

Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne

Frédéric HÉLEIN

Résumé — On démontre que toute application faiblement harmonique définie sur une surface de dimension deux, d'énergie finie et à valeurs dans une variété riemannienne compacte est harmonique régulière.

Regularity of weakly harmonic maps between a surface and a n -sphere

Abstract — We show that any weakly harmonic map with finite energy defined on a two-dimensional surface with values into a compact Riemannian manifold is smooth harmonic.

Abridged English Version — Let (\mathcal{M}, g) be a two-dimensional Riemannian surface with or without boundary, and let (\mathcal{N}, h) be a Riemannian manifold of dimension n . We assume that \mathcal{N} is isometrically embedded in some \mathbb{R}^K . We consider a map u in

$$H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \{u \in H^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}^K) \mid u(x) \in \mathcal{N} \text{ for a.e. } x \text{ in } \mathcal{M}\}$$

which is weakly harmonic. This means that in local isothermal coordinates on (\mathcal{M}, g) u satisfies the following system of equations in the sense of distributions:

$$(1) \quad \Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0,$$

where A is the second fundamental form of the embedding of \mathcal{N} in \mathbb{R}^K . The main result of this Note is the following:

THEOREM. — Any weakly harmonic map u in $H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ is smooth inside \mathcal{M} .

Remarks. — (a) Regularity results under some further hypotheses (see [1] to [6]) and removability of singularities (see [7]) were already known. (b) Regularity theorems in some analogous critical situations are proved in [8], [9] and [10].

Proof. — Because of the invariance of (1) under isothermal change of charts, it suffices to consider the case of a map u with finite energy which is defined on the ball B^2 of center 0 and of radius 1 in \mathbb{R}^2 , which takes values in \mathcal{N} and which verifies (1) in the sense of distributions. We will use canonical coordinates $z=(x, y)$ on B^2 .

A preliminary step consists in showing that we can always assume that the image of u lies inside an open subset \mathcal{U} of \mathcal{N} where there exists a smooth orthonormal tangent frame field $\tilde{e}=(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ by embedding \mathcal{N} into another compact Riemannian manifold of higher dimension if necessary. Then we consider all the gauge transformations of \tilde{e} given by

$$(2) \quad e_i(z) = R_{ij}(z) \tilde{e}_j[u(z)],$$

for all the $R=(R_{ij})$ in $H^1(B^2, SO(n))$. By choosing a gauge transformation which minimizes the functional

$$(3) \quad F(R) = \int_{B^2} \left[\sum_{i,j} \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \right\rangle^2 \right] dx dy,$$

we may find some mobile frame denoted by $e=(e_1, \dots, e_n)$ such that its connection coefficients satisfy the following equation:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \right\rangle + \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \right\rangle = 0.$$

It follows that

$$(6) \quad \omega_{ij} := \left(\left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \right\rangle, \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \right\rangle \right) = \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial y}, -\frac{\partial A_{ij}}{\partial x} \right),$$

where A_{ij} is a function in $H^1(B^2)$ which satisfies

$$(7) \quad \Delta A_{ij} = \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, \frac{\partial e_j}{\partial y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, \frac{\partial e_j}{\partial x} \right\rangle.$$

Results in [13] allow then to conclude that the right hand side of (7) is in the local Hardy space $\mathcal{H}_{loc}^1(B^2)$. Thus the connection coefficients ω_{ij} are in $W_{loc}^{1,1}(B^2)$ which is contained in the Lorentz space $L_{loc}^{(2,1)}(B^2)$ according to [14] (for definition and properties of Lorentz spaces see [15], [16]).

In the second step, we use the complex notations

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{d}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \right\rangle + i \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \right\rangle \right] \quad \text{and} \quad \alpha^i = \langle e_i, U \rangle.$$

We can write the Euler equation as

$$(9) \quad \frac{d\alpha^i}{dz} = a_{ij} \alpha^j.$$

Then using the fact that $\mathcal{A}=(a_{ij})$ belongs to $L_{loc}^{(2,1)}(B^2)$, it is possible to construct local solutions β to the equation

$$(10) \quad \frac{d\beta}{dz} = \mathcal{A} \beta$$

which are locally bounded in the L^∞ topology, and to conclude to the local uniqueness of solutions to (10) modulo the set of holomorphic maps. It follows that the α^i are locally bounded, and thus that u is locally a Lipschitz map.

