Symétries dans les problèmes variationnels et applications harmoniques

Frédéric Hélein

le 12 juin 1998

1 Introduction

Certaines quantités fondamentales en physique (énergie, quantité de mouvement, charge électrique...) peuvent être identifiées comme étant les quantités conservées, c'est à dire admettant une valeur constante au cours du temps, lorsque certaines hypothèses naturelles sont vérifiées. Considérons par exemple le mouvement d'une particule ponctuelle de masse m se déplaçant dans l'espace tridimensionnel, sous l'action d'une force dérivant d'un potentiel $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Désignons par $x(t) = {}^t(x^1, x^2, x^3)(t)$ le vecteur position dans $\mathbb{R}^3$ de cette particule à l'instant t ; la loi de Newton conduit à la relation bien connue :

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = m\ddot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}(x(t)),\ \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Cette équation peut prendre la forme vectorielle $m\ddot{x} = -\nabla V(x)$, où ∇V est le vecteur de composantes $\frac{\partial V}{\partial x^i}$. Une manipulation très simple de cette équation consiste à faire le produit scalaire des deux membres par le vecteur vitesse $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ et écrire

$$m\langle \ddot{x}, \dot{x}\rangle = -\langle \nabla V(x), \dot{x}\rangle = -\frac{d(V(x))}{dt}.$$

Cette équation prend la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + V(x)\right) = 0.$$

La quantité $\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + V(x)$ émerge ainsi simplement des équations de Newton : c'est l'*énergie totale* de la particule dans le potentiel de force V, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Un raisonnement aussi élémentaire permettrait de montrer que si par exemple le potentiel du champ de force est invariant lorsque l'on fait subir à une particule une translation dans la direction des x^1 - ce qui signifie simplement que la fonction V ne dépend pas de x^1, mais seulement de (x^2, x^3) - alors la quantité $m\dot{x}^1$ est constante au cours du temps pour toute solution des équations de Newton. Dans ce cas-là, c'est une des composantes du vecteur *impulsion* $m\dot{x}$ qui est conservée. De même, si on suppose que V ne dépend que de la distance à l'origine dans $\mathbb{R}^3$, ce qui s'écrit $V(x) = V(r)$, où $r = |x|$, on peut vérifier par un calcul direct que le moment de rotation

$$m x \times \dot{x} = m \begin{pmatrix} x^2\dot{x}^3 - x^3\dot{x}^2 \\ x^3\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^3 \\ x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1 \end{pmatrix}$$

est constant au cours du temps.

Ces trois exemples illustrent un principe mathématique général, qui associe à chaque *symétrie infinitésimale* d'une équation différentielle (en l'occurence l'équation de Newton) une quantité, de façon telle que pour toute solution de cette équation, cette quantité est conservée. Ainsi, dans l'exemple de l'équation de Newton, la conservation de l'énergie totale est due à l'invariance de l'équation de Newton par translation dans le temps, ce qui exprime le principe raisonable que les lois qui gouvernent le mouvement de la particule sont identiques à chaque instant. De même, toute symétrie spatiale du problème entraîne l'existence d'autres quantités conservées au cours du temps. Cette intéraction entre symétries et quantités conservée a, semble-t-il, été remarquée pour la première fois par Sophus Lie. Une des manifestations les plus importantes de ce lien symétrie-lois de conservation concerne les équations différentielles *variationnelles* et est contenue dans le *théorème d'Emmy Noether*. Nous verrons d'ailleurs un peu plus loin que les équations de Newton sont d'origine variationnelle (il s'agit du principe de Maupertuis).

Exposons brièvement le théorème de Noether dans un cas simple, celui d'un problème variationnel supposé gouverner le mouvement d'une particule ponctuelle dans l'espace de dimension 3, $\mathbb{R}^3$. A chaque trajectoire γ, vue comme application d'un intervalle de temps I vers $\mathbb{R}^3$, nous associons une *action*

$$\mathcal{A}[\gamma] = \int_I L(t, \gamma, \dot{\gamma}) dt,$$

où L est une fonction régulière de $I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$, appelée *lagrangien* et $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$. Toute trajectoire γ rendant extrémale ou stationnaire l'action $\mathcal{A}$ est appelée *point critique* de $\mathcal{A}$. Cela signifie qu'une trajectoire $\gamma + \epsilon\beta$ qui a même point de départ et d'arrivée que γ (id est β est à support compact dans I), et qui est proche de γ (ce qui revient à supposer que ϵ est très petit) a une action $\mathcal{A}(\gamma + \epsilon\beta)$ qui diffère de $\mathcal{A}(\gamma)$ à l'ordre deux en ϵ (c'est à dire $\mathcal{A}(\gamma + \epsilon\beta) - \mathcal{A}(\gamma) = O(\epsilon^2)$).

Exemple : *Le principe de Maupertuis.*
Si on prend pour L :

$$L(t, \gamma, \dot{\gamma}) = m\frac{|\dot{\gamma}|^2}{2} - V(\gamma),$$

on peut vérifier que tout point critique de $\mathcal{A}$ satisfait l'équation de Newton.

Supposons à présent qu'il existe une famille continue de déformations de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui laisse le problème variationnel invariant et prenons le cas où cette famille est un groupe à un paramètre Φ_s, avec $\Phi_0(x) = x$. L'invariance signifie que pour toute trajectoire γ,

$$\mathcal{A}[\Phi_s \circ \gamma] = \mathcal{A}[\gamma].$$

En supposant que Φ_s dépende de façon régulière ($\mathcal{C}^1$) du paramètre s, on a nécessairement pour s très petit

$$\Phi_s(x) = x + sX(x) + o(s),$$

où X est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^3$. Réciproquement, la connaissance du champ de vecteur X suffit à caractériser Φ_s pour tout $s \in \mathbb{R}$, dés que X est lipschitzien. Ainsi les groupes à un paramètre de symétrie sont reliés aux déformations infinitésimales de l'espace. Et l'invariance de l'action par le groupe $(\Phi_s)_s$ est équivalente à l'équation sur L

$$\sum_{i=1}^{3} X^i(\gamma)\frac{\partial L}{\partial \gamma^i}(t,\gamma,\dot\gamma) + dX^i(\gamma).\dot\gamma\frac{\partial L}{\partial \dot\gamma^i}(t,\gamma,\dot\gamma) = 0.$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Soit L un lagrangien invariant sous l'action infinitésimale de X et soit γ un point critique de $\mathcal{A}(\gamma)$, alors la quantité*

$$J = \sum_{i=1}^{3} X^i(\gamma)\frac{\partial L}{\partial \dot\gamma^i}(t,\gamma,\dot\gamma)$$

est constante au cours du temps.

Ce résultat est une forme élémentaire du théorème de Noether. On peut également énoncer et prouver une version analogue, mais avec un groupe de symétrie qui agit sur l'espace de départ du problème variationnel, c'est à dire ici un groupe de difféomorphismes de l'intervalle I. Mieux encore, il est possible de "mélanger" l'espace et le temps, c'est à dire considérer des champs de vecteurs sur l'espace-temps, voire des champs de vecteurs qui font intervenir un nombre arbitraire de dérivées (cf [Olver]). De plus, ce théorème se généralise aux problèmes variationnels à plusieurs variables, mais alors on n'obtient pas une quantité scalaire constante, mais un champ de vecteurs sur le domaine de départ à divergence nulle.

Dans ce qui suit, nous commencerons par énoncer plus précisement et démontrer quelques versions du théorème de Noether, et nous nous intéresserons ensuite à quelques applications. Notre propos est en effet d'illustrer les mérites de ce résultat à travers ses applications. Elles sont bien connues en physique mathématique, où le théorème de Noether joue un rôle de "principe de correspondance" entre quantités physiques et symétrie. Ici, nous nous intéressons essentiellement à l'analyse d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Nous souhaitons montrer, à travers quelques exemples empruntés à la théorie des applications harmoniques entre variétés, que le théorème de Noether joue également un rôle clef, comme principe de correspondance entre les symétries d'un problème variationnels et les "bonnes quantités" à considérer. Ce phénomène n'est pas totalement nouveau et a déja été remarqué dans le cadre de la théorie de la compacité par compensation.

2 Le théorème de Noether

Nous considérons à présent un problème variationnel à plusieurs variables du premier ordre en les dérivées. Dans ce qui suit, Ω est un domaine ouvert de $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), nous considérons une classe d'applications

$$\mathcal{E} = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n\},$$

sans préciser pour l'instant la régularité de ces applications (on pourrait les choisir de classe $\mathcal{C}^2$). A chaque $u \in \mathcal{E}$ nous associons l'action

$$\mathcal{A}[u] = \int_\Omega L(x, u(x), du(x))dx.$$

Ici, L est une fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^n \times M(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, $M(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des matrices réelles $m \times n$, que l'on identifie avec l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}^n$. $du(x)$ est la matrice jacobienne de u, ou différentielle de u au point x :

$$du = \begin{pmatrix} u_1^1 & \cdots & u_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^n & \cdots & u_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}.$$

Toute application u dans $\mathcal{E}$ est point critique de $\mathcal{A}$ si et seulement si, pour toute application $v \in \mathcal{E}$ qui soit à support compact dans Ω et pour $s \in \mathbb{R}$ proche de 0,

$$\mathcal{A}[u + sv] = \mathcal{A}[u] + o(s).$$

On démontre aisément que u est point critique de $\mathcal{A}$, si et seulement si u est solution du système d'équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^i} \right), \text{ pour } i = 1, ..., n.$$

Nous allons envisager à présent ce qui se passe lorsque un tel problème variationnel est invariant sous l'effet d'un groupe de symétrie à un paramètre.

2.1 Symétrie agissant sur l'espace d'arrivée

C'est le cas le plus simple à étudier. Nous supposons qu'il existe un champ de vecteurs $U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ agissant sur l'espace d'arrivée. Notons Φ_s le flot engendré par U, c'est à dire la solution de

$$\Phi_0(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\frac{d\Phi_s(y)}{ds} = U(\Phi_s(y)), \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall s \in \mathbb{R}.$$

A partir de la famille de difféomorphismes Φ_s, nous pouvons déduire une famille de déformations agissant sur les applications de Ω vers $\mathbb{R}^n$. Ces déformations sont obtenues géométriquement en faisant agir Φ_s sur le graphe d'une application u : le graphe de l'application ainsi déformée u_s est l'image par (Id, Φ_s) du graphe de u. En fait il est immédiat que

$$u_s = \Phi_s \circ u.$$

Ainsi nous allons faire l'hypothèse que pour tout sous-domaine $\omega \subset \Omega$, et pour toute application u de ω vers $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{A}_\omega[\Phi_s \circ u] = \mathcal{A}_\omega[u],$$

où $\mathcal{A}_\omega[u] = \int_\omega L(x, u, du)dx$. Cette condition entraîne en particulier que pour tout ω,

$$\mathcal{A}_\omega[u + sU \circ u] = \mathcal{A}_\omega[u] + o(s).$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout ω, elle est équivalente à la condition $\forall (x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times M(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$,

$$L(x, y + sU(y), z + sdU(y).z) = L(x, y, z) + o(s). \tag{1}$$

Théorème 2.1 *Supposons que U soit une symétrie infinitésimale de $\mathcal{A}$, c'est à dire que (1) ait lieu. Soit u un point critique de $\mathcal{A}$, alors le champ de vecteurs J sur Ω de composantes :*

$$J^\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} U^i(u(x)) \frac{\partial L}{\partial u^i_\alpha}(x, u(x), du(x))$$

est à divergence nulle, id est

$$divJ = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{2}$$

Preuve L'idée est d'utiliser le fait que l'action $\mathcal{A}(u)$ de u est stationnaire sous l'effet d'une perturbation qui est une *modulation* de $U(u)$. Nous choisissons donc une fonction $\phi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega, \mathbb{R})$ et nous déduisons du fait que u est point critique la relation

$$\mathcal{A}[u + s\phi U \circ u] = \mathcal{A}[u] + o(s). \tag{3}$$

Développons $\mathcal{A}[u + s\phi U \circ u]$. Comme nous allons le voir, il n'est pas nécessaire de développer totalement cette expression pour pouvoir exploîter la propriété de symétrie de $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[u + s\phi U \circ u] &= \int_\Omega L(x, u + s\phi U(u), du + s\phi dU(u) + sd\phi U(u))dx \\
&= \int_\Omega L(x, u + s\phi U(u), du + s\phi dU(u))dx \\
&+ s\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} U^i(u) \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial u^i_\alpha}(x, u, du)dx + o(s).
\end{aligned}$$

Maintenant, nous utilisons l'hypothèse de symétrie et plus particulièrement la relation (1) en y substituant $s\phi$ à s. Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[u + s\phi U \circ u] &= \mathcal{A}[u] + s\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} U^i(u) \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial u^i_\alpha}(x, u, du)dx + o(s) \\
&= \mathcal{A}[u] + s\int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} J^\alpha dx + o(s).
\end{aligned}$$

Si à présent nous comparons cette dernière expression avec la relation (3), nous en déduisons que

$$\int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} J^\alpha dx = 0, \forall \phi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega, \mathbb{R}).$$

Et c'est précisemment la formulation faible de la conclusion de notre résultat. *CQFD.*

2.2 Symétrie agissant sur l'espace de départ

Nous avons un résultat analogue au précédent dans le cas où le problème variationnel est invariant par un groupe de difféomorphismes agissant sur l'espace de départ. Cependant, la description de cette action sur les applications de Ω vers l'espace d'arrivée nécessite un peu plus de soin, car en général, le domaine de départ peut être modifié par une telle transformation. Soit donc Ψ_s une famille de difféomorphismes à un paramètre qui forme un groupe pour la composition. Ψ_s est le flot d'un champ de vecteurs X défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant Ω. Cela entraîne en particulier que pour s proche de 0, on a

$$\Psi_s(x) = x + sX(x) + o(s). \tag{4}$$

L'image par Ψ_s de Ω est un ouvert Ω_s, différent de Ω en général. Considérons une application u de Ω vers $\mathbb{R}^n$: quelle est l'action de Ψ_s sur u ? u est transformée en u_s de façon telle que le graphe de u_s est l'image du graphe de u par la transformation (Ψ_s, Id) agissant sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Donc le domaine de définition de u_s sera $\Omega_s = \Psi_s(\Omega)$, et u_s satisfait à

$$u_s \circ \Psi_s = u, \forall s. \tag{5}$$

A présent nous dirons que le problème variationnel $\mathcal{A}$ est invariant par X si et seulement si pour tout sous-domaine $\omega \subset \Omega$,

$$\mathcal{A}_{\Psi_s(\omega)}[u_s] = \mathcal{A}_\omega[u].$$

Une façon d'écrire cette relation est de faire le changement de variable $x = \Psi_s(\xi)$, pour $\xi \in \omega$ dans l'intégrale de gauche. Cela donne

$$\int_\omega L\left(\Psi_s(\xi), u_s(\Psi_s(\xi)), du_s(\Psi_s(\xi))\right) det(d\Psi_s(\xi))d\xi = \mathcal{A}_\omega[u].$$

Or, en dérivant la relation (5), on obtient :

$$du_s(\Psi_s(\xi)).d\Psi_s(\xi) = du(\xi),$$

d'où

$$du_s(\Psi_s(\xi)) = du(\xi).[d\Psi_s(\xi)]^{-1}.$$

Donc, en utilisant cette équation et (5), on obtient

$$\int_\omega L\left(\Psi_s(\xi), u(\xi), du(\xi).[d\Psi_s(\xi)]^{-1}\right) \det(d\Psi_s(\xi))d\xi = \mathcal{A}_\omega[u]. \tag{6}$$

Nous pouvons déduire une version infinitésimale de cette relation, en supposant que s est petit et en développant au premier ordre :

$$\mathcal{A}_\omega[u] = \int_\omega L\left(x + sX(x), u(x), du(x).[\mathbb{1} - sdX(x)]\right) \det(\mathbb{1} + sdX(x))dx + o(s).$$

Et comme cette relation doit être valable pour tout ω, nécessairement, $\forall(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times M(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$,

$$L\left(x + sX(x), y, z.[\mathbb{1} - sdX(x)]\right)(1 + s\mathrm{div}X(x)) = L(x, y, z) + o(s). \tag{7}$$

Théorème 2.2 *Supposons que X soit une symétrie infinitésimale de $\mathcal{A}$, c'est à dire que (7) ait lieu. Soit u un point critique de $\mathcal{A}$, alors le champ de vecteurs J sur Ω de composantes :*

$$J^\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^m X^\beta(x) \frac{\partial u^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial L}{\partial u^i_\alpha}(x, u(x), du(x)) - X^\alpha(x) L(x, u(x), du(x))$$

est à divergence nulle.

