc (3) entraîne

$$\Delta\varphi = \delta d\varphi = \delta a - \delta^2 f = 0. \tag{4}$$

Comme $T_2(da)$ est dans $\Lambda^2 H^1(B_2, \mathscr{A})$, il est possible de choisir r dans $[1, 2[$ tel que la trace de $T_2(da)$ sur ∂B_r ait ses composantes dans $H^1(\partial B_r)$ en utilisant le théorème de Fubini [on choisit aussi r de façon à ce que la trace de u sur ∂B_r soit dans $H^1(\partial B_r)$ ce qui servira dans la suite]. Soit h dans $\Lambda^2 H^2(B_r, \mathscr{A})$ l'unique solution de

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{sur } B_r \\ h = T_2(da) & \text{sur } \partial B_r. \end{cases}$$

On peut alors écrire que sur B_r, $f = T_2(da) = T_r(da) + h$. De (3) on déduit que sur B_r

$$a = \delta f + d\varphi = \delta T_r(da) + \delta h + d\varphi. \tag{5}$$

φ est harmonique sur B_2 donc C^∞ sur $\bar{B}_r$ et h est dans $\Lambda^2 H^2(B_r, \mathscr{A})$, donc $\mathscr{R} = \delta h + d\varphi$ est dans $\Lambda^1 H^1(B_r, \mathscr{A})$. Remarquons maintenant que pour $\beta = 1, \ldots, n+1$,

$$du^\beta = \sum_\alpha u^\alpha (u^\alpha du^\beta - u^\beta du^\alpha), \quad \text{soit } du = a \,.\, u. \tag{6}$$

L'égalité (5) implique donc

$$\Delta u = \delta du = \delta(a \,.\, u) = \delta[\delta T_r(da) \,.\, u + \mathscr{R} \,.\, u]. \tag{7}$$

On introduit l'opérateur $\mathscr{C}$ de $H^{-1}(B_r)$ vers $H^1(B_r)$ qui à g dans $H^{-1}(B_r)$ associe l'unique solution de

$$\begin{cases} \Delta v = g & \text{sur } B_r \\ v = u & \text{sur } \partial B_r. \end{cases}$$

On remarque que d'après le choix de r [tel que $u|_{\partial B_r}$ soit dans $H^1(\partial B_r, S^n)$] la restriction de $\mathscr{C}$ à $W^{-1, p}(B_r)$ est continue de $W^{-1, p}(B_r)$ vers $W^{1, p}(B_r)$ pour $2 \leq p < +\infty$. Appliquons $\mathscr{C}$ à (7); on trouve

$$u - \mathscr{C}\{\delta[(\delta T_r(da)) \,.\, u]\} = \mathscr{C}\{\delta(\mathscr{R} \,.\, u)\}. \tag{8}$$

Nous allons maintenant conclure à la régularité de u sur B_r en faisant appel à une méthode utilisée par J.-M. Coron [13] pour prouver la régularité des solutions faibles du problème des surfaces à courbure moyenne prescrite, inspirée de H. Brezis et T. Kato [14] et de H. Brezis et E. H. Lieb [15]. Il est toujours possible d'approcher u par des fonctions C^∞ sur $\bar{B}_r$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit ε un réel strictement positif, soit u_ε dans $C^\infty(\bar{B}_r, \mathbb{R}^{n+1})$ et soit v_ε dans $H^1(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ tels que $u = u_\varepsilon + v_\varepsilon$ et $\|v_\varepsilon\|_{H^1} \leq \varepsilon$. Nous décomposons alors da de la façon suivante : $da = da_\varepsilon + db_\varepsilon$ avec

$$(da_\varepsilon)_\alpha^\beta = du_\varepsilon^\alpha \wedge du^\beta + du^\alpha \wedge du_\varepsilon^\beta$$

et

$$(db_\varepsilon)_\alpha^\beta = dv_\varepsilon^\alpha \wedge du^\beta + du^\alpha \wedge dv_\varepsilon^\beta.$$

En remplaçant dans (8) on trouve :

$$u - \mathscr{C}\{\delta[(\delta T_r(db_\varepsilon)) \,.\, u]\} = \mathscr{C}\{\delta[(\mathscr{R} + \delta T_r(da_\varepsilon)) \,.\, u]\}. \tag{9}$$