Q.E.D.

Soit (\mathcal{M}, g) une surface riemannienne avec ou sans bord et soit (\mathcal{N}, h) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension n . En utilisant le théorème de Nash-Moser, on peut toujours supposer que \mathcal{N} est plongée isométriquement dans un espace euclidien \mathbb{R}^K où K est un entier non nul. On considère une application u dans

$$H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \{ u \in H^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}^K) \mid u(x) \in \mathcal{N} \text{ p. p.} \}$$

qui soit faiblement harmonique. Ceci signifie que dans des coordonnées locales isothermes sur (\mathcal{M}, g) , u vérifie l'équation vectorielle suivante au sens des distributions

$$(1) \quad \Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0,$$

où A est la seconde forme fondamentale du plongement de \mathcal{N} dans \mathbb{R}^K . L'objet de cette Note est de montrer l'assertion suivante :

THÉORÈME. — *Toute application faiblement harmonique u dans $H^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est régulière à l'intérieur de \mathcal{M} .*

Remarques. — (a) Sous certaines hypothèses supplémentaires, on connaissait des résultats de régularité : si u est minimisante (C. B. Morrey Jr [1]), ou si u est faiblement conforme (M. Grüter [2]), ou si la différentielle de Hopf $\omega = [|u_x|^2 - |u_y|^2 - 2i \langle u_x, u_y \rangle]$ de u est holomorphe (R. Schoen [3]), ou si u a son image contenue dans une boule géodésique convexe (S. Hildebrandt, H. Kaul, K.-J. Widman [4]), ou si \mathcal{N} est une sphère munie de la métrique canonique ou enfin s'il existe un groupe qui agit de façon transitive et isométriquement sur \mathcal{N} (F. Hélein [5], [6]). De plus dans [7], J. Sacks et K. Uhlenbeck montrent que si une application d'énergie finie est harmonique régulière sur une surface sauf peut-être en des points isolés, alors cette application peut être prolongée de façon régulière et harmonique sur toute la surface. (b) Des théorèmes de régularité dans des situations critiques analogues ont été prouvés dans [8] par N. S. Trudinger (problème de Yamabe), dans [9] par H. Wente et [10] par E. Heinz (surfaces à courbure moyenne prescrite).

Preuve. — Soit m un point de la surface \mathcal{M} . Nous allons montrer que u est régulière sur un voisinage de m . Tout d'abord nous utilisons une carte locale isotherme d'un voisinage de m pour nous ramener au cas d'une application d'énergie finie u définie sur B^2 , la boule de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbb{R}^2 , à valeurs dans la variété \mathcal{N} et vérifiant le système (1) au sens des distributions. Nous utiliserons les coordonnées canoniques $z = (x, y)$ sur B^2 .

Étape préliminaire. — Nous allons construire une application de B^2 dans $[\mathbb{R}^K]^n$ qui à chaque z associe le n -uplet $e = (e_1, \dots, e_n)$ tel que pour presque tout z dans B^2 , e soit un repère orthonormé de l'espace tangent à \mathcal{N} en $u(z)$. Ce n -uplet possèdera en outre une propriété de régularité supplémentaire. Pour cela nous utilisons d'abord l'hypothèse suivante :

(H) Il existe un ouvert \mathcal{U} contenu dans \mathcal{N} tel que l'image de u soit contenue dans \mathcal{U} et tel qu'il existe sur \mathcal{U} un champ de repères orthonormés tangents à \mathcal{N} , $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ qui soit de classe C^∞ .