Remarque 1 *On peut également noter J^α sous la forme*

$$J^\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^m X^\beta(x) H_\beta^\alpha(x),$$

où H_β^α est le tenseur hamiltonien *défini par*

$$H_\beta^\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^i}(x, u(x), du(x)) - \delta_\beta^\alpha L(x, u(x), du(x)).$$

Preuve Nous allons fabriquer une perturbation de u en "modulant" l'action de X par une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R})$. Cela donne une application v_s de Ω vers $\mathbb{R}^n$ telle que

$$v_s(x + s\phi(x)X(x)) = u(x).$$

Remarquons que si s est suffisamment petit, $x \longmapsto x + s\phi(x)X(x)$ est un difféomorphisme de Ω dans lui-même. On peut donc faire le changement de variable $x = \xi + s\phi(\xi)X(\xi)$, afin de calculer l'action de v_s :

$$\mathcal{A}_\Omega[v_s] = \int_\Omega L(x, v_s(x), dv_s(x))dx$$

$$= \int_\Omega L\left(\xi + s\phi(\xi)X(\xi), u(\xi), du(\xi).[\mathbb{1} + sd(\phi(\xi)X(\xi))]^{-1}\right) \det[\mathbb{1}+sd(\phi(\xi)X(\xi))]d\xi$$

$$= \int_\Omega L\left(\xi + s\phi(\xi)X(\xi), u(\xi), du(\xi).[\mathbb{1} - sd(\phi(\xi)X(\xi))]\right) [1+s\mathrm{div}(\phi(\xi)X(\xi))]d\xi+o(s).$$

Développons cette expression et ensuite, utilisons l'hypothèse (7) (en remplaçant s par $s\phi(x)$) :

$$\mathcal{A}_\Omega[v_s] = \int_\Omega L\left(x + s\phi(x)X(x), u(x), du(x)..[\mathbb{1} - s\phi(x)d(X(x))]\right) [1+s\phi(x)\mathrm{div}X(x)]dx$$

$$+s\int_\Omega [-\sum_{\alpha,\beta=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}(x)\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}(x)X^\beta(x)\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^i}(x, u(x), du(x))$$

$$+\sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}(x)X^\alpha(x)L(x, u(x), du(x))]dx + o(s).$$

$$= \mathcal{A}_\Omega[u] - s\int_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}(x)X^\beta(x)H_\beta^\alpha(x)dx + o(s).$$

Il ne reste plus maintenant qu'à utiliser le fait que u est point critique de $\mathcal{A}$, et donc que $\mathcal{A}_\Omega[v_s] = \mathcal{A}_\Omega[u] + o(s)$, pour en déduire que

$$-\int_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}(x)X^\beta(x)H_\beta^\alpha(x)dx = 0.$$

Cela établit que J est à divergence nulle. *CQFD.*

Remarque 2 *Dans le cas particulier où le lagrangien L ne dépend pas de $x \in \Omega$ mais est seulement une fonction de (u, du), le problème variationnel est invariant par les translations de $\mathbb{R}^m$ et on déduit du théorème précédent que $\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial H_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$, pour tout $\beta = 1, ...m$.*

2.3 Symétries agissant sur le produit de l'espace de départ par l'espace d'arrivée

Nous pouvons aussi envisager des situations où le problème variationnel est invariant sous l'effet d'un groupe qui agit sur les variables de départs et d'arrivée. Soit Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant Ω strictement. Nous considérons un champ de vecteurs $(X, U) : \Omega' \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dont le flot $\Xi_s(x, y) = (\Psi_s(x, y), \Phi_s(x, y))$ est une famille continue de déformations par difféomorphismes de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ à l'intérieur de $\Omega' \times \mathbb{R}^n$, (si s est suffisamment petit). Toute application u définie sur un ouvert $\omega \subset \Omega$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est ainsi déformée en $u_s : \omega_s \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On définit u_s en disant que son graphe est l'image par Ξ_s du graphe de u. On obtient ainsi

$$u_s(\Psi_s(x, u(x))) = \Phi_s(x, u(x)).$$

L'hypothèse d'invariance de l'action $\mathcal{A}_\omega$ est :

$$\mathcal{A}_{\omega_s}[u_s] = \mathcal{A}_\omega[u].$$

Nous avons alors un théorème qui généralise simultanément les deux résultats précédents. Pour l'énoncer, nous définissons l'impulsion généralisée

$$P_i^\alpha(x, u(x), du(x)) := \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^i}(x, u(x), du(x)),$$

et nous utilisons également la notation du tenseur hamiltonien H_β^α défini dans le paragraphe précédent.

Théorème 2.3 *Supposons que (X, U) soit une symétrie infinitésimale de $\mathcal{A}$. Soit u un point critique de $\mathcal{A}$, alors le champ de vecteurs J sur Ω de composantes :*

$$J^\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^{m} X^\beta(x, u(x)) H_\beta^\alpha(x) + \sum_{i=1}^{n} U^i(x, u(x)) P_i^\alpha(x)$$

est à divergence nulle.

2.4 Un exemple d'une utilisation du théorème de Noether : le problème de Yamabe

Nous allons montrer, à l'aide du résultat précédent, un résultat, dû à S. Pohozaev, sur la non-existence de solutions positives à l'équation :

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u - |u|^{\frac{4}{m-2}}u & = & 0 & \text{sur } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \tag{8}$$

Nous supposons ici que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, avec $m \geq 3$, dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et u est dans $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ (en fait on pourrait supposer seulement que u est dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}) = \{u \in L^2(\Omega)/\frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \in L^2(\Omega), \forall \alpha = 1, ..., m\}$). On dit que le domaine Ω est étoilé, s'il existe un point de Ω, que par commodité nous noterons 0, tel que pour tout point x de $\partial\Omega$, le vecteur $\overrightarrow{0x} = x$ pointe vers l'extérieur de Ω en x ; donc si n est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$ en x, $\langle n, \overrightarrow{0x}\rangle \geq 0$. En 1965, S. Pohozaev démontra que si Ω est étoilé, alors la seule solution positive ou nulle de (8) est la solution nulle [Pohozaev].

Preuve Rappelons que l'équation (8) est l'équation d'Euler des points critiques sur $\mathcal{C}^1_0(\Omega, \mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})/u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ de la fonctionnelle

$$\mathcal{A}_\Omega[u] = \int_\Omega (\frac{|du|^2}{2} - \frac{(m-2)|u|^{\frac{2m}{m-2}}}{2m})dx.$$

Cette fonctionnelle possède plusieurs propriétés d'invariance. La plus facile à remarquer est l'invariance par translation sur $\mathbb{R}^m$. Une autre invariance est liée aux dilatation de $\mathbb{R}^m$. Nous pouvons remarquer en effet que pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$u_s(x) = e^{\frac{2-m}{2}s}u(e^{-s}x)$$

défini sur $\Omega_s = e^s\Omega$ satisfait à

$$\mathcal{A}_{\Omega_s}[u_s] = \mathcal{A}_\Omega[u].$$

C'est un simple calcul, où il suffit de faire le changement de variable $x = e^s x'$. Nous pouvons exprimer cette propriété en disant que cette action est invariante sous l'effet du flôt

$$\begin{array}{rccc} (\Psi_s, \Phi_s) : & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & (e^s x, e^{\frac{2-m}{2}}y), \end{array}$$

engendré par le champ de vecteurs $x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{2-m}{2}y\frac{\partial}{\partial y}$. Par conséquent le théorème précédent s'applique. Nous obtenons que

$$J^\alpha = \frac{2-m}{2}u\frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + x^\beta \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u}{\partial x^\beta} - x^\alpha(\frac{|du|^2}{2} - \frac{m-2}{2m}|u|^{\frac{2m}{m-2}})$$

est à divergence nulle si u est point critique. Appliquons la formule de Stokes, notant n la normale extérieure à $\partial\Omega$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \mathrm{div} J dx = \int_{\partial\Omega} J.n d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{2-m}{2} u \frac{\partial u}{\partial n} + du(x) \frac{\partial u}{\partial n} - \langle x, n\rangle (\frac{|du|^2}{2} - \frac{m-2}{2m} |u|^{\frac{2m}{m-2}}) \right) d\sigma.
\end{aligned}
$$

Nous pouvons simplifier cette expression en exploitant la relation $u = 0$ sur $\partial\Omega$ sous une forme brute et sous la forme du corollaire suivant. Décomposons x en $x = \langle x, n\rangle n + x^\perp$ où $x^\perp$ est la projection de x sur le plan tangent à $\partial\Omega$ en x. L'hypothèse que $u = 0$ sur $\partial\Omega$ entraîne que $du(x^\perp) = 0$. Ainsi

$$du(x) = du(n)\langle x, n\rangle + du(x^\perp) = du(n)\langle x, n\rangle.$$

Nous en déduisons que (remarquant aussi que $|du| = |du(n)|$) :

$$\int_{\partial\Omega} \langle x, n\rangle \frac{du(n)^2}{2} d\sigma = 0.$$

Or, puisque Ω est étoilé, $\langle x, n\rangle \geq 0$ et la relation précédente n'est possible que si $du(n) = 0$ en au moins un point de $\partial\Omega$.

Il reste à en déduire que $u = 0$ partout. Dans un premier temps, grâce au principe du maximum fort, nous déduisons des hypothèses $u = 0$ sur $\partial\Omega$, $u \geq 0$ sur Ω et $-\Delta u \geq 0$ sur Ω que, soit $u = 0$ partout (auquel cas la démonstration est terminée), soit $u > 0$ sur Ω. Plaçons-nous dans ce dernier cas. Le bord étant de classe $\mathcal{C}^2$, nous pouvons appliquer le principe du maximum de Hopf, nous en déduisons que $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ sur $\partial\Omega$, ce qui contredit le fait qu'il existe un point de $\partial\Omega$ où $du(n) = 0$. *CQFD.*

3 Applications harmoniques

Les applications harmoniques constituent une généralisation des fonctions harmoniques à valeurs réelles ou vectorielles et des géodésiques. Rappelons qu'étant donné un domaine Ω de $\mathbb{R}^m$, une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite harmonique si elle solution de l'équation de Laplace

$$\Delta f = 0 \text{ sur } \Omega,$$

ou, de façon équivalente, si elle est point critique de l'action

$$\mathcal{A}[u] = \int_\Omega \frac{|du|^2}{2} dx$$

sur l'ensemble $\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\}$. Cette action est la fonctionnelle de Dirichlet. De même, si on se donne une sous-variété différentiable $\mathcal{N}$, que nous supposerons plongée dans $\mathbb{R}^N$, une application γ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{N}$ qui est solution de

$$\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}\mathcal{N}, \forall t \in I,$$

est une paramétrisation à vitesse constante d'une géodésique de $\mathcal{N}$. Une caractérisation variationnelle des solutions d'une telle équation est qu'elles sont les points critiques de la fonctionnelle

$$\mathcal{A}[\gamma] = \int_I \frac{|\dot{\gamma}|^2}{2} dt$$

sur l'ensemble des applications de I vers $\mathcal{N}$.

Nous remarquons que les deux fonctionnelles en question sont tout à fait similaires. En fait, il s'agit de deux cas particuliers du problème variationnel suivant.

3.1 Applications harmoniques régulières

Considérons Ω un domaine de $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{N}$ une sous-variété différentiable (de classe $\mathcal{C}$), sans bord, de dimension n, plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$. Nous définissons la *fonctionnelle de Dirichlet* E définie sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications u de Ω vers $\mathcal{N}$ par

$$E[u] = \int_\Omega \frac{|du|^2}{2} dx.$$

Nous appellerons *application harmonique* tout point critique de E sur $\mathcal{E}$. Il convient de donner quelques précisions, premièrement sur $|du|$. Par le plongement de $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{R}^N$, nous pouvons voir u aussi bien comme une application à valeurs dans $\mathcal{N}$ que dans $\mathbb{R}^N$. Ainsi, la matrice jacobienne du peut être vue comme la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^N$

$$du = \begin{pmatrix} u_1^1 & \cdots & u_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^N & \cdots & u_m^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u^N}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^N}{\partial x^m} \end{pmatrix}.$$

La notation $|du|^2$ désigne alors la norme de Hilbert-Schmidt de du

$$|du|^2 = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right)^2.$$

Deuxièment, il faut également définir ce que l'on entend par point critique. Une application $u : \Omega \longrightarrow \mathcal{N}$ est point critique de E si pour toute famille d'applications $u_s : \Omega \longrightarrow \mathcal{N}$, paramétrée de façon $\mathcal{C}^1$ par $s \in]-\epsilon, \epsilon[$ et telle que $u_0 = u$ sur Ω et $u_s = u$ en dehors d'un compact de Ω, on a

$$\frac{d}{ds} E[u_s]_{|s=0} = 0.$$

Il y a deux façons naturelles de produire une telle famille de déformations u_s.

(1) La première consiste à définir le voisinage tubulaire

$$V_\delta \mathcal{N} = \{y \in \mathbb{R}^N / d(y, \mathcal{N}) < \delta\},$$

où $\delta > 0$ est suffisamment petit pour que tout point y de $V_\delta \mathcal{N}$ admette une unique projection $P(y) \in \mathcal{N}$, c'est à dire un point de $\mathcal{N}$ situé à la distance $d(y, \mathcal{N})$ de y. Cela détermine une application $P : V_\delta \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ qui est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ si $\mathcal{N}$ est de classe $\mathcal{C}^k$. Alors, pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^2_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si $|s| < \epsilon$, $u(x) + sv(x) \in V_\delta \mathcal{N}$ et nous pouvons définir

$$u_s = P(u + sv).$$

Si u est point critique de E par rapport à ce type de variations, nous dirons que u est *harmonique*.

(2) Une deuxième méthode pour déformer u est de considérer un champ de vecteurs tangents X sur Ω, à support compact, et construire le flôt $\Psi_s : \Omega \longrightarrow \Omega$ de ce champ de vecteurs, c'est à dire la solution de l'équation $\frac{d}{ds}\Psi_s(x) = X(\Psi_s(x))$ avec la condition initiale $\Psi_0(x) = x$. On peut alors déformer u en

$$u_s = u \circ \Psi_s.$$

Si u est point critique de E par rapport à ce type de variations, nous dirons que u est *Noether harmonique*.

Equations d'Euler-Lagrange

Pour un point critique par rapport au premier type de déformation, nous avons la caractérisation suivante

Lemme 1 *Une application $u : \Omega \longrightarrow \mathcal{N}$ est harmonique si et seulement si elle satisfait l'équation*

$$\Delta u(x) \perp T_{u(x)}\mathcal{N} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega.$$

Cette équation est équivalente à

$$\Delta u(x) + A(u)(du, du) = 0, \forall x \in \Omega,$$

où A est une forme bilinéaire définie sur $T_{u(x)}\mathcal{N}$, à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^N$ dans lequel est immergé $\mathcal{N}$, à coefficients dépendant de façon régulière de u : c'est la seconde forme fondamentale.

Pour la preuve de ce résultat, voir [Hélein 4].