Appelons $\mathscr{G}$ le membre de droite de (9). Comme da_ε est dans $L^2(B_r)$, $T_r(da_\varepsilon)$ est dans $H^2(B_r)$ et $\mathscr{R}+\delta T_r(da_\varepsilon)$ est dans $H^1(B_r)$. Donc pour tout p dans $[2, +\infty[$, $\mathscr{R}+\delta T_r(da_\varepsilon)$ est dans $L^p(B_r)$; comme u est de norme 1, $\delta[(\mathscr{R}+\delta T_r(da_\varepsilon)).u]$ est dans $W^{-1,p}(B_r)$ et finalement $\mathscr{G}$ est dans $W^{1,p}(B_r)$. L'équation (9) nous indique que u est solution de

(10) $$w-\mathscr{U}(w)=\mathscr{G}, \qquad w\in H^1(B_r),$$

avec $\mathscr{U}(w)=\mathscr{C}\{\delta[(\delta T_r(dv_\varepsilon^\alpha \wedge dw^\beta + dw^\alpha \wedge dv_\varepsilon^\beta)).u]\}$. Nous allons montrer que pour tout p dans $]2, +\infty[$, (10) admet une solution dans $W^{1,p}(B_r)$ pour un ε suffisamment petit. Comme $\mathscr{G}$ est dans $W^{1,p}(B_r)$ il suffit de montrer qu'il existe une constante $C(p)$ telle que $\mathscr{U}$ soit un opérateur borné de $W^{1,p}(B_r)$ dans lui-même de norme inférieure à $C(p)\varepsilon$, et de choisir ε suffisamment petit de façon à ce que $\mathrm{Id}-\mathscr{U}$ soit inversible dans $W^{1,p}(B_r)$. On peut écrire

$$\mathscr{U}(w)=\mathscr{C}\circ E\circ D\circ T_r\circ C\circ B\circ A(w)$$

avec

A : $w\mapsto dw$ continu de $\Lambda^0 W^{1,p}(B_r, \mathscr{A})$ dans $\Lambda^1 L^p(B_r, \mathscr{A})$,

B : $dw\mapsto (dv_\varepsilon^\alpha \wedge dw^\beta + dw^\alpha \wedge dv_\varepsilon^\beta)_{\alpha\beta}$ continu de $\Lambda^1 L^p(B_r, \mathscr{A})$ dans $\Lambda^2 L^q(B_r, \mathscr{A})$ avec $1/q=(1/p)+(1/2)$ en vertu de l'inégalité de Hölder,

$\mathscr{C}$ est l'injection de Sobolev de $\Lambda^2 L^q(B_r, \mathscr{A})$ dans $\Lambda^2 W^{-1,p}(B_r, \mathscr{A})$,

T_r est continu de $\Lambda^2 W^{-1,p}(B_r, \mathscr{A})$ vers $\Lambda^2 W^{1,p}(B_r, \mathscr{A})$,

D : $v\mapsto \delta v$ continu de $\Lambda^2 W^{1,p}(B_r, \mathscr{A})$ dans $\Lambda^1 L^p(B_r, \mathscr{A})$,

E : $v\mapsto v.u$ continu de $\Lambda^1 L^p(B_r, \mathscr{A})$ dans $\Lambda^1 L^p(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ car u est de norme 1,

F : $v\mapsto \delta v$ continu de $\Lambda^1 L^p(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ dans $W^{-1,p}(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$,

$\mathscr{C}$ est continu de $W^{-1,p}(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ dans $W^{1,p}(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$.

Donc $\mathscr{U}$ est continu de $W^{1,p}(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ dans lui-même et comme la norme de B est inférieure ou égale à 2ε, on peut conclure qu'il existe une constante $C(p)$ telle que la norme de $\mathscr{U}$ dans $W^{1,p}(B_r)$ soit plus petite que $C(p)\varepsilon$.