Supposons que (H) n'est pas vérifiée, considérons un plongement de \mathcal{N} dans un espace plat \mathbb{R}^L ; il existe un voisinage tubulaire $V\mathcal{N}$ de \mathcal{N} dans \mathbb{R}^L qui est localement difféomorphe à $\mathcal{N} \times B^{L-n}$. Prenons deux copies $V\mathcal{N}_1$ et $V\mathcal{N}_2$ de $V\mathcal{N}$, collons les bords à bords en une variété régulière \mathcal{N}' . Nous considérons alors \mathcal{N} comme une sous-variété de \mathcal{N}' par le plongement $\Pi: \mathcal{N} \subset V\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}'$, et nous prenons un voisinage \mathcal{U}' de \mathcal{N} dans $V\mathcal{N}_1$. Grâce au plongement de $V\mathcal{N}$ dans \mathbb{R}^L il est possible de définir un champ régulier de repères $f = (f_1, \dots, f_L)$ sur $V\mathcal{N}$ donc sur \mathcal{U}' . Construisons maintenant une métrique sur \mathcal{U}' : localement \mathcal{U}' est difféomorphe à un ouvert de $\mathcal{N} \times B^{L-n}$, on munit \mathcal{U}' de la métrique produit de la métrique h de \mathcal{N} par la métrique euclidienne canonique sur B^{L-n} ; on prolonge cette métrique sur \mathcal{N}' tout entier de façon régulière. A partir du champ de repères f , on peut par un procédé d'orthogonalisation standard fabriquer un champ de repères \tilde{e}' orthonormé et régulier sur \mathcal{U}' . On considère l'application $u' = \Pi \circ u$ de B^2 vers \mathcal{N}' . Alors par construction, \mathcal{N}' est une variété compacte (donc peut être à nouveau plongée isométriquement dans un espace euclidien $\mathbb{R}^{K'}$), et par le choix de la

métrique sur \mathcal{U}' , u' est faiblement harmonique dès que u l'est. On est donc ramené à étudier une situation où l'hypothèse (H) est vérifiée.

Nous allons maintenant fabriquer à partir du champ de repères \tilde{e} un autre champ de repères plus régulier. Pour cela nous associons à toute application $R = (R_{ij})$ dans $H^1(B^2, SO(n))$ le repère mobile e de classe H^1 défini par :

$$(2) \quad e_i(z) = R_{ij}(z) \tilde{e}_j[u(z)],$$

où l'on utilise ainsi que dans la suite la convention de sommation sur les indices répétés. Pour chaque repère e , on peut définir les coefficients de connexion $\langle \partial e_i / \partial x, e_j \rangle$ et $\langle \partial e_i / \partial y, e_j \rangle$ qui appartient à $L^2(B^2)$ (où $\langle \dots \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^k). Ceci permet de définir la fonctionnelle suivante sur $H^1(B^2, SO(n))$:

$$(3) \quad F(R) = \int_{B^2} \left[\sum_{i,j} \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \right\rangle^2 \right] dx dy.$$

Cette fonctionnelle atteint son minimum sur $H^1(B^2, SO(n))$ pour une certaine transformation de jauge R_0 (voir [11] par exemple); soit e le champ de repères construit à l'aide de R_0 . Il vérifie les équations suivantes au sens faible :

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \right\rangle + \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \right\rangle = 0,$$

avec les conditions de Neumann au bord (n étant la normale extérieure) :

$$(5) \quad n_x \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \right\rangle + n_y \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \right\rangle = 0 \quad \text{sur } \partial B^2,$$

donc pour tout couple (i, j) , il existe A_{ij} appartenant à $H^1(B^2)$ tel que

$$(6) \quad \omega_{ij} := \left(\left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \right\rangle, \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \right\rangle \right) = \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial y}, -\frac{\partial A_{ij}}{\partial x} \right).$$

De plus A_{ij} vérifie alors

$$(7) \quad \Delta A_{ij} = \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, \frac{\partial e_j}{\partial y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, \frac{\partial e_j}{\partial x} \right\rangle \quad \text{sur } B^2,$$

avec des conditions de Dirichlet homogènes sur ∂B^2 à cause de (5). On reconnaît dans le second membre de (7) une somme de déterminants jacobiens de degré 2 de fonctions H^1 . Depuis H. Wentz ([9]; voir aussi [12]), on sait que de telles quantités présentent des phénomènes de compensation. Un résultat récent de R. R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer et S. Semmes dans [13] permet de conclure que le second membre de (7) est dans l'espace de Hardy local $\mathcal{H}_{loc}^1(B^2)$. Donc A_{ij} est dans $W_{loc}^{2,1}(B^2)$ et ω_{ij} est dans $W_{loc}^{1,1}(B^2)$. Or d'après un résultat de H. Brezis [14], pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^m , $W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ est contenu dans l'espace de Lorentz $L_{loc}^{(m/(m-1), 1)}(\Omega)$. Donc en particulier ω_{ij} est dans $L_{loc}^{(2,1)}(B^2)$ (cet espace est légèrement plus petit que L_{loc}^2 , pour la définition et les propriétés des espaces de Lorentz voir [15] et [16]).