Exemple *Dans le cas où $\mathcal{N}$ est la sphère $S^2 := \{y \in \mathbb{R}^3/|y| = 1\}$, la condition d'orthogonalité ($\Delta u(x) \perp T_{u(x)}\mathcal{N}$) se traduit par $\Delta u(x)//u(x)$. Cela signifie que l'on peut trouver une fonction k de Ω vers $\mathbb{R}$, telle que*

$$\Delta u(x) + k(x)u(x) = 0, \forall x \in \Omega.$$

La valeur de k est donnée par $k = -\langle \Delta u, u\rangle$. Mais k peut être calculée en fonction des dérivées premières de u en remarquant que

$$0 = \Delta 1 = \Delta |u|^2 = 2\langle \Delta u, u\rangle + 2|du|^2,$$

d'où l'on déduit que u satisfait à l'équation

$$\Delta u + u|du|^2 = 0.$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour le deuxième type de variations sera explicitée plus loin, à l'aide du théorème de Noether. Remarquons toutefois que, pour ce type de variation, on a, à l'ordre 1 en s

$$\begin{aligned} u_s(x) &= u(x + sX(x)) + o(s) \\ &= u(x) + s\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}(x)X^\alpha(x) + o(s) \\ &= P(u(x) + sdu(x).X(x)) + o(s), \end{aligned}$$

et que donc, le deuxième type de déformation est, à l'ordre 1 en s, un cas particulier du premier type de variation, avec $v(x) = du(x).X(x)$.

Cela signifie que toute application harmonique est Noether harmonique. En revanche la réciproque est fausse : par exemple, toute paramétrisation à vitesse constante d'une courbe quelconque d'une variété $\mathcal{N}$ est une application Noether harmonique d'un intervalle dans $\mathcal{N}$, mais n'est pas harmonique en général, sauf si la courbe image est une géodésique. De même, toute paramétrisation conforme d'une surface de $\mathcal{N}$ est Noether harmonique, mais n'est pas harmonique en général, sauf si la surface image est minimale. De plus, nous verrons plus loin que lorsque l'on parle de solutions faibles (au sens des distributions) de ces problèmes, la distinction entre les deux types de variations est encore plus profonde, car il existe des *applications faiblement harmoniques* qui ne sont pas des *applications faiblement Noether harmoniques*.

3.2 Théorème de Noether pour les applications harmoniques

Nous remarquons que la fonctionelle de Dirichlet pour des applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ dans une variété quelconque est invariante sous l'effet des translations de $\mathbb{R}^m$ (invariance au sens défini dans la section précédente). Nous sommes donc dans un cas où le théorème de Noether s'applique. Puisque le groupe de symétrie en question n'agit que sur l'espace de départ, nous n'avons même pas besoin de supposer qu'une application est harmonique pour l'appliquer et l'hypothèse de Noether-harmonicité suffit. Nous en déduisons le

Théorème 3.1 *Si $u : \Omega \longrightarrow \mathcal{N}$ est Noether harmonique, alors son tenseur hamiltonien*

$$H_\beta^\alpha = \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \rangle - \delta_\beta^\alpha \frac{|du|^2}{2}$$

est à divergence nulle, id est, $\forall \beta = 1, ..., m$,

$$\sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial H_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Réciproquement, cette équation caractérise les applications Noether harmoniques.

Remarque *Il est possible de définir une généralisation de ce tenseur pour des applications harmoniques définies sur des variétés riemanniennes. Soit g la métrique sur la variété $\mathcal{M}$ de départ. A toute application u définie sur un ouvert de $\mathcal{M}$ et à valeurs dans $\mathcal{N}$, on associe le tenseur énergie-impulsion*

$$S_{\alpha\beta} = \frac{|du|^2}{2} g_{\alpha\beta} - \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \rangle$$

où $|du|^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^m g^{\alpha\beta}(x) \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \rangle$. Dans le cas où $\mathcal{M}$ coïncide avec $\mathbb{R}^m$, alors on a $S_{\alpha\beta} = -H_\beta^\alpha$. On peut alors démontrer une version "covariante" du théorème de Noether, qui est plus ou moins une conséquence de l'invariance de l'action de Dirichlet par changement de coordonnées sur la variété de départ (noter qu'un tel changement de coordonnée affecte à la fois l'application u et l'expression de la métrique g et n'est donc pas à proprement parler une symétrie du problème variationnel). On établit en effet que pour toute application (Noether) harmonique u, son tenseur énergie-impulsion est à divergence covariante nulle : $\forall \gamma = 1, ..., m$,

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^m g^{\alpha\beta} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} S_{\beta\gamma} = 0$$

Ce résultat a été démontré dans [Baird, Eells]. Il ne s'agit pas véritablement d'une loi de conservation. Il est clair que, sauf dans les cas particuliers où il existe un groupe continu de difféomorphismes isométriques qui agissent sur $\mathcal{M}$, le théorème de Noether ne peut pas s'appliquer aux applications harmoniques de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$. Il existe cependant une exception, qui est lorsque la dimension de $\mathcal{M}$ est égale à 2. Alors l'action de Dirichlet est invariante sous l'action du groupe des transformations conformes de $\mathcal{M}$. Ce groupe est très gros en dimension deux, il s'agit essentiellement des transformations holomorphes et anti-holomorphes de $\mathcal{M}$.

Exemple *Un théorème d'unicité pour les applications harmoniques.*

En suivant une stratégie analoque à celle de Pohozaev, J. Wood a démontré le résultat suivant [Wood] :

Théorème 3.2 *Soit Ω un domaine étoilé de $\mathbb{R}^m$, pour $m \geq 3$ et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathcal{N})$ une application harmonique telle que $u = C^{ste}$ sur $\partial\Omega$. Alors u est constante sur Ω.*

Preuve Nous allons exploiter le fait que le problème est invariant sous l'effet des translations de $\mathbb{R}^m$. Il en résulte que le tenseur hamiltonien

$$H^\alpha_\beta = \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \rangle - \delta^\alpha_\beta \frac{|du|^2}{2}$$

est à divergence nulle. Considérons le champ de vecteurs $X^\alpha = \sum_{\beta=1}^m x^\beta H^\alpha_\beta$ (l'origine O ayant été fixée de façon à ce que Ω soit étoilé par rapport à O). Sa divergence est

$$\text{div} X = \sum_{\alpha=1}^m H^\alpha_\alpha = (1 - \frac{m}{2})|\nabla u|^2.$$

Nous appliquons la formule de Stokes

$$(1 - \frac{m}{2}) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega \text{div} X dx = \int_{\partial\Omega} X^\alpha . n^\alpha d\sigma.$$

Et sur le bord de Ω,

$$X^\alpha . n^\alpha = \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} x^\alpha, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle - x^\alpha n^\alpha \frac{|\nabla u|^2}{2} = \frac{1}{2}|\nabla u|^2,$$

car u est constante sur $\partial\Omega$ (et donc en particulier $\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}$ est proportionnel à n^α). Donc

$$0 \geq (1 - \frac{m}{2}) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \geq 0.$$

Il en résulte que $|\nabla u|^2 = 0$ sur Ω et donc que u est constante. *CQFD.*

Remarque *Le même résultat a été démontré en dimension deux par Luc Lemaire [Lemaire].*

Un deuxième exemple d'application du théorème de Noether aux applications harmoniques correspond au cas où un groupe continu d'isométries agit sur la variété d'arrivée $\mathcal{N}$. Supposons par exemple qu'il existe un champ de vecteurs U sur $\mathcal{N}$ dont le flot Φ_s est une famille d'isométries de $\mathcal{N}$. Un tel champ de vecteurs est appelé *Champ de Killing* et est caractérisé par l'équation

$$\nabla_U h = 0,$$

où h est la métrique sur $\mathcal{N}$. En appliquant le Théorème 2.1, on obtient immédiatement ce qui suit.

Théorème 3.3 *Si $u : \Omega \longrightarrow \mathcal{N}$ est harmonique et si U est une champ de Killing sur $\mathcal{N}$, alors le champ de vecteurs J, défini sur Ω, de composantes*

$$J^\alpha(x) = \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, U(u(x)) \rangle$$

est à divergence nulle.

Exemple *La sphère $S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}/|y| = 1\}$. Pour tout $1 \leq i, j \leq n+1$, le champ de vecteurs*

$$U_{ij} := y^i \frac{\partial}{\partial y^j} - y^j \frac{\partial}{\partial y^i}$$

est un champ de vecteurs tangents à la sphère, de Killing. Le flot d'un de ces champs de vecteurs est une famille à un paramètre de rotations de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, bien entendu, laisse la sphère invariante. L'espace vectoriel engendré par ces champs de vecteurs est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ (puisque $U_{ij} + U_{ji} = 0$) et forme une algèbre de Lie pour le crochet de Lie des champs de vecteurs qui n'est pas autre chose que $so(n+1)$, algèbre de Lie du groupe $SO(n+1)$ des rotations de $\mathbb{R}^{n+1}$. Si maintenant nous considérons un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$, alors pour toute application $u : \Omega \longrightarrow S^n$ et pour toute rotation $R \in SO(n+1)$,

$$E_\Omega[R.u] = E_\Omega[u].$$

Appliquons le théorème 2.1 : pour toute application harmonique $u : \Omega \longrightarrow S^n$,

$$J^\alpha_{ij} = u^i u^j_\alpha - u^j u^i_\alpha$$

est à divergence nulle, id est

$$\sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(u^i \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} - u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right) = 0.$$

Démystifions le théorème de Noether

Sur l'exemple précédent - une application harmonique à valeurs dans la sphère - le théorème de Noether conduit à une conclusion très simple, en comparaison avec la complexité des théorèmes généraux 2.1 et 2.2. En particulier, il est bien plus simple dans cette situation de retrouver le résultat à la main, à savoir écrire

$$\sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(u^i \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} - u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right) = u^i \Delta u^j - u^j \Delta u^i = 0,$$

car Δu est parallèle à u.

En somme, il est parfois plus facile de vérifier directement la loi de conservation directement, plutôt qu'en appliquant mécaniquement le théorème. L'intérêt de ce résultat ne réside donc pas dans la puissance de sa preuve, mais dans son caractère prédictif. Un des buts des notes qui suivent est de convaincre le lecteur qu'il existe une sorte de principe "philosophique" qui accompagne le théorème de Noether, à savoir que les lois de conservations doivent être utilisées.

3.3 Applications faiblement harmoniques

L'obtention d'applications harmoniques par des techniques d'analyse passe par la construction d'un espace fonctionnel d'applications de Ω dans $\mathcal{N}$ sur lequel la fonctionnelle de Dirichlet est définie. Nous utilisons l'espace suivant :

$$H^1(\Omega,\mathcal{N}) := \{u \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^N)/u(x) \in \mathcal{N} p.p.\}.$$

Ici $\mathcal{N}$ est supposé être plongé isométriquement dans $\mathbb{R}^N$, muni du produit scalaire standard $\langle .,. \rangle$. Cette définition peut paraître assez curieuse au début, car nous sommes obligés d'utiliser un plongement isométrique de la variété riemannienne $\mathcal{N}$ dans un espace euclidien - opération non intrinsèque, mais qui est toujours réalisable sur le plan "pratique" grâce au théorème de Nash-Moser. Cependant la théorie qui en résulte ne dépend pas du plongement utilisé (cf [Hélein 4]).

Exemple *L'ensemble $H^1(B^3,S^2)$, où ici, $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3/|x| < 1\}$. Un exemple intéressant d'application dans $H^1(B^3,S^2)$ est*

$$\begin{array}{rccc} u_\star : & B^3 & \longrightarrow & S^2 \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{|x|}. \end{array} \tag{9}$$

Cette application est régulière en dehors de 0 et son énergie de Dirichlet, $\int_{B^3} |\nabla u_\star|^2 dx$ est finie. On remarque que, pour toute sphère $S^2_{a,r} = a + rS^2 \subset B^2$ qui ne rencontre pas 0, la quantité

$$deg(u,S^2_{a,r}) := \frac{1}{4\pi}\int_{S^2_{a,r}} u^1du^2 \wedge du^3 + u^2du^3 \wedge du^1 + u^3du^1 \wedge du^2$$

vaut 1 si 0 est intérieur à $S^2_{a,r}$ et 0 si 0 est extérieur à $S^2_{a,r}$; $deg(u,S^2_{a,r})$ est le degré topologique de u restreint à la sphère $S^2_{a,r}$ et compte algébriquement le nombre de fois que la restriction de u à la sphère $S^2_{a,r}$ recouvre S^2. On dit que 0 est une singularité de degré 1 de u.

Par ailleurs, on pourrait imaginer utiliser d'autres définitions telles que l'adhérence de $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathcal{N})$ dans $H^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$, c'est à dire l'ensemble des applications de $H^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ qui sont limites dans la topologie H^1 d'applications dans $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathcal{N})$. Dans certains cas, cette adhérence coïncide avec $H^1(\Omega,\mathcal{N})$, comme par exemple si $m = 2$ [Schoen, Uhlenbeck 1].. Mais c'est faux en général si $m \geq 3$ [Bethuel, Zheng], [Bethuel 1]. De fait, $\overline{\mathcal{C}^2(\Omega,\mathcal{N})}^{H^1}$ n'est pas utilisé pour plusieurs raisons : cet ensemble n'est pas fermé pour la topologie faible de $H^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ en général (comme par exemple si Ω est de dimension 3 et $\mathcal{N}$ est la sphère S^2, [Bethuel

1]) et l'application $u_\star$ est dans $H^1(B^3,S^2)$, mais n'est pas dans $\overline{\mathcal{C}^2(B^3,S^2)}^{H^1}$ [Bethuel 1]. Or cette application joue un rôle très important, dans la mesure où nous verrons qu'elle est faiblement harmonique, c'est à dire point critique de la fonctionelle de Dirichlet (et même minimisante).

La fonctionnelle de Dirichlet est définie et est manifestement continue sur $H^1(\Omega,\mathcal{N})$. On aurait envie qu'elle soit aussi dérivable, si il n'y avait pas la difficulté suivante : $H^1(\Omega,\mathcal{N})$ n'est pas une variété différentielle et il n'existe pas de systèmes de cartes sur cet espace. Par conséquent, l'espace tangent à une application u en $H^1(\Omega,\mathcal{N})$ n'est pas bien défini, comme illustré par ce qui suit.

Le voisinage d'une application u dans $H^1(\Omega,\mathcal{N})$

Il est assez instructif de chercher à se représenter un tel voisinage. A cet effet, envisageons quelques courbes continues $\gamma :]-\epsilon,\epsilon[\longrightarrow H^1(\Omega,\mathcal{N})$ telles que $\gamma(0)=u$.

(1) Courbes du premier type Nous choisissons $v \in H^1 \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ et, comme dans la section 3.1, nous utilisons la projection P du voisinage tubulaire $V_\delta\mathcal{N}$ sur $\mathcal{N}$. Alors, pour s suffisamment petit, nous considérons $\gamma(s)=u_s=P(u+sv)$. Et alors $\frac{du_s}{ds}_{|s=0} = dP_u(v) \in H^1\cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Exemple *En* $u_\star \in H^1(B^3,S^2)$. *Si* $v \in H^1\cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$,

$$u_s = \frac{u_\star + sv}{|u_\star + sv|}$$

possède toujours une singularité de degré 1 en 0. Mais on ne peut pas "déplacer" cette singularité par de telles déformations.

(2) Courbes du deuxième type Soit X un champ de vecteurs à support compact sur Ω et soit $\Psi_s : \Omega \longrightarrow \Omega$ son flot. On considère $\gamma_s = u_s = u\circ\Psi_s$. Alors $\frac{du_s}{ds}_{|s=0} = du.X \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)$ (une telle courbe n'est pas dérivable dans la topologie H^1).