Il nous reste maintenant à prouver que le problème (10) admet une unique solution dans $H^1(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ pour un ε suffisamment petit. D'après ce qui précède cela impliquera que u est dans tous les $W^{1,p}(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ pour $2\leqq p<+\infty$, et la régularité de u sur B_r s'ensuit par argument de bootstrap classique. Pour que (10) admette une unique solution il faut montrer que $\mathrm{Id}-\mathscr{U}$ est inversible en tant qu'opérateur de $H^1(B_r, \mathbb{R}^{n+1})$ dans lui-même pour ε sufisamment petit. Il suffit donc de montrer qu'il existe une constante K positive telle que $\|\mathscr{U}\|_{H^1}\leqq K\varepsilon$. Nous utilisons pour cela le lemme suivant dû à H. Wente (*cf.* [7] ou [16]).

Lemme. — *Il existe une constante strictement positive* C_1 *telle que si* u, v *sont dans* $H^1(B_r, \mathbb{R})$ *et si* ψ *dans* $H^1(B_r, \mathbb{R})$ *est l'unique solution de*

$$\begin{cases} \Delta\psi=u_x v_y-u_y v_x & \textit{sur } B_r\\ \psi=0 & \textit{sur } \partial B_r, \end{cases}$$

alors $\|\nabla\psi\|_{L^2}\leqq C_1\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$.

Une application directe de ce lemme donne :

$$\|\delta T_r(dv_\varepsilon^\alpha \wedge dw^\beta + dw^\alpha \wedge dv_\varepsilon^\beta)\|_{L^2(B_r)}\leqq 2C_1\|v_\varepsilon\|_{H^1}\|w\|_{H^1}.$$

On conclut donc de la même façon que précédemment que $\|\mathscr{U}\|_{H^1}\leqq K\varepsilon$.

C.Q.F.D.

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à J.-M. Coron pour des discussions fort intéressantes.

Recherche financée par la D.R.E.T. et partiellement financée par le projet G.A.D.G.E.T. (Programme C.E.E. SC1-0105-C).

Note remise et acceptée le 4 mai 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] C. B. Jr MORREY, The problem of Plateau on a Riemannian manifold, *Ann. of Math.*, 49, 1948, p. 807-851. C. B. Jr MORREY, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Grundlehren, 130, Springer, Berlin, 1966.

[2] M. GRÜTTER, Regularity of weak H-surfaces, *J. Reine Angew. Math.*, 329, 1981, p. 1-15.

[3] R. SCHOEN, Analytic aspects of the harmonic maps problem, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 2, Springer, Berlin, 1984, p. 321-358.

[4] S. HILDEBRANDT, H. KAUL et K.-J. WIDMAN, An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Acta Math.*, 138, 1977, p. 1-16.

[5] J. SACKS et K. UHLENBECK, The existence of minimal immersions of 2-spheres, *Ann. Math.*, 113, 1981, p. 1-24.

[6] N. S. TRUDINGER, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Ann. Scue. Norm. Pisa*, III, 22, 1968, p. 265-274.

[7] H. WENTE, An existence theorem for surfaces of constant mean curvature, *J. Math. Anal. Appl.*, 26, 1969, p. 318-344.

[8] E. HEINZ, Ein Regularitätssatz für schwache Lösungen nichtlinearer elliptische Systeme, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II. Math.-Phys. Kl.* 1, 1975, p. 1-13.

[9] S. MÜLLER, Det = det – *A remark on the distributional determinant*, prépublication.

[10] Y. CHEN, Weak solutions to the evolution problems of harmonic maps, *Math. Z.*

[11] J. KELLER, J. RUBINSTEIN et P. STERNBERG, *Reaction-Diffusion processes and evolution to harmonic maps*, Prépublication.

[12] J. SHATAH, Weak solutions and development of singularities of the SU(2) σ-model, *Comm. Pure Appl. Math.*, 41, 1988, p. 459-469.

[13] J.-M. CORON, Communication privée.

[14] H. BREZIS et T. KATO, Remarks on the Schrödinger Operator with Singular Complex Potentials, *J. Math. Pures et Appl.*, 58, 1979, p. 137-151.

[15] H. BREZIS et E. H. LIEB, Minimum Action Solutions of Some Vector Field Equations, *Comm. Math. Phys.*, 96, 1984, p. 97-113.

[16] H. BREZIS et J.-M. CORON, Multiple Solutions of H-Systems and Rellich's Conjecture, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37, 1984, p. 149-187.

G.H.N., E.N.S.T.A. Centre de l'Yvette, chemin de la Hunière, 91120 *Palaiseau.*