Utilisation de l'équation d'Euler sur u . — Nous allons maintenant utiliser des notations complexes. On identifie B^2 avec la boule unité de \mathbb{C} et on note $z = x + iy$. Nous notons

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{d}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \right\rangle + i \left\langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \right\rangle \right]$$

et

$$\alpha^i = \langle e_i, U \rangle = \left\langle e_i, \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle - i \left\langle e_i, \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle.$$

On remarque que $\langle de_i/d\bar{z}, e_j \rangle = a_{ij}$.

Utilisons maintenant le fait que $\text{rot}(\nabla u) = 0$, et que $\text{div}(\nabla u) = \Delta u$ est orthogonal dans \mathbb{R}^k à l'espace tangent à \mathcal{N} en $u(z)$. Ceci entraîne que

$$(8) \quad \left\langle e_i, \frac{dU}{d\bar{z}} \right\rangle = 0.$$

Développons cette équation en utilisant $U = \alpha^j e_j$. Il vient

$$(9) \quad \left\langle e_i, \frac{d\alpha^j}{d\bar{z}} e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \alpha^j \frac{de_j}{d\bar{z}} \right\rangle = \frac{d\alpha^i}{d\bar{z}} + a_{ji} \alpha^j = 0.$$

Donc en notant α le vecteur colonne dans \mathbb{C}^n de composantes α^i et \mathcal{A} la matrice antisymétrique d'éléments a_{ij} , α est solution de l'équation en β

$$(10) \quad \frac{d\beta}{d\bar{z}} = \mathcal{A} \beta,$$

où d'après la première étape \mathcal{A} a ses éléments dans $L_{\text{loc}}^{(2,1)}(B^2)$.

Construction de solutions bornées à l'équation (10). — On peut toujours supposer que $\|\mathcal{A}\|_{L^{(2,1)}} < \sqrt{\pi}/4$, quitte à travailler sur une boule de \mathbb{C} plus petite. Soit b_1, \dots, b_n la base canonique sur \mathbb{C} de \mathbb{C}^n . Nous allons construire n applications β_1, \dots, β_n de B^2 dans \mathbb{C}^n qui vérifient

$$(11) \quad \|\beta_i - b_i\|_{L^\infty(B^2)} < \frac{1}{3},$$

et qui sont solutions de (10). Alors (11) entraîne qu'il existe une application $M = (M_{ij})$ de classe L^∞ de B^2 dans l'espace des matrices inversibles $n \times n$ telle que $b_i = M_{ij} \beta_j$. Pour construire les β_i , soit

$$P(z) = \frac{1}{\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

un noyau de l'opérateur $d/d\bar{z}$, et notons \mathcal{A}' le prolongement de \mathcal{A} à \mathbb{C} tout entier par 0 en dehors de B^2 . Soit T l'opérateur défini sur $L^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$ par :

$$(12) \quad T\beta = P * (\mathcal{A}' \cdot \beta).$$

Montrons que T est borné de $L^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$ dans lui-même. Soit β dans $L^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$; alors $\mathcal{A}' \cdot \beta$ est dans $L^{(2,1)}$ avec :

$$\|\mathcal{A}' \cdot \beta\|_{L^{(2,1)}} \leq \|\beta\|_{L^\infty} \|\mathcal{A}'\|_{L^{(2,1)}},$$

et comme P est dans $L^{(2,\infty)}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ (voir [15], [16]) et que $L^{(2,1)}$ sont en dualité, on obtient

$$\|T\beta\|_{L^\infty} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4} \|P\|_{L^{(2,\infty)}} \|\beta\|_{L^\infty},$$

d'où $\|T\|_{L^\infty} \leq 1/4$ car $\|P\|_{L^{(2,\infty)}} = 1/\sqrt{\pi}$. Donc l'équation

$$(13) \quad \beta - T\beta = b_i$$

admet une solution β_i dans $L^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$, et de plus on vérifie aisément que β_i satisfait (11) et que β_i est solution de (10) en dérivant (13) par rapport à \bar{z} .