Exemple *a)* $u=u_\star \in H^1(B^3,S^2)$. *Alors* u_s *possède une singularité de degré 1 en* $\Psi_{-s}(0)$. *On remarque donc que ce type de déformation permet de déplacer les singularités.*
b) $u\in H^1(B^3,S^2)$ *est défini par*

$$u(x) = \begin{pmatrix} cosx^3 \\ sinx^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors toutes les déformations de u du deuxième type sont à valeurs dans le cercle équatorial $S^1 \subset S^2$. *On ne peut donc pas changer l'image de u par cette déformation.*

(3) Eclatement de singularités de degré multiple

Plaçons-nous dans $H^1(B^3, S^2)$. Soit

$$u_{\star\star}(x) = \frac{1}{|x|^2 + (x^3)^2} \begin{pmatrix} (x^1)^2 - (x^2)^2 \\ 2x^1x^2 \\ 2x^3|x| \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Cette application est homogène : $u_{\star\star}(\lambda x) = u_{\star\star}(x), \forall x \neq 0, \forall \lambda \in]0, +\infty[$ et a une singularité de degré 2 en 0, au sens où $\deg(u_{\star\star}, S^2_{a,r})$ est égal à 0 si 0 est extérieur à $S^2_{a,r}$ et à 2 si 0 est intérieur à $S^2_{a,r}$. (En fait, si on note

$$\begin{array}{cccc} \Pi : & S^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^1 + ix^2}{1 + x^3} \end{array}$$

la projection stéréographique, la restriction de $u_{\star\star}$ à S^2 coïncide avec $\Pi^{-1}[(\Pi(x))^2]$).

Construisons une déformation de $u_{\star\star}$. Soit

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} (x^1)^2 - (x^2)^2 \\ 2x^1x^2 \\ 2x^3|x| \end{pmatrix},$$

et soit $V \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ un vecteur orthogonal à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $u_s(x) = \frac{\phi(x)+sV}{|\phi(x)+sV|} \in H^1(B^3, S^2)$ coïncide avec $u_{\star\star}$ en $s = 0$ et possède deux singularités (en $(\pm\sqrt{-sV^1 - isV^2}, 0)$ de degré 1 chacune. La singularité située en 0, de degré 2, éclate en deux singularités de degré 1.

(4) Annihilation et création de dipôles de singularités

Dans $H^1(B^3, S^2)$, soit u_s défini de la façon suivante.. Nous posons $\psi(x) = \begin{pmatrix} (x^1)^2 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$u_s = \frac{\psi(x) + sV}{|\psi(x) + sV|}.$$

Alors, pour $s > 0$, u_s est régulière, pour $s = 0$, $u_0 = \frac{\psi}{|\psi|}$ possède une singularité de degré 0 en 0 et pour $s < 0$, u_s possède une paire de singularités (en $\begin{pmatrix} \sqrt{-s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sqrt{-s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ respectivement) de degrés respectifs $+1$ et -1 (un dipôle).

(5) Situation générale

Les exemples décrits en (3) et (4) laissent imaginer que l'on peut déformer une application dans $H^1(B^3, S^2)$ de façon fort complexe, en créant, annihilant, éclatant des singularités en quantité arbitraire.

Solutions faibles

Comme dans le cas continu, nous distinguerons plusieurs types de points critiques de l'énergie de Dirichlet dans $H^1(B^3, S^2)$.

Définition 1 *Une application $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ est faiblement harmonique, si et seulement si on a*

$$\frac{dE}{ds}[u_s]_{|s=0} = 0,$$

pour toute déformation u_s du premier type (id est de la forme $u_s = P(u + sv)$).

Lemme 2 *Une application $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ est faiblement harmonique si et seulement si elle satisfait l'équation*

$$\Delta u(x) \perp T_{u(x)}\mathcal{N} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega,$$

au sens des distributions dans $H^1(\Omega, \mathcal{N})$. C'est à dire : $\forall v \in H^1_0 \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$,

$$\int_\Omega [-\langle du, dv\rangle + \langle v, A(u)(du, du)\rangle]dx = 0.$$

Cette équation est équivalente à

$$\Delta u(x) + A(u)(du, du) = 0, \forall x \in \Omega,$$

où A est la seconde forme fondamentale du plongement de $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{R}^N$.

On démontre sans peine (en suivant la preuve donnée plus haut du théorème (2.1)) la version suivante du théorème de Noether - généralisation du théorème (3..3).

Théorème 3.4 *Soit U un champ de Killing sur $\mathcal{N}$ et $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ une application faiblement harmonique. Alors $J^\alpha := \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, U(u)\rangle$ est solution de*

$$\int_\Omega \sum_{\alpha=1}^n J^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} dx = 0, \forall \phi \in H^1_0 \cap L^\infty(\Omega).$$

En revanche le théorème 3.1 ne se généralise pas aux applications faiblement harmoniques.

Contre-exemple *Soit*

$$\begin{array}{rccc} \Pi: & S^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}\cup\{\infty\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^1+ix^2}{1+x^3} \end{array}$$

la projection stéréographique. Nous considérons, pour $\lambda \in \mathbb{C}^\star$,

$$\begin{array}{rccc} u_\lambda: & B^3 & \longrightarrow & S^2 \\ & x & \longmapsto & \Pi^{-1}(\lambda\Pi\circ u_\star(x)). \end{array} \tag{11}$$

Alors $u_\lambda \in H^1(\Omega, S^2)$ est faiblement harmonique pour tout λ, mais le tenseur hamiltonien $H^\alpha_\beta = \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta}\rangle - \delta^\alpha_\beta \frac{|du|^2}{2}$ n'est pas à divergence nulle (même au sens des distributions), sauf si $|\lambda| = 1$ (cf [Hélein 4], exemple 1.4.19).

Définition 2 *Une application $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ est faiblement Noether harmonique si et seulement si on a*

$$\frac{dE}{ds}[u_s]_{|s=0} = 0,$$

pour toute déformation u_s du deuxième type (id est de la forme $u_s = u \circ \Psi_s$).

On peut aisément adapter la preuve du théorème 2.2 pour généraliser le théorème 3.1.

Théorème 3.5 *Une application $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ est faiblement Noether harmonique si et seulement si $\forall \phi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$,*

$$\int_\Omega H^\alpha_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^\alpha} dx = 0,$$

où $H^\alpha_\beta = \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta}\rangle - \delta^\alpha_\beta \frac{|du|^2}{2}$.

Ainsi, revenant au contre-exemple précédent, on peut dire que u_λ, définie en (11) est Noether harmonique si et seulement si $|\lambda| = 1$.

Définition 3 *Une application $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ est faiblement stationnaire si et seulement si elle est faiblement harmonique et faiblement Noether harmonique.*

Définition 4 *Une application $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ est minimisante si et seulement si $\forall v \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$,*

$$v = u \text{ sur } \partial\Omega \text{ implique } E(v) \geq E(u).$$

Définition 5 *Une application $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ est localement minimisante si et seulement si $\forall x_0 \in \Omega$, $\exists r > 0$, $B(x_0, r) \subset \Omega$, $\forall v \in H^1(B(x_0, r), \mathcal{N})$,*

$$v = u \text{ sur } \partial B(x_0, r) \text{ implique } E_{B(x_0,r)}(v) \geq E_{B(x_0,r)}(u).$$

Exemple $u_\star \in H^1(B^3, S^2)$, définie en (9) est minimisante (cf [Brezis, Coron, Lieb], [Lin 1]).

Il est simple de vérifier que toute application localement minimisante est faiblement stationnaire.

Les exemples suivants, tous construits dans $H^1(B^3, S^2)$, montrent que chacune des notions de points critiques définies plus haut diffère.

Exemple $u_\lambda = \Pi^{-1}(\lambda\Pi(x)) \in H^1(\Omega, S^2)$*, définie en (11) est faiblement harmonique mais n'est pas faiblement Noether harmonique - donc non faiblement stationnaire - sauf si* $|\lambda| = 1$.

Exemple *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$ *une constante et*

$$u(x) = \begin{pmatrix} cos\theta cos x^1 \\ cos\theta sin x^1 \\ sin\theta \end{pmatrix}.$$

Cette application est faiblement Noether harmonique, mais n'est pas faiblement harmonique, sauf si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

Exemple $u_{\star\star}$ *définie en (10) est faiblement stationnaire. En revanche, H. Brezis, J.-M. Coron et E. H. Lieb ont démontré dans [Brezis, Coron, Lieb] que cette application n'est pas minimisante et que toute application localement minimisante dans* $H^1(B^3, S^2)$ *a nécessairement des singularités de degré* $+1$ *ou* -1.

Nous pouvons donc résumer la situation par le diagramme donné figure 1

FIGURE 1 – Une évolution **non** quasi-statique joignant deux points sur la variété $\mathcal{M}$

Résultats de régularité

Quelle est la régularité de ces solutions faibles ? Il est clair, d'après l'exemple de $u_\star \in H^1(B^3, S^2)$ qui est minimisante, qu'il est exclu de démontrer un résultat de régularité totale en général, mais seulement partielle, c'est à dire en dehors d'un lieu singulier à préciser.

Les résultats connus à ce jour établissent en général la régularité des solutions faibles $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble fermé de Ω, appelé *lieu singulier* de u et donnent une estimation sur la taille de $\mathcal{S}$.

La taille de $\mathcal{S}$ est mesurée à l'aide de la mesure de Hausdorff. Pour tout $s \in [0, m]$, on peut définir la mesure (dite de Hausdorff) de dimension s de $\mathcal{S}$, notée $\mathcal{H}^s(\mathcal{S})$. Si $\mathcal{S}$ est une sous-variété régulière de $\mathbb{R}^m$, de dimension k,

- $\mathcal{H}^s(\mathcal{S}) = +\infty$, si $0 \leq s < k$,
- $\mathcal{H}^k(\mathcal{S}) =$ mesure de Lebesgue k-dimensionnelle de $\mathcal{S}$
- $\mathcal{H}^s(\mathcal{S}) = 0$, si $k < s \leq m$.

Mais la mesure de Hausdorff peut-être définie pour tout sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$ (voir [Hélein 4]).

Le premier résultat a été obtenu par C.B. Morrey en 1948 et établit que si $m = 2$, les applications localement minimisantes sont régulières [Morrey]. Ce résultat a été étendu aux applications faiblement harmoniques conformes par M. Grüter, puis aux applications faiblement stationnaires par R. Schoen ([Grüter], [Schoen]) et enfin au cas des applications faiblement harmoniques par F. Hélein ([Hélein 1], [Hélein 2], [Hélein 3]), toujours en dimension deux.

En dimension plus grande ou égale à 3, il est impossible d'éviter d'avoir des singularités.

Théorème 3.6 *([Schoen, Uhlenbeck 2]) Soit $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ une application localement minimisante. Alors il existe un sous-ensemble fermé $\mathcal{S} \subset \Omega$ tel que u soit régulière sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$ et $\mathcal{H}^{m-3}(\mathcal{S}) < +\infty$.*

Remarque 3 *L'exemple de $u_\star$ montre que l'estimation $\mathcal{H}^{m-3}(\mathcal{S}) < +\infty$ est optimale.*

Théorème 3.7 *([Evans], [Bethuel 2]) Soit $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ une application faiblement stationnaire. Alors il existe un sous-ensemble fermé $\mathcal{S} \subset \Omega$ tel que u soit régulière sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$ et $\mathcal{H}^{m-2}(\mathcal{S}) = 0$.*

Remarque 4 *1) Ce théorème a été obtenu tout d'abord par L.C. Evans dans le cas des applications faiblement stationnaires à valeurs dans la sphère, puis étendu à des applications à valeurs dans une variété quelconque par F. Bethuel.*
2) Ce résultat a été amélioré sous l'hypothèse supplémentaire qu'il n'existe pas d'application harmonique non constante de S^2 dans $\mathcal{N}$ (comme c'est le cas pour toute surface de genre supérieure ou égal à 1). Alors, si cette condition est vraie, F.H. Lin a montré que u est régulière en dehors d'un lieu singulier $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{H}^{m-4}(\mathcal{S}) < +\infty$ [Lin 2].
3) Dans le cas général, on ne sait pas si ce résultat est optimal mais on peut conjecturer qu'il est possible d'avoir une estimation du type $\mathcal{H}^{m-3}(\mathcal{S}) < +\infty$.

Théorème 3.8 *([Rivière]) Si $m \geq 3$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, il existe une application faiblement harmonique dans $H^1(\Omega, S^2)$ partout discontinue.*

Remarquons qu'essentiellement les singularités sont dues au fait qu'en général $\mathcal{N}$ n'est pas convexe (comme par exemple la sphère S^2), mais que si ce défaut de convexité disparaît (comme lorsque par exemple la courbure sectionnelle de $\mathcal{N}$ est négative), alors toute application faiblement harmonique à valeurs dans $\mathcal{N}$ est régulière. Le résultat optimal dans cette direction est dû à S. Hildebrandt, H. Kaul et K.-O. Widman [Hildebrandt, Kaul, Widman].

4 Exemples d'applications du théorème de Noether

Nous allons essentiellement envisager des applications à des résultats d'analyse, concernant les solutions faibles.

4.1 Passage à la limite dans la topologie faible

Le problème est le suivant. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $H^1(\Omega, \mathcal{N})$ d'applications faiblement harmoniques et supposons qu'on ait la convergence faible

$$u_k \rightharpoonup u \; H^1(\Omega, \mathcal{N}),$$

ce qui signifie que $\forall \alpha = 1, ..., m$, $\forall \phi_\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \langle \frac{\partial u_k}{\partial x^\alpha}, \phi_\alpha \rangle dx = \int_\Omega \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \phi_\alpha \rangle dx.$$

La question est alors : u est-elle faiblement harmonique ? Nous allons montrer que la réponse est positive si $\mathcal{N}$ est la sphère S^n. La preuve utilise une idée trouvée indépendament par divers auteurs dans [Chen], [Shatah] et [Keller, Rubinstein, Sternberg]..

Théorème 4.1 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite dans $H^1(\Omega, S^n)$. Supposons que chaque application u_k est faiblement harmonique et que u_k tende faiblement dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ vers une application $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$. Alors, $u \in H^1(\Omega, S^n)$ et est faiblement harmonique.*

Remarque 5 *1) Ce résultat est aussi vrai si $\mathcal{N}$ est une variété symétrique, c'est à dire si il existe un groupe d'isométries qui agit de façon transitive sur $\mathcal{N}$. En effet, on peut alors utiliser le théorème de Noether pour donner une formulation du fait que u est harmonique en termes de lois de conservation et conclure selon le même stratagème que dans la preuve qui suit. Mais en général, il n'y a pas assez de symétries et - fait surprenant - le problème reste ouvert : nous savons pas démontrer que la limite faible d'une suite d'applications faiblement harmoniques est elle-même faiblement harmonique.*
2) Cette question est importante car si on sait y répondre positivement, on est presque en mesure de prouver l'existence de solutions faibles à des problèmes d'évolution d'applications à valeurs dans des variétés comme l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + A(u)(du, du) = 0,$$

ou l'équation des ondes

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u + A(u)(du, du) = 0.$$

Preuve Considérons une telle suite $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Nous avons

$$du_k \rightharpoonup du, \text{ faiblement dans } L^2(\Omega). \tag{12}$$

Grâce au théorème de Rellich-Kondrakov, nous pouvons aussi déduire que

$$u_k \longrightarrow u, \text{ dans } L^2_{loc}(\Omega) \tag{13}$$

et, quitte à extraire une sous-suite, on peut aussi supposer que

$$u_k \longrightarrow u, \text{ presque partout sur } \Omega. \tag{14}$$

Cette dernière propriété permet d'ores et déja de conclure que $u \in H^1(\Omega, S^n)$. Il reste à passer à la limite dans l'équation

$$\Delta u_k + u_k |\nabla u_k|^2 = 0, \text{ au sens des distributions.} \tag{15}$$

La difficulté est qu'ici, on ne peut rien dire sur la limite de $u_k|\nabla u_k|^2$, même dans un sens très faible, à partir de (12), (13) et (14).

Cet obstacle est contourné par l'utilisation du théorème de Noether. Au lieu de travailler sur l'équation (15), nous utiliserons le théorème 3.4, dont nous déduisons que $\forall \phi \in H^1_0 \cap L^\infty(\Omega)$, $\forall 1 \leq i, j \leq n+1$,

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \left(u^i_k \frac{\partial u^j_k}{\partial x^\alpha} - u^j_k \frac{\partial u^i_k}{\partial x^\alpha} \right) dx = 0. \tag{16}$$

Nous pouvons aussi employer une notation qui généralise le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. Si a et b sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$, $a \times b$ est la matrice $(n+1) \times (n+1)$ antisymétrique $(a^i b^j - a^j b^i)_{1 \leq i,j \leq n+1}$. L'ensemble des matrices $(n+1) \times (n+1)$ antisymétriques s'identifie à $so(n+1)$, algèbre de Lie du groupe des rotations de $\mathbb{R}^{n+1}$. Or (12) et (13) entraînent aisément

$$u_k \times \frac{\partial u_k}{\partial x^\alpha} \rightharpoonup u \times \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \text{ faiblement dans } L^2(\Omega, so(n+1)).$$

C'est exactement ce dont nous avons besoin pour passer à la limite dans (16). Nous avons donc

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \left(u^i \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} - u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right) dx = 0. \tag{17}$$

Et de cette équation, il est possible de déduire par un petit calcul (cf [Hélein 4]) que

$$\Delta u + u|\nabla u|^2 = 0 \text{ au sens des distributions.}$$

Ce calcul exploite en gros le fait que (17) signifie qu'au sens faible $u \times \Delta u = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(u \times \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\right) = 0$ et donc que Δu est parallèle à u. *CQFD.*

4.2 Régularité des applications faiblement harmoniques en dimension deux

Nous abordons ici le problème de la régularité des applications faiblement harmoniques définies sur un domaine de dimension 2. Comme il s'agit essentiellement d'un problème local, nous pouvons nous restreindre sans perte de généralité au cas des applications définies sur le disque D^2 de $\mathbb{R}^2$. Nous noterons plutôt $z = (x, y) = x + iy$ un point de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, de sorte que $D^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 / |z| < 1\}$.

Théorème 4.2 *([Hélein 1], [Hélein 2], [Hélein 3]) Toute application $u \in H^1(D^2, \mathcal{N})$ faiblement harmonique est régulière. (Par régulière, on entend que si $\mathcal{N}$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ de $\mathbb{R}^N$, alors u est de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$.)*

Nous ne démontrerons le résultat général que dans le paragraphe 4.5.. Nous nous contenterons ici d'étudier le cas où $\mathcal{N}$ est la sphère (ou une variété symétrique). En préliminaire, nous allons étudier un problème similaire, celui des *immersions à courbure moyenne constante.*

Immersions à courbure moyenne constante

Soit Σ une surface immergée de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Au voisinage d'un point $m \in \Sigma$, la forme de la surface est caractérisée à l'ordre 2 - et modulo les déplacements euclidiens de $\mathbb{R}^3$ - par les courbures principales de Σ en m, k_1 et k_2 ou alternativement par la courbure moyenne $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ et la courbure de Gauss $K = k_1 k_2$.

Une surface qui satisfait la contrainte $H = 0$ est appelée *surface minimale* et modélise la forme adoptée par un film de savon (d'aire localement "minimisante"). Une surface satisfaisant à $H = C^{ste} \neq 0$ est appelé *surface à courbure moyenne constante.*

Soit $X : D^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion paramétrisant localement Σ. Si X est conforme, id est satisfait à la condition

$$|\frac{\partial X}{\partial x}|^2 - |\frac{\partial X}{\partial y}|^2 - 2i\langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} \rangle = 0. \tag{18}$$

alors on a

$$\Delta X = 2H \frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}, \tag{19}$$

où $\times$ est le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ et H est la courbure moyenne de Σ en $X(z)$. Ainsi, si Σ est une surface à courbure moyenne constante H_0, alors X est solution de

$$\Delta X = 2H_0 \frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}. \tag{20}$$

Et réciproquement, si X est solution de (18) et (20), alors son image est une surface minimale ou à courbure moyenne constante, selon que H_0 est nul ou non.

L'équation (20) admet une formulation variationnelle, c'est l'équation d'Euler-Lagrange de

$$E(X) = \int_{D^2} [\frac{|\nabla X|^2}{2} + \frac{2}{3} X.\left(\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}\right)] dx.$$

Remarque 6 $\frac{1}{3}X.\left(\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}\right)$ *est le volume algébrique infinitésimal balayé par un segment joignant l'origine de* $\mathbb{R}^3$ *à un point de* Σ. *Ainsi,*

$$\int_{D^2} \frac{1}{3} X.\left(\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx$$

est le volume algébrique du cône de sommet l'origine, s'appuyant sur Σ.
D'autre part, $\int_{D^2} \frac{|\nabla X|^2}{2} dx$ *est toujours supérieur ou égal à l'aire algébrique balayée par* X, *avec égalité si et seulement si* X *est conforme.*

Théorème 4.3 *([Wente 1]) Soit* $X \in H^1(D^2, \mathbb{R}^3)$ *une solution faible du système*

$$\Delta X = 2H_0 \frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y},$$

alors $X \in \mathcal{C}^\infty(D^2, \mathbb{R}^3)$.

Preuve Utilisant des contributions classiques dues entre autres à E.. Hopf, J. Schauder, E. de Giorgi, J. Nash, J. Moser, O. Ladyzhenskaya, N. Ural'tseva, nous sommes ramenés à la question de démontrer que u est continue. Sachant cela, la théorie des systèmes elliptiques non linéaires élaborée au cours de ce siècle nous permet de conclure.

Examinons par exemple la première composante du système (20) (nous supposons que H_0 est non nul, sans quoi le résultat est quasi immédiat). Il vient

$$\Delta X^1 = 2H_0 \left(\frac{\partial X^2}{\partial x}\frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial y}\frac{\partial X^3}{\partial x}\right) := \{X^2, X^3\}, \tag{21}$$

où nous avons introduit la notation

$$\{a, b\} := \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}.$$

Faisons une pause

Examinons la structure de cette équation et envisageons l'équation (au sens faible)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\phi &=& \{a, b\} \text{ sur } D^2 \\ \phi &=& 0 \text{ sur } \partial D^2. \end{array} \right. \tag{22}$$

où ici, $a, b \in H^1(D^2, \mathbb{R})$ sont donnés et ϕ est une fonction mesurable inconnue.

Que peut-on dire sur la régularité de ϕ ?

La théorie de Caldéron-Zygmund nous enseigne que si on a une équation du type

$$-\Delta\phi = f,$$

avec $f \in L^p$, alors, les dérivées secondes de ϕ sont aussi dans L^p, *à condition que* $1 < p < +\infty$. Or, dans l'équation (22), le second membre est dans L^1, et par conséquent cette théorie ne permet pas de conclure que par exemple ϕ est dans $W^{2,1} \subset H^1 \cap L^\infty$. Au plus, on peut montrer - toujours en utilisant le fait que $\{a, b\}$ est dans L^1 - que $\phi \in W^{1,p} \cap L^q$, pour $1 \leq p < 2$ et $1 \leq q < +\infty$. De telles estimations sont insuffisantes pour notre problème. Cependant, en utilisant la structure très particulière du déterminant jacobien $\{a, b\}$, H. Wente a réussi à améliorer de façon suffisante cette estimation.

Lemme 3 *([Wente 1], [Wente 2], [Brezis, Coron]) Si ϕ est une fonction mesurable, solution de (22), alors $\phi \in \mathcal{C}^0(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ et de plus,*

$$||\phi||_{L^\infty} + ||\nabla\phi||_{L^2} \leq C||\nabla a||_{L^2}||\nabla b||_{L^2}, \tag{23}$$

où C est une constante universelle.

Idée de la preuve Il s'agit dans un premier temps de montrer l'inégalité

$$||\phi||_{L^\infty} \leq C||\nabla a||_{L^2}||\nabla b||_{L^2}. \tag{24}$$

L'inégalité (23) s'en déduit par un calcul simple utilisant une intégration par partie. De plus, l'inégalité (24) permet aussi de montrer que, si ϕ est solution de (22), alors ϕ est limite, pour la topologie uniforme, d'une suite de fonction $\mathcal{C}^\infty$, cette suite étant contruite en régularisant a et b et en considérant la solution de (22) avec second membre régularisé. Ainsi on montre que ϕ est continue.

Prouver (24) revient à estimer ponctuellement ϕ. Commencons par supposer que a et b sont $\mathcal{C}^\infty$ et par estimer ϕ en 0, en utilisant une représentation intégrale en coordonnées polaires et en notant $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= \int_{D^2} \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\{a, b\}r dr d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{r}\left(\frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial b}{\partial\theta} - \frac{\partial a}{\partial\theta}\frac{\partial b}{\partial r}\right) dr d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(a\frac{\partial b}{\partial\theta}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(a\frac{\partial b}{\partial r}\right)\right) dr d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}a\frac{\partial b}{\partial\theta} dr d\theta.
\end{aligned}$$

en ayant intégré par partie. Or, pour tout $0 < r < 1$, on a, notant a_r la moyenne de a sur $\partial B(0, r)$,

$$\int_0^{2\pi} a\frac{\partial b}{\partial \theta}d\theta = \int_0^{2\pi}(a-a_r)\frac{\partial b}{\partial \theta}d\theta,$$

et donc

$$\begin{aligned}|\int_0^{2\pi} a\frac{\partial b}{\partial \theta}d\theta| &\leq ||a-a_r||_{L^2(0,2\pi)}||\frac{\partial b}{\partial \theta}||_{L^2(0,2\pi)}\\ &\leq ||\frac{\partial a}{\partial \theta}||_{L^2(0,2\pi)}||\frac{\partial b}{\partial \theta}||_{L^2(0,2\pi)}\end{aligned}$$

par l'inégalité de Poincaré. Donc

$$\begin{aligned}|\phi(0)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^1 ||\frac{\partial a}{\partial \theta}||_{L^2(0,2\pi)}||\frac{\partial b}{\partial \theta}||_{L^2(0,2\pi)}\frac{dr}{r}\\ &\leq \frac{1}{2\pi}||\nabla a||_{L^2(D^2)}||\nabla b||_{L^2(D^2)}.\end{aligned}$$

Cela prouve (24) en 0. Pour estimer ϕ en un autre point $z_0 \in D^2$, on utilise une transformation conforme (homographique) du disque $T : D^2 \longrightarrow D^2$ telle que $T(0) = z_0$ (par exemple, $T(z) = (z_0 - z)(1 - \overline{z_0}z)^{-1}$). On peut remarquer en effet que

$$-\Delta\phi \circ T = \{a \circ T, b \circ T\}.$$

Donc on peut appliquer ce qui précède à $\phi \circ T$. On obtient

$$|\phi(z_0)| = |\phi\circ T(0)| \leq \frac{1}{2\pi}||\nabla a\circ T||_{L^2(D^2)}||\nabla b\circ T||_{L^2(D^2)} = \frac{1}{2\pi}||\nabla a||_{L^2(D^2)}||\nabla b||_{L^2(D^2)}.$$

L'inégalité (24) est ainsi invariante par transformation conforme. On a ainsi prouvé (24) pour des fonctions régulières. Par un argument de densité, on en déduit que cette inégalité est vraie sur $H^1(D^2) \times H^1(D^2)$, avec la constante $\frac{1}{2\pi}$. *CQFD.*

Retour à la preuve du théorème

En appliquant le lemme que nous venons de démontrer sur l'équation (21), on en déduit que X^1 est continu. En faisant de même pour chaque composante, on montre que X est continue. *CQFD.*

Revenons aux applications harmoniques.

Preuve du théorème 4.2 dans le cas où $\mathcal{N} = S^n$

Considérons une application $u \in H^1(D^2, S^n)$, solution faible de

$$-\Delta u = u|du|^2. \tag{25}$$

Sous cette forme, la théorie elliptique classique, telle que nous l'avons rappelée précédemment et en utilisant le fait que $u|du|^2 \in L^1$, ne permet pas de prouver par exemple une estimation dans H^1 ou dans L^∞ de u, tout au plus dans $W^{1,p} \cap L^q$, pour $1 \leq p < 2$ et $1 \leq q < +\infty$. De plus, il n'y a pas, *en apparence*, de structure algébrique particulière, comme celle d'un déterminant, dans ce second membre. Utilisons le théorème 3.4, nous en déduisons qu'au sens faible,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u \times \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \times \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{26}$$

Grâce au lemme de Poincaré, nous en déduisons qu'il existe une application $b \in H^1(D^2, so(n+1))$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial b}{\partial x} & = & u \times \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial y} & = & -u \times \frac{\partial u}{\partial x}. \end{array} \right. \tag{27}$$

A présent, en utilisant le fait que $|u| = 1$, qui entraîne la relation $\langle u, du \rangle = 0$, nous pouvons transformer (25) sous la forme

$$\begin{array}{rcl} -\Delta u^i & = & \langle u^i \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \rangle + \langle u^i \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} \rangle \\ & = & \langle u^i \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u^i}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \rangle + \langle u^i \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial u^i}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} \rangle \\ & = & \left(-\frac{\partial b}{\partial y} . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} . \frac{\partial u}{\partial y} \right)^i \\ & = & \sum_{j=1}^{n+1} \{ b^i_j, u^j \}. \end{array}$$

Nous avons utilisé l'équation (27) dans l'avant- dernière ligne. Nous remarquons que nous avons réussi à écrire le second membre de (25) comme une somme de déterminants jacobiens. Nous pouvons donc appliquer le lemme de Wente et nous obtenons que u est continue. Cela suffit, à l'aide de la théorie elliptique classique, pour montrer que u est $\mathcal{C}^\infty$. *CQFD.*

Remarque 7 *Cette preuve, est une simplification de celle obtenue dans [Hélein 1], grâce à une remarque de P.-L. Lions. Elle se généralise sans grandes difficultés au cas des applications faiblement harmoniques à valeurs dans une variété symétrique [Hélein 2].*

4.3 Une visite du coté de l'analyse harmonique

Les résultats du paragraphe précédent reposent sur une propriété magique de la quantité $\{a, b\}$. Depuis H. Wente en 1969 et H. Brezis et J.-M. Coron au début des années 80, d'autres observations ont été faites sur ce genre de quantité. En 1989, Stefan Müller a remarqué la propriété suivante. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, notons $L^1 \log L^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables f et Ω vers $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telles que

$$\int_\Omega |f|(1+\log(1+|f|))dx < +\infty\,. \tag{28}$$

Théorème 4.4 *([Müller]) Soit $u \in W^{1,m}(\Omega,\mathbb{R}^m)$, et posons*

$$f(x) = det(du(x)) \quad p.p.$$

Alors, si $f(x) \geq 0$ p.p., $f \in L^1 logL^1(\Omega)$.

Un cas particulier de ce résultat est lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $u = (a,b) \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$, alors $\det(du(x)) = \{a,b\} \in L^1\log L^1(\Omega)$, dés que $\{a,b\} \geq 0$ p.p. On constate donc que la structure algébrique de $\det(du(x))$ entraîne très légèrement une amélioration de l'intégrabilité de cette fonction, qui, à première vue, devrait se contenter d'être dans $L^1(\Omega)$.

On connait un espace proche de L^1, l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$, qui possède une propriété tout à fait analogue à celle décrite dans le théorème 4.4 : $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ est un sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^m)$, et toute fonction f dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ qui est positive p.p. est nécessairement dans $L^1\log L^1$ (cf [Stein 1]).

Cela nous met sur la piste du résultat suivant, dû à Ronald Coifman, Pierre-Louis Lions, Yves Meyer et Stephen Semmes.