CONCLUSION. — Multiplions l'équation (10) dont est solution α par $'\beta_i$; on obtient

$$'\beta_i \cdot \frac{d\alpha}{d\bar{z}} = '\beta_i \cdot \mathcal{A} \alpha = -('(\mathcal{A} \beta_i) \cdot \alpha = - \left(\frac{d\beta_i}{d\bar{z}} \right) \cdot \alpha.$$

Donc on a $(d/d\bar{z})(' \beta_i \cdot \alpha) = 0$, donc $'\beta_i \cdot \alpha = \gamma_i$ où γ_i est holomorphe. On en déduit que $\alpha_i = 'b_i \cdot \alpha = M_{ij} ' \beta_j \cdot \alpha = M_{ij} \gamma_j$, donc que les α_i sont bornés à l'intérieur de B^2 et donc que u est localement lipschitzienne. La régularité de u se déduit par un argument de boot-strap classique.

C.Q.F.D.

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance tout particulièrement à F. Bethuel, H. Brezis et à J.-M. Coron pour des discussions sur le problème, ainsi que à K. Hamdache, P.-L. Lions, C. Margerin, et A. Marini.

Recherche financée par la D.R.E.T.

Note remise le 25 janvier 1991, acceptée le 29 janvier 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C. B. MORREY Jr, The Problem of Plateau on a Riemannian Manifold, *Ann. of Math.*, 49, 1948, p. 807-851; C. B. MORREY Jr, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Grundlehren, 130, Springer, Berlin, 1966.
- [2] M. GRÜTER, Regularity of weak H-surfaces, *J. Reine Angew. Math.*, 329, 1981, p. 1-15.
- [3] R. SCHOEN, Analytic Aspects of the Harmonic Maps Problem, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 2, Springer, Berlin, 1984, p. 321-358.
- [4] S. HILDEBRANDT, H. KAUL et K.-J. WIDMAN, An Existence Theorem for Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds, *Acta Math.*, 138, 1977, p. 1-16.
- [5] F. HÉLEIN, Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphère, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 311, série I, 1990, p. 519-524.
- [6] F. HÉLEIN, Regularity of Weakly Harmonic Maps from a Surface into a Manifold with Symmetries, *Manuscripta Math.* (à paraître)
- [7] J. SACKS et K. UHLENBECK, The Existence of Minimal Immersions of 2-spheres, *Ann. Math.*, 113, 1981, p. 1-24.
- [8] N. S. TRUDINGER, Remarks concerning the Conformal Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds, *Ann. Scu. Norm. Pisa*, III, 22, 1968, p. 265-274.
- [9] H. WENTE, An Existence Theorem for Surfaces of Constant Mean Curvature, *J. Math. Anal. Appl.*, 26, 1969, p. 318-344.
- [10] E. HEINZ, Ein Regularitätssatz für schwache Lösungen nichtlinearer elliptische Systeme, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II. Math.-Phys. Kl.*, 1, 1975, p. 1-13.
- [11] G. DELL'ANTONIO et D. ZWANZIGER, *Every Gauge Orbit passes inside the Gribov Horizon*, Preprint.
- [12] H. BREZIS et J.-M. CORON, Multiple Solutions of H-Systems and Rellich's Conjecture, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37, 1984, p. 149-187.
- [13] R. R. COIFMAN, P.-L. LIONS, Y. MEYER et S. SEMMES, Compacité par compensation et espace de Hardy, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309, série I, 1989, p. 945-949.
- [14] H. BREZIS, Communication privée.
- [15] E. M. STEIN et G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1985.
- [16] W. P. ZIEMER, *Weakly Differentiable Functions*, Graduate Texts in Math., 120, Springer-Verlag, 1989.