Théorème 4.5 *([Coifman, Lions, Meyer, Semmes]) Soit u une application dans $W^{1,m}(\mathbb{R}^m)$, alors $f := det(du)$ appartient à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$, et de plus il existe une constante C_m, qui ne dépend que de m telle que*

$$||f||_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)} \leq C_m ||u||_{W^{1,m}(\mathbb{R}^m)}. \tag{29}$$

Un autre résultat, qui coïncide avec le théorème 4.5 dans le cas $m = 2$ est le suivant

Théorème 4.6 *([Coifman, Lions, Meyer, Semmes]) Soit ϕ une application dans $H^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$, et E un champ de vecteur dans $L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ à divergence nulle. Alors la quantité*

$$f := \langle \nabla\phi, E\rangle = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} E^\alpha$$

est dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$. De plus, il existe une constante C_m, ne dépendant que de m, telle que

$$||f||_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)} \leq C_m ||\phi||_{H^1(\mathbb{R}^m)} ||E||_{L^2(\mathbb{R}^m)}. \tag{30}$$

Avant d'aller plus loin, des explications sur ce que sont $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ s'imposent. (Notons que si $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, une généralisation de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{H}^1(\Omega)$ existe, mais sa définition est bien plus compliquée.) Nous donnons plusieurs définitions. L'équivalence entre ces diverses définitions est loin d'être évidente, et repose sur un théorème difficile de Charles Fefferman (cf [Fefferman], [Fefferman, Stein]).

Définition 6 (espace de Hardy 1) *Soit Ψ une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Psi = 1.$$

Pour $t > 0$, on pose $\Psi_t(x) = t^{-m}\Psi\left(\frac{x}{t}\right)$. Enfin, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, on définit

$$f^\star(x) = \sup_{t>0} |(\Psi_t \star f)(x)|.$$

Alors f appartient à l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ si et seulement si $f^\star \in L^1(\mathbb{R}^m)$. L'espace de Hardy est muni de la norme

$$||f||_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)} = ||f||_{L^1(\mathbb{R}^m)} + ||f^\star||_{L^1(\mathbb{R}^m)}. \tag{31}$$

Définition 7 (espace de Hardy 2) *Pour toute fonction f dans $L^1(\mathbb{R}^m)$, on note $R_\alpha f$ la fonction définie par*

$$\mathcal{F}(R_\alpha f)(\xi) = \frac{\xi_\alpha}{|\xi|}\mathcal{F}(f)(\xi),$$

où

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx$$

est la transformée de Fourier de f. $R_\alpha f$ est appelée transformée de Riesz de f. Alors f appartient à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ si et seulement si

$$\forall \alpha = 1, ..., m, \quad R_\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^m).$$

On définit une deuxième norme sur $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ par

$$||f||_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)} = ||f||_{L^1(\mathbb{R}^m)} + \sum_{\alpha=1}^{m} ||R_\alpha f||_{L^1(\mathbb{R}^m)}. \tag{32}$$

Remarque 8 *Bien qu'elles soient notées de la même façon, les normes sur $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ données dans ces deux définitions) ne sont pas les mêmes. Elles sont cependant équivalentes.*

Une troisième définition passe par le détour d'introduction d'espaces auxiliaires. Tout d'abord, pour $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$, on définit, pour tout $1 \leq p < +\infty$ et $0 < \lambda$, la quantité suivante (finie ou infinie)

$$[v]_{p,\lambda} = \sup_{x\in\mathbb{R}^m, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x.r)} |v - v_{x.r}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $v_{x,r}$ est la moyenne de v sur $B(x, r)$. Il s'agit d'une semi-norme, puisque $[v]_{p,\lambda} = 0$ si et seulement si v est constante.

Définition 8 *L'espace*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^m) := \{v \in L^1(\mathbb{R}^m)/[v]_{p,\lambda} < +\infty\}$$

est appelé espace de Campanato et est un espace de Banach, pour la norme $||v||_{p,\lambda} := [v]_{p,\lambda} + ||v||_{L^1}$.

On peut démontrer (cf [Giaquinta]) que
- si $0 < \lambda < m$, $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^m) = L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^m)$ (espace de Morrey).
- si $m < \lambda < m+p$, $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{C}^{\frac{\lambda-m}{p}}$ (espace de Hölder)
- si $m + p < \lambda$, $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

Le cas $\lambda = m$ est un cas particulier, et est l'objet du théorème suivant.

Théorème 4.7 *([John, Nirenberg]) Pour $1 \leq p < \infty$, tous les espaces de Campanato $\mathcal{L}^{p,m}(\mathbb{R}^m)$ sont tous isomorphes entre eux. On désigne par $BMO(\mathbb{R}^m)$ cet espace. (*Bounded Mean Oscillations*).*

Définition 9 (espace VMO) *(*Vanishing Mean Oscillations*) L'espace $VMO(\mathbb{R}^m)$ est le sous-espace des fonctions f dans $BMO(\mathbb{R}^m)$, telles que si pour tout $x \in \mathbb{R}^m, r > 0$,*

$$f_{x,r} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy,$$

on ait

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{x,r}|dy = 0.$$

La quantité $||f||_{BMO(\mathbb{R}^m)}$ est une semi-norme.

Définition 10 (espace de Hardy 3) *L'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ est le dual de $VMO(\mathbb{R}^m)$.*

Remarquons que chacune des définitions données permet facilement de démontrer que si $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$, alors $\int_{\mathbb{R}^m} f = 0$.

Il y a plusieurs façons d'appréhender cet espace bizarre. Une première manière est de regarder au microscope une fonction f dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$, et d'observer que même si f oscille violemment, (mais pas trop, puisque $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$), ces oscillations sont équilibrées à toutes les échelles, c'est-à-dire en calculant la moyenne de f sur une boule de position et de taille quelconque, les oscillations s'éliminent.

Une deuxième façon est de concevoir l'espace de Hardy comme le plus grand sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^m)$ dans lequel on peut appliquer des recettes en général valables dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^m)$ pour $1 < p < +\infty$, mais qui cessent de marcher dans $L^1(\mathbb{R}^m)$.

Remarques

1) Par l'inégalité de Poincaré-Sobolev : si $v \in W^{1,m}(\mathbb{R}^m)$,$\forall 1 \leq p < \infty$,

$$\left(\frac{1}{r^m}\int_{B(x.r)} |v - v_{x.r}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq Cdu, d\phi \left(\int_{B(x,r)} |\nabla v|^m dx\right)^{\frac{1}{m}},$$

on montre ainsi que tous les espaces $W^{1,m}$ s'injectent continuement dans $BMO(\mathbb{R}^m)$.
2) L'espace $BMO(\mathbb{R}^m)$ est contenu dans tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^m)$, pour $1 \leq p < \infty$ et contient L^∞. C'est donc un espace intermédiaire entre ces espaces de Lebesgue. Par exemple, en dimension 2, $\log r \in BMO(\mathbb{R}^2)$.
3) Par dualité, l'espace de Hardy est une sorte d'un espace intermédiaire entre les espaces L^p, pour $1 < p < +\infty$ et L^1.

L'utilité de ces espaces est illustrée par les résultats suivants.

Théorème 4.8 *(cf [Stein 2]) Soit $\phi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ solution sur $\mathbb{R}^m$ de*

$$-\Delta\varphi = f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m),$$

alors toutes les dérivées secondes de ϕ sont dans $L^1(\mathbb{R}^m)$, et

$$||\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}||_{L^1(\mathbb{R}^m)} \leq C||f||_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)}$$

De même, si $1 < p < +\infty$, toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ vérifie

$$f^* \in L^p(\mathbb{R}^m) \text{ et } R_\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^m),$$

mais cela cesse d'être vrai pour $p = 1$, sauf si l'on “remplace” $L^1(\mathbb{R}^m)$ par $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$.

Une autre propriété est qu'en dimension 2, si ϕ est solution de

$$-\Delta\phi = f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m),$$

alors ϕ est continue. On peut le déduire par exemple du fait que le noyau de $-\Delta$ sur $\mathbb{R}^2$, $\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{r}\right)$ est dans $BMO(\mathbb{R}^2)$, et en utilisant la définition 9 de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$. En fait, nous verrons des résultats plus précis plus loin.

L'introduction de l'espace de Hardy, et les théorèmes de la section précédente nous permettront d'énoncer des résultats d'intégrabilité accrue plus précis que le lemme de Wente. Nous avons besoin pour cela de définir de nouveaux espaces, les espaces de Lorentz, sortes de raffinements des espaces L^p.

Nous verrons au passage que ces espaces apparaissent naturellement dans des estimations sur les solutions des équations différentielles.

Pour une fonction f, mesurable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'appartenance à un espace de Lorentz est décelée grâce au réarrangement décroissant de $|f|$ sur $[0, |\Omega|]$.

Définition 11 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Le réarrangement décroissant de $|f|$ sur $]0, |\Omega|[$ est l'unique fonction, notée $f^\star$, de $]0, |\Omega|[$ vers $\mathbb{R}$ qui soit décroissante, et telle que*

$$\mathit{Mesure}\ \{x \in \Omega / |f(x)| \geq s\} = \mathit{Mesure}\ \{t \in]0, |\Omega|[/ f^\star(t) \geq s\}$$

Définition 12 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $p \in]1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$.. L'espace de Lorentz $L^{(p,q)}(\Omega, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que*

$$|f|_{(p,q)} = \left[\int_0^{+\infty} (t^{\frac{1}{p}} f^\star(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} < +\infty, \ \ si \ \ q < +\infty$$

et

$$|f|_{(p,\infty)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^\star(t) < +\infty, \ \ si \ \ q = +\infty.$$

On est tenté de munir les espaces de Lorentz de normes, en utilisant les quantités $|f|_{(p,q)}$. Cependant, ces fonctions ne sont pas des normes, car elles ne vérifient pas l'inégalité triangulaire.

En revanche, si on pose

$$f^{\star\star}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^\star(s) ds$$

et

$$||f||_{(p,q)} = \left[\int_0^{+\infty} (t^{\frac{1}{p}} f^{\star\star}(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}}, \text{ si } q < +\infty$$

$$||f||_{(p,\infty)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^\star(t)$$

on dispose alors de normes sur les espaces de Lorentz qui satisfont la condition

$$\frac{1}{c} |f|_{(p,q)} \leq ||f||_{(p,q)} \leq c |f|_{(p,q)}.$$

Ainsi, les espaces de Lorentz sont des espaces de Banach. Ces espaces apparaissent classiquement dans la théorie de l'interpolation des opérateurs linéaires entre espaces L^p, comme nous allons le voir un peu plus loin.

Chaque $L^{(p,q)}$ peut être vu comme déformation de L^p. Par exemple, on a les inclusions strictes

$$L^{(p,1)} \subset L^{(p,q')} \subset L^{(p,q'')} \subset L^{(p,\infty)},$$

si $1 < q' < q''$. De plus

$$L^{(p,p)} = L^p.$$

Mais, dès que $|\Omega|$ est borné, on a pour tout q et q',

$$p < p' \Rightarrow L^{(p',q')} \subset L^{(p,q)}.$$

Enfin, pour $1 < p < +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$, $L^{\left(\frac{p}{p-1},\frac{q}{q-1}\right)}$ est le dual de $L^{(p,q)}$.

Pour plus de détails sur les espaces de Lorentz, voir [Ziemer], [Stein, Weiss], [Hunt], et [Bergh, Löfström].

Mentionnons un résultat d'interpolation qui sera utilisé à plusieurs reprises, et qui nous permettra de déduire des estimations sur les espaces de Lorentz, à partir d'estimations dans les espaces L^p.

Théorème 4.9 *([Stein, Weiss], [Hunt]). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit r_0, r_1, p_0, p_1 des réels tels que*

$$1 \leq r_0 < r_1 \leq \infty,$$

et

$$1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty,$$

Soit T un opérateur linéaire dont le domaine de définition D contient

$$\bigcup_{r_0 \leq r \leq r_1} L^r(\Omega),$$

qui envoie continûment $L^{r_0}(\Omega)$ sur $L^{p_0}(U)$, et $L^{r_1}(\Omega)$ sur $L^{p_1}(U)$, avec les normes

$$\begin{array}{ll} \forall f \in L^{r_0}(\Omega), & ||Tf||_{L^{p_0}(U)} \leq k_0 ||f||_{L^{r_0}(\Omega)}, \\ \forall f \in L^{r_1}(\Omega), & ||Tf||_{L^{p_1}(U)} \leq k_1 ||f||_{L^{r_1}(\Omega)}. \end{array}$$

Alors, pour tout $1 \leq q \leq \infty$, et pour tout couple (p, r) tel que $\exists \theta \in]0, 1[$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \text{ et } \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1},$$

f envoie continûment $L^{(r,q)}(\Omega)$ sur $L^{(p,q)}(U)$, et de plus

$$\forall f \in L^{(r,q)}(\Omega), ||Tf||_{L^{(p,q)}(U)} \leq B_\theta ||f||_{L^{(r,q)}(\Omega)},$$

où

$$B_\theta = \left(\frac{r}{|\gamma| p}\right)^{\frac{1}{q}} 2^{\frac{1}{p}} \left(\frac{r k_0}{r - r_0} + \frac{r_1 k_1}{r_1 - r}\right), \tag{33}$$

et

$$\gamma = \frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}.$$

Par la suite, nous nous intéressons essentiellement à la famille L^2, c'est-à-dire les espaces $L^{(2,q)}$, pour $1 \leq q \leq +\infty$. Trois membres de cette famille sont particulièrement intéressants : le plus doux ($L^{(2,1)}$), le plus violent ($L^{(2,\infty)}$), et le plus connu ($L^{(2,2)} = L^2$).

Voici quelques résultats qui les illustrent dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 4.10 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, dont la frontière est de classe C^1. Soit $f \in H^1(\Omega)$ et supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $L^{(2,1)}(\Omega)$. Alors f est continue et bornée uniformément sur Ω.*

Remarque 9 *Il est bien connu qu'en général une fonction de $H^1(\Omega)$ n'est ni bornée, ni continue.*

Théorème 4.11 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f \in L^1(\Omega)$ et ϕ, solution de*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\phi & = & f & \text{sur } \Omega \\ \phi & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{34}$$

alors $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \in L^{(2,\infty)}(\Omega)$, et il existe une constante ne dépendant que de Ω, $C(\Omega)$, telle que

$$||d\phi||_{L^{(2,\infty)}(\Omega)} \leq C(\Omega)||f||_{L^1(\Omega)}. \tag{35}$$

Remarque 10 *Il est également connu qu'en général une solution ϕ de (**??**) n'est pas dans $H^1(\Omega)$.*

Théorème 4.12 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$, et ϕ, solution de*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\phi & = & f & \text{sur } \Omega \\ \phi & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{36}$$

alors $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \in L^{(2,1)}(\Omega)$, et il existe une constante ne dépendant que de Ω, $C(\Omega)$ telle que

$$||d\phi||_{L^{(2,1)}(\Omega)} \leq C(\Omega)||f||_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}. \tag{37}$$

Avant de démontrer ces résultats, mentionnons la raison essentielle pour laquelle ils ont lieu. Le noyau du laplacien sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire la distribution $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$-\Delta K = \delta_0 \text{ sur } \mathbb{R}^2$$

est donné par

$$K = \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{r}\right),$$

et sa dérivée est

$$dK = -\frac{1}{2\pi r^2}(xdx + ydy). \tag{38}$$

On vérifie que K est dans $BMO(\mathbb{R}^2)$, et que dK a ses coefficients dans $L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)$. C'est donc la dualité entre $BMO(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$, et entre $L^{(2,\infty)}$ et $L^{(2,1)}$ qui est à l'origine de ces résultats.

Preuve du théorème 4.10

Soit f une fonction dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ dont les dérivées sont par conséquent dans $L^{(2,1)}(\Omega)$. Par la méthode de Whitney (cf [Brezis]), nous pouvons construire un prolongement de f en une fonction à support compact de $\mathbb{R}^2$, $\widehat{f}$. Le bord de Ω étant $\mathcal{C}^1$, le prolongement $f \to \widehat{f}$ est continu dans tous les espaces $W^{1,p}$ pour $1 \leq p \leq +\infty$, donc par le théorème d'interpolation 4.9, nous pouvons en déduire que les dérivées de $\widehat{f}$ sont dans $L^{(2,1)}(\mathbb{R}^2)$, et que

$$||d\widehat{f}||_{L^{(2,1)}(\mathbb{R}^2)} \leq C||df||_{L^{(2,1)}(\Omega)} \tag{39}$$

où C est une constante ne dépendant que de Ω. Comme $\widehat{f}$ est à support compact, nous avons, pour tout $z \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(z) &= \int_{\mathbb{R}^2} \delta_0(z-\zeta)\widehat{f}(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} -\Delta K(z-\zeta)\widehat{f}(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} -\nabla K(z-\zeta).\nabla\widehat{f}(\zeta)d\zeta, \end{aligned} \tag{40}$$

d'où l'on déduit que

$$||\widehat{f}(z)|| \leq ||dK||_{L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)}||d\widehat{f}||_{L^{(2,1)}(\mathbb{R}^2)}. \tag{41}$$

De (39) et (41) on dérive

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||\widehat{f}||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C||dK||_{L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)}||df||_{L^{(2,1)}(\mathbb{R}^2)}. \tag{42}$$

Cette estimation entraîne, par la densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $\{f \in H^1(\Omega,\mathbb{R})/df \in L^{(2,1)}(\Omega)\}$, que toute fonction de $H^1(\Omega,\mathbb{R})$, dont les dérivées sont dans $L^{(2,1)}(\Omega)$ est limite uniforme d'une suite de fonctions C^∞, et donc est continue. *CQFD.*

Dans les preuves des théorèmes 4.11 et 4.12, nous utiliserons le théorème d'interpolation 4.9 avec un opérateur bien choisi. Cet opérateur est obtenu à partir d'une construction que nous aurons à réutiliser par la suite, et qui, d'une manière générale, peut s'avérer être utile pour obtenir des estimations avec des normes dans les espaces de Lorentz. C'est pourquoi nous la présentons à part.

Construction *Décomposition de Hodge d'un champ de vecteurs*

Nous supposons ici que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^1$. A tout champ de vecteurs $g = (g_1, g_2) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, nous associons les fonctions α, β, v sur Ω, solutions de

$$\begin{cases} -\Delta\alpha &= -\left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x} + \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\right) \quad \text{sur } \Omega \\ \alpha &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta\beta &= \dfrac{\partial g_1}{\partial y} - \dfrac{\partial g_2}{\partial x} \quad \text{sur } \Omega \\ \beta &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g_1 &= \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial \beta}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \\ g_2 &= \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} - \dfrac{\partial \beta}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

de sorte que

$$-\Delta v = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Nous poserons

$$P(g) = d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)$$

et

$$H(g) = dv = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

La théorie elliptique nous dit que, pour tout $1 < p < +\infty$, P et H envoient continûment $L^p(\Omega, \mathbb{R}^2)$ dans lui-même. Nous en déduisons, par le théorème 4.9, que ces opérateurs sont également continus dans les espaces $L^{(p,q)}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, pour $1 < p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$.

Preuve du théorème 4.11

Soit $f \in L^1(\Omega)$, considérons la fonction $\widehat{f}$ de $L^1(\mathbb{R}^2)$, obtenue en prolongeant f par 0 en dehors de Ω. Soit Ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\Psi(z) = \int_{\mathbb{R}^2} K(z - \zeta)\widehat{f}(\zeta) d\zeta,$$

où $K(z) = \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{|z|}\right)$. Nous savons que

$$-\Delta\Psi = \widehat{f} \text{ sur } \mathbb{R}^2,$$

et que

$$d\Psi(z) = \int_{\mathbb{R}^2} dK(z-\zeta)\widehat{f}(\zeta)d\zeta.$$

Comme $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $dK \in L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)$ (cf (38)), on en déduit que $d\Psi \in L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)$ avec

$$||d\Psi||_{L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)} \leq ||dK||_{L^{(2,\infty)}(\mathbb{R}^2)}||f||_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \tag{43}$$

Or, une conséquence de l'équation (34), vérifiée par ϕ, est que ϕ est également donné par

$$d\phi = P(d\Psi_{|\Omega}),$$

où P est l'opérateur défini dans la construction précédente. Cet opérateur étant continu de $L^{(2,\infty)}(\Omega)$ dans lui-même, on en déduit que $d\phi \in L^{(2,\infty)}(\Omega)$, et l'estimation (43) entraîne (35). *CQFD.*

Preuve du théorème 4.12

Nous allons ici utiliser un résultat supplémentaire : l'espace $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ s'injecte de façon continue dans $L^{(2,1)}(\mathbb{R}^2)$. Ce résultat sera l'objet du théorème 4.13 qui suit, et dont nous donnerons une preuve. Soit $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$, comme dans la preuve précédente, nous considérons Ψ défini par

$$\Psi(z) = \int_{\mathbb{R}^2} K(z-\zeta)f(\zeta)d\zeta.$$

Puisque

$$-\Delta\Psi = f \text{ sur } \mathbb{R}^2,$$

d'après le théorème 4.8, toutes les dérivées secondes de Ψ sont dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ et $\Psi \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$. Cela entraîne, par l'injection continue de $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ dans $L^{(2,1)}(\mathbb{R}^2)$, que les dérivées de Ψ sont dans $L^{(2,1)}(\mathbb{R}^2)$, et puisque toutes les injections sont continues

$$||d\Psi||_{L^{(2,1)}(\mathbb{R}^2)} \leq C||f||_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)}.$$

En utilisant, comme dans la preuve précédente, le fait que (36) est équivalent à

$$d\phi = P(d\Psi_{|\Omega}),$$

nous en déduisons que $d\phi \in L^{(2,1)}(\Omega)$ et

$$||d\phi||_{L^{(2,1)}(\Omega)} \leq C||f||_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)},$$

grâce à la continuité de l'opérateur P, construit par la décomposition de Hodge. *CQFD.*

Théorème 4.13 *Pour tout $m \geq 2$, l'espace $W^{1,1}(\mathbb{R}^m)$ s'injecte de façon continue dans $L^{\left(\frac{m}{m-1},1\right)}(\mathbb{R}^m)$.*

Remarque 11 *La preuve qui suit nous a été communiquée indépendamment par Haïm Brezis et Pierre-Louis Lions.*

Preuve
Nous commençons par considérer le cas d'une fonction dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Le résultat général s'obtient alors par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^m)$. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Notons $\widetilde{f}$ le réarrangement sphérique décroissant de $|f|$, c'est-à-dire l'unique fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ ne dépendant que de $r = |x|$, décroissante en fonction de r, et telle que

$$\text{Mesure } \{x \in \mathbb{R}^m / \widetilde{f}(x) \geq s\} = \text{Mesure } \{x \in \mathbb{R}^m / |f(x)| \geq s\}.$$

Notons $\widetilde{f}^\star$ le réarrangement décroissant de f sur $[0, +\infty[$ et remarquons que si on désigne par $\alpha_m = \frac{|S^{m-1}|}{m}$, l'aire de la boule unité de $\mathbb{R}^m$, on a la relation suivante

$$f^\star(\alpha_m r^m) = \widetilde{f}(r).$$

En utilisant l'inégalité de Polya-Szégo (voir par exemple [Mossino]), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} |df(x)|dx &\geq \int_{\mathbb{R}^m} |d\widetilde{f}(x)|dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_{S^{m-1}} -\frac{d\widetilde{f}}{dr}(r) r^{m-1} d\sigma(x) \right) dr \\
&= -|S^{m-1}| \int_0^{+\infty} \frac{d\widetilde{f}}{dr} r^{m-1} dr \\
&= |S^{m-1}| \int_0^{+\infty} \widetilde{f}(r)(m-1) r^{m-2} dr.
\end{aligned}$$

Par le changement de variable $t = \alpha_m r^m$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} |df(x)|dx &\geq (m-1)\alpha_m^{\frac{1}{m}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m-1}{m}} f^\star(t) \frac{dt}{t} \\
&\geq C(m) ||f||_{L^{\left(\frac{m}{m-1},1\right)}(\mathbb{R}^m)}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. *CQFD.*

4.4 Inégalité de monotonie et régularité partielle en dimension supérieure ou égale à 2

Le théorème 4.2, sur la régularité des applications faiblement harmoniques à valeurs dans une sphère en dimension 2, admet une généralisation partielle en dimension supérieure, à condition de supposer que les solutions faibles considérées sont de surcroît faiblement stationnaires. Ce résultat a été démontré dans un premier temps pour les applications à valeurs dans la sphère par L.C. Evans. Avant d'en donner la preuve, nous introduisons une propriété très importante satisfaite par les applications stationnaires à valeurs dans n'importe quelle variété (une autre conséquence du théorème de Noether...)

Si $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$, pour tout $y \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(y,r) \subset \Omega$, nous définissons la quantité

$$E_{y,r}(u) := \frac{1}{r^{m-2}} \int_{B(y,r)} |du|^2 dx.$$

Nous remarquons qu'il s'agit d'une quantité homogène, au sens où, si $\lambda > 0$ et u_λ est défini sur $\Omega_\lambda = \lambda\Omega$ par $u_\lambda(x) = u(\frac{x}{\lambda})$, alors

$$E_{y,r}(u) = E_{\lambda y, \lambda r}(u_\lambda).$$

Lemme 4 (formule de monotonie) *Soit $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ une application faiblement Noether harmonique. Alors, $\forall y \in \Omega$, $\forall 0 < r < r'$,*

$$E_{y,r}(u) \leq E_{y,r'}(u). \tag{44}$$

Preuve Pour simplifier les notations, nous supposerons que $y = 0$. Soit $R > 0$ tel que $B(0,R) \subset \Omega$. Sur $B(0,R)$, nous considérons le champ de vecteurs $X^\alpha = H^\alpha_\beta x^\beta$, où $H^\alpha_\beta = \langle \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \rangle - \delta^\alpha_\beta \frac{|du|^2}{2}$. Alors, puisque u est faiblement Noether harmonique, $\text{div} X = H^\alpha_\alpha$ au sens des distributions sur $B(0,r)$. D'où, en utilisant la formule de Stokes sur $B(0,r) \subset B(0,R)$,

$$\begin{array}{rcl} -\frac{m-2}{2} \int_{B(0,r)} |du|^2 dx & = & \int_{B(0,r)} \text{div} X dx \qquad = \\ \int_{\partial B(0,r)} X.n d\sigma & = & r \int_{\partial B(0,r)} (|\frac{\partial u}{\partial n}|^2 - \frac{1}{2}|du|^2) d\sigma. \end{array} \tag{45}$$

Or,

$$\frac{d}{dr} E_{0,r}(u) = -\frac{m-2}{2r^{m-3}} \int_{B(0,r)} |du|^2 dx + \frac{1}{r^{m-2}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{|du|^2}{2} d\sigma.$$

En substituant la valeur de $-\frac{m-2}{2} \int_{B(0,r)} |du|^2 dx$ donnée par (45) dans cette équation, il vient

$$\frac{d}{dr} E_{0,r}(u) = \frac{1}{r^{m-2}} \int_{\partial B(0,r)} |\frac{\partial u}{\partial n}|^2 d\sigma \geq 0.$$

CQFD.

Cette inégalité joue un très grand rôle par exemple dans la théorie de la régularité des applications minimisantes de R. Schoen et K. Uhlenbeck [Schoen, Uhlenbeck 2]. Elle a la conséquence suivante.

Lemme 5 *Soit $x_0 \in \Omega$, $\gamma > 0$ et $R > 0$ tels que $B(x_0,(1+\gamma)R) \subset \Omega$. Alors si $u \in H^1(\Omega,\mathcal{N})$ satisfait l'inégalité (44) dans $B(x_0,(1+\gamma)R)$, u est bornée dans BMO sur $B(x_0,R)$ et*

$$||u||_{BMO(B(x_0,R))} \leq C \left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{m-2}{2}} \sqrt{E_{x_0,(1+\gamma)R}(u)}. \qquad (46)$$

où C est une constante qui ne dépend que de m.

Preuve Un raisonnement géométrique élémentaire montre que $\forall y \in B(x_o,R)$, $B(y,\gamma R) \subset B(x_0,(1+\gamma)R)$ et

$$E_{y,\gamma R}(u) \leq \left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)^{m-2} E_{x_0,(1+\gamma)R}(u). \qquad (47)$$

Le lemme repose sur l'inégalité de Poincaré-Sobolev suivante. Si $y \in B(x_0,R)$, $r < \gamma R$ et $u_{y,r}$ est la moyenne de u sur $B(y,r)$,

$$\frac{1}{r^m}\int_{B(y,r)} |u-u_{y,r}|^2 dx \leq \frac{C}{r^{m-2}}\int_{B(y,r)} |du|^2 dx, \qquad (48)$$

où C est une constante universelle. En enchaînant cette inégalité avec l'inégalité de monotonie (44) et (47), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^m}\int_{B(y,r)} |u-u_{y,r}|^2 dx &\leq CE_{y,r}(u) \leq CE_{y,\gamma R}(u) \\ &\leq C\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)^{m-2} E_{x_0,(1+\gamma)R}(u). \end{aligned} \qquad (49)$$

Le passage au suprémum sur y et r dans (49) donne alors (46). *CQFD.*

Remarque 12 *Précisons que ce résultat n'est significatif que si $m \geq 3$. En effet l'injection $H^1(\mathbb{R}^2) \subset BMO(\mathbb{R}^2)$ rend ce lemme inutile en dimension 2 (tout comme l'inégalité de monotonie (44) est superflue en dimension 2). En revanche, si $m \geq 3$, $H^1(\mathbb{R}^m) \subset L^{\frac{2m}{m-2}}(\mathbb{R}^m)$, qui contient strictement $BMO(\mathbb{R}^m)$.*

Abordons la preuve du résultat de régularité de L.C. Evans. Elle repose sur le résultat de réguarité brut qui suit.

Théorème 4.14 *Il existe des constantes $\epsilon_0 > 0$ et $0 < \tau < 1$ telles que $\forall u \in H^1(\Omega,S^n)$ faiblement stationaire et $\forall x_0 \in \Omega$, $\forall r > 0$, tels que $B(x_0,r) \subset \Omega$, si*

$$E_{x_0,r}(u) \leq 2^{m-2}\epsilon_0^2,$$

alors

$$E_{x_0,\tau r}(u) \leq \frac{1}{2} E_{x_0,r}(u). \qquad (50)$$

Nous conclurons cette section par la preuve de ce théorème. Mais pour compléter la preuve du théorème de régularité, à partir de ce résultat "brut", nous devons montrer un certain nombre d'étapes, relativement classiques depuis les techniques inventées par C.B. Morrey et S. Campanato.

Etape 1 Grâce à l'inégalité de monotonie (44), dès que le théorème 4.14 s'applique à l'échelle r, il s'applique à toute échelle plus petite, telle que $\tau^k r$ (pour $k \in \mathbb{N}$). En concaténant les inégalités obtenues, on montre que $\forall x_0 \in \Omega$, $\forall r > 0$, si $E_{x_0,r}(u) < 2^{m-2}\epsilon_0^2$, $\forall \rho < \frac{r}{2}$,

$$E_{x_0,\rho}(u) \leq \frac{1}{\tau^{m-2}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha} E_{x_0,r}(u), \tag{51}$$

où $\alpha = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \tau} > 0$.

Etape 2 Un raisonnement géométrique simple montre que si $B(y_0, 2r) \subset \Omega$ et $E_{y_0,2r}(u) < \epsilon_0^2$, alors pour tout $x_0 \in B(y_0, r)$, $E_{x_0,r}(u) < 2^{m-2}\epsilon_0^2$ et donc, en vertu de l'étape 1, l'inégalité (51) a lieu en tout point $x_0 \in B(y_0, r)$.

Etape 3 Le résultat précédent peut s'interpréter en utilisant les résultats de C.B. Morrey ou les espaces de Campanato : si $E_{y_0,2r}(u) < \epsilon_0^2$, alors u est $\mathcal{C}^{0,\frac{\alpha}{2}}$ sur $B(y_0, r)$.

Etape 4 On considère

$$\mathcal{S} := \{x \in \Omega / \forall r > 0, B(x,r) \subset \Omega, E_{x,r}(u) \geq \epsilon_0^2\}.$$

D'une part, un argument de recouvrement montre que si $\mathcal{H}^{m-2}(\mathcal{S})$ était non nul, alors $\int_\Omega |du|^2 dx$ serait aussi infinie, ce qui est une contradiction. D'autre part, en vertu de l'étape 3, u est $\mathcal{C}^{0,\frac{\alpha}{2}}$ sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$.

Etape 5 *Conclusion.* Par des résultats de régularité classique (E. de Giorgi, G. Stamppachia, cf [Ladyzhenskaya, Ural'tseva]), on en déduit que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \setminus \mathcal{S})$.

Preuve du théorème 4.14

Nous décrivons ici une variante de la preuve écrite par L.C. Evans.

Etape 1 Nous décomposons u sur $B(x_0, r)$ en $u = v + w$ où

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v & = & u|du|^2 & \text{sur } B(x_0,r) \\ v & = & 0 & \text{sur } \partial B(x_0,r), \end{array} \right. \tag{52}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w & = & 0 & \text{sur } B(x_0,r) \\ w & = & u & \text{sur } \partial B(x_0,r). \end{array} \right. \tag{53}$$

Et nous cherchons à évaluer l'énergie de u, donc de v et w, sur une boule $B(x_0, \rho) \subset B(x_0, r)$. En vertu de (53), on a

$$\int_{B(x_0,\rho)} |dw|^2 dx \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^m \int_{B(x_0,r)} |dw|^2 dx \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^m \int_{B(x_0,r)} |du|^2 dx. \qquad (54)$$

Il reste à prouver que v est en somme une perturbation de w (dont le comportement est excellent), d'énergie pas trop grande. Soit $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que $\zeta = 1$ sur $B(x_0, \frac{r}{2})$, $\zeta = 0$ en dehors de $B(x_0, \frac{3r}{4})$ et $|d\zeta| \leq \frac{C}{r}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,\frac{r}{2})} |dv|^2 dx &\leq \int_{B(x_0,r)} |d(\zeta v)|^2 dx \\ &\leq \int_{B(x_0,r)} -\langle \zeta v, \Delta(\zeta v)\rangle dx \\ &\leq \int_{B(x_0,r)} -\zeta^2 \langle v, \Delta v\rangle dx + R_1, \end{aligned} \qquad (55)$$

où $R_1 = \int_{B(x_0,r)} -\zeta\langle v d\zeta, dv\rangle dx$ est relativement facile à estimer. Nous ne nous occuperons pas de R_1 dans la suite. Le lecteur pourra vérifier que la contribution de ce terme ne change pas ce qui suit.

Utilisons l'équation (52) dans dans (55). Il vient

$$\int_{B(x_0,\frac{r}{2})} |dv|^2 dx \leq \int_{B(x_0,r)} \zeta^2 \langle u, v\rangle |du|^2 dx + R_1.$$

Nous utilisons alors la même astuce qu'en dimension 2, exploîtant dans un premier temps le fait que $\sum_{j=1}^{n+1} u^j du^j = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,\frac{r}{2})} |dv|^2 dx &\leq \int_{B(x_0,r)} \zeta^2 \sum_{i,j=1}^{n+1} v^i \langle u^i du^j - u^j du^i, du^j\rangle dx + R_1 \\ &\leq \int_{B(x_0,r)} \sum_{i,j=1}^{n+1} \zeta v^i \langle u^i du^j - u^j du^i, d(\zeta(u^j - u^j_{x_0,\frac{3r}{4}}))\rangle dx \\ &\quad + R_1 + R_2, \end{aligned} \qquad (56)$$

où $u^j_{x_0,\frac{3r}{4}}$ est la moyenne de u sur $B(x_0, \frac{3r}{4})$ et

$$R_2 = -\int_{B(x_0,r)} \sum_{i,j=1}^{n+1} \zeta v^i \langle u^i du^j - u^j du^i, d\zeta\rangle (u^j - u^j_{x_0,\frac{3r}{4}}) dx$$

est un terme relativement facile à estimer, tout comme R_1, dont nous ne nous occuperons pas. Nous souhaitons à présent intégrer par partie le membre de droite dans (56) et écrire

$$
\begin{aligned}
\int_{B(x_0,\frac{r}{2})} |dv|^2 dx \quad &\leq \quad -\int_{B(x_0,r)} \sum_{i,j=1}^{n+1} \zeta(u^j - u^j_{x_0,\frac{3r}{4}}) \mathrm{div}\left(\zeta v^i (u^i du^j - u^j du^i)\right) dx \\
&\qquad\qquad +R_1 + R_2.
\end{aligned} \tag{57}
$$

Remarquons que le sens de l'intégrale de gauche n'est pas évident a priori (en particulier, tout ce que l'on sait sur ζv est son appartenance à $H^1 \subset L^{\frac{2m}{m-2}}$). C'est ici que nous utilisons le théorème de Noether, qui nous dit que

$$
\mathrm{div}(u^i du^j - u^j du^i) = 0, \ \forall i,j, \tag{58}
$$

et donc on peut intégrer cette loi de conservation et construire des fonctions $A^{ij}_{\alpha\beta} \in H^1(B(x_0,r))$ telles que

$$
u^i \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} - u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial A^{ij}_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \text{ sur } B(x_0, \frac{3r}{4}).
$$

Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ une fonction à support dans $B(x_0,r)$ et valant 1 sur $B(x_0, \frac{3r}{4})$. Alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\left(\zeta v^i (u^i du^j - u^j du^i)\right) \quad &= \quad \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial(\zeta v^i)}{\partial x^\alpha} \left(u^i \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} - u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \right) \\
&= \quad \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\partial(\zeta v^i)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(\chi A^{ij}_{\alpha\beta})}{\partial x^\beta}
\end{aligned}
$$

au sens faible sur $B(x_0, \frac{3r}{4})$. Or le théorème 4.6 nous garantit que cette quantité est dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$, avec

$$
\begin{aligned}
\|\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\partial(\zeta v^i)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(\chi A^{ij}_{\alpha,\beta})}{\partial x^\beta}\|_{\mathcal{H}^1} \quad &\leq \quad C\|d(\zeta v)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \|d(\chi A^{ij}_{\alpha,\beta})\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\
&\leq \quad C\|dv\|_{L^2(B(x_0,r))} \|du\|_{L^2(B(x_0,r))}.
\end{aligned} \tag{59}
$$

D'un autre coté, en utisant le lemme 5 et en travaillant un petit peu, on peut montrer que $\zeta(u^j - u^j_{x_0,\frac{3r}{4}})$ est borné dans BMO et que

$$
\|\zeta(u^j - u^j_{x_0,\frac{3r}{4}})\|_{BMO(\mathbb{R}^m)} \leq C\sqrt{E_{x_0,r}(u)}. \tag{60}
$$

Donc l'intégrale de droite dans (57) prend un sens en tant que produit de densité entre une fonction dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$ et une fonction dans $BMO(\mathbb{R}^m)$.. Utilisant le théorème de Fefferman-Stein, on en déduit que

$$
\begin{aligned}
\int_{B(x_0,\frac{r}{2})}|dv|^2dx &\leq C||\zeta(u^j-u^j_{x_0,\frac{3r}{4}})||_{BMO(\mathbb{R}^m)}||\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\frac{\partial(\zeta v^i)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial(\chi A^{ij}_{\alpha,\beta})}{\partial x^\beta}||_{\mathcal{H}^1}\\
&\quad +R_1+R_2\\
&\leq C\sqrt{E_{x_0,r}(u)}||dv||_{L^2(B(x_0,r))}||du||_{L^2(B(x_0,r))}.
\end{aligned}
$$

Or, puisque $||dv||_{L^2(B(x_0,r))}\leq ||du||_{L^2(B(x_0,r))}+||dw||_{L^2(B(x_0,r))}\leq 2||du||_{L^2(B(x_0,r))}$, on obtient que

$$
\int_{B(x_0,\frac{r}{2})}|dv|^2dx\leq C\sqrt{E_{x_0,r}(u)}\int_{B(x_0,r)}|du|^2dx. \tag{61}
$$

En rassemblant (54) et (61), on obtient, si $\rho<\frac{r}{2}$,

$$
E_{x_0,\rho}(u)\leq 2\left((\frac{\rho}{r})^2+(\frac{r}{\rho})^{m-2}C\sqrt{E_{x_0,r}(u)}\right)E_{x_0,r}(u). \tag{62}
$$

En chosissant $\rho=\tau r$, avec $\tau\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}$, puis $E_{x_0,r}(u)\leq\epsilon_0^2$, avec $\epsilon_0^2\leq\frac{\tau^{m-2}}{4C}$, on obtient le résultat cherché. *CQFD.*

Remarque 13 *1) Il est étonnant de constater que les théorèmes de Noether obtenus respectivement grâce aux symétries sur $\mathbb{R}^m$ et sur S^n se complètent, via la dualité entre $\mathcal{H}^1$ et BMO.*
2) Récemment, plusieurs auteurs ont obtenu des preuves du résultat de L.. C. Evans ou des généralisations utilisant également le théorème de Noether, mais sans faire appel aux espaces de Hardy et en particulier au résultat difficile sur la dualité entre Hardy et BMO ([Hajlasz, Strzelecki], [Chang, Wang, Yang]).

4.5 Applications faiblement harmoniques à valeurs dans une variété quelconque

Nous terminons en abordant le cas des applications faiblement harmoniques à valeurs dans une variété riemannienne $\mathcal{N}$ quelconque, sous la seule hypothèse que $\mathcal{N}$ est compacte, sans bord et plongée isométriquement de façon $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^N$. Il se trouve que les résultats de régularité vus précédemment se généralisent. Le résultat en dimension 2 est dû à F. Hélein [Hélein 3] et celui en dimension supérieure ou égale à 3 est dû à F. Bethuel [Bethuel 2] (cf aussi [Hélein 4]). En revanche, les résultats de fermeture dans la topologie faible des applications faiblement harmoniques n'ont pas été généralisés à ce jour. Nous n'aborderons ici que le résultat de régularité en dimension 2.

Preuve du théorème 4.2

Nous allons travailler en deux temps. Nous noterons $z=(x,y)=x+iy$ la variable sur $\Omega\subset\mathbb{R}^2$.

Etape 1 Nous fabriquons des fonctions test adéquates, c'est à dire des fonctions $\phi \in H_0^1 \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ pour exploîter efficacement l'équation

$$\int_\Omega \left(-\langle d\phi, du\rangle + \langle A(u)(du, du), \phi\rangle\right) dxdy = 0.$$

Si par exemple $\mathcal{N} = S^2$, on est en présence d'un problème symétrique et le théorème de Noether nous indique de prendre $\phi = u \times \psi$, où $\psi \in H_0^1 \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

En l'absence de symétrie, nous utiliserons $\phi(z) = \psi(z)e_1(z)$, $\psi(z)e_2(z)$,... $\psi(z)e_n(z)$, où $\psi \in H_0^1 \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $(e_1(z), ...e_n(z))$ est une base orthonormée de $T_{u(x)}\mathcal{N}$, l'espace tangent à $\mathcal{N}$ en $u(x)$. Il s'agit d'un repère orthonormé mobile le long de u. Notons qu'il y a une infinité de tels repères mobiles, puisque si $R \in H^1(\Omega, SO(n))$, $e'_a(z) = \sum_{b=1}^n e_b(z)R_a^b(z)$ définit à nouveau un repère orthonormé mobile le long de u. Le choix d'un repère particulier parmi toutes ces *transformations de jauge* est crucial : nous prendrons ici ce que nous appellerons un *repère de Coulomb*.

Etape 2 Exploîter ces fonctions test, c'est à dire, utiliser le repère de Coulomb.

Etape 1 Nous supposons au départ qu'il existe un champ de repères orthonormés $\tilde{e}(m) = (\tilde{e}_1(m), ..., \tilde{e}_n(m))$ (où ici $m \in \mathcal{N}$) tangents à $\mathcal{N}$, défini et régulier sur tout $\mathcal{N}$. Une telle hypothèse n'est pas innocente et suppose que le fibré tangent soit parallélisable, une propriété topologique globale que ne possèdent seulement certaines variétés comme les tores ou les sphères S^1, S^3 ou S^7. Néanmoins, on peut montrer qu'il est toujours possible de se ramener à cette situation, au moyen de constructions géométriques (cf [Hélein 4]).

Soit $u \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$ (non nécessairement faiblement harmonique pour l'instant). Pour tout $R \in H^1(\Omega, SO(n))$, nous considérons le repère orthonormé mobile le long de u, $e(z) = (e_1(z), ..., e_n(z))$ défini par

$$e_a(z) = \sum_{b=1}^n \tilde{e}_b(u(z))R_a^b(z).$$

(Remarquez la dépendance en z). Notons

$$\omega_a^b(z) = \langle de_a(z), e_b(z)\rangle = \langle \frac{\partial e_a}{\partial x}(z), e_b(z)\rangle dx + \langle \frac{\partial e_a}{\partial y}(z), e_b(z)\rangle dy$$

une 1-forme (de connexion) sur Ω à coefficients dans L^2. Nous associons à e (donc à $R \in H^1(\Omega, \mathcal{N})$) l'énergie

$$F(R) = \int_\Omega \sum_{1\leq a<b\leq n} |\omega_a^b|^2 dxdy,$$

où $|\omega_a^b|^2 = \omega_a^b(\frac{\partial}{\partial x})^2 + \omega_a^b(\frac{\partial}{\partial y})^2$. Il est relativement facile de prouver l'existence d'un repère mobile qui minimise F sur $H^1(\Omega, \mathcal{N})$. Soit e un tel repère, il satisfait à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x}\langle\frac{\partial e_a}{\partial x},e_b\rangle+\frac{\partial}{\partial y}\langle\frac{\partial e_a}{\partial y},e_b\rangle & = & 0 \text{ sur } \Omega \\ \langle\frac{\partial e_a}{\partial n},e_b\rangle & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{63}$$

Nous appelerons *repère de Coulomb* un tel tel repère mobile (Exercice : montrer (63) en appliquant le théorème de Noether). Cette équation a la conséquence suivante : supposons Ω simplement connexe, alors, pour $1 \le a < b \le n$, $\exists! A_a^b \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} dA_a^b & = & \langle\frac{\partial e_a}{\partial y},e_b\rangle dx-\langle\frac{\partial e_a}{\partial x},e_b\rangle dy \text{ sur } \Omega \\ A_a^b & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{64}$$

Calculons $-\Delta A_a^b$ en utilisant (64)

$$-\Delta A_a^b=\langle\frac{\partial e_a}{\partial x},\frac{\partial e_b}{\partial y}\rangle-\langle\frac{\partial e_a}{\partial y},\frac{\partial e_b}{\partial x}\rangle. \tag{65}$$

Un examen de (65) révèle que $-\Delta A_a^b$ est une somme finie de déterminants jacobiens $\sum_{i=1}^N\{e_a^i,e_b^i\}$, où e_a^i est la i-ème composante de e_a dans une base orthonormée fixe de $\mathbb{R}^N$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 4.5 : $-\Delta A_a^b$ coïncide localement avec une fonction dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^m)$.

Nous appliquons alors le théorème 4.12 et nous en déduisons que $\frac{\partial A_a^b}{\partial x}$ et $\frac{\partial A_a^b}{\partial y}$ appartiennent à $L^{(2,1)}(\Omega)$. Revenant à e_a, ce résultat signifie, via (64), que

$$\omega_a^b \in L_{loc}^{(2,1)}(\Omega). \tag{66}$$

Ainsi le choix d'un repère de Coulomb conduit à une estimation (**??**) légèrement meilleure que l'information initiale $\omega_a^b \in L^2(\Omega)$.

Etape 2 Utilisation du repère de Coulomb.
Nous supposons à présent que u est faiblement harmonique et nous projetons l'équation

$$\Delta u \perp T_{u(z)}\mathcal{N} \text{ au sens faible}$$

sur le repère mobile. Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\langle\frac{\partial u}{\partial x},e_a\rangle+\frac{\partial}{\partial y}\langle\frac{\partial u}{\partial y},e_a\rangle &= \langle\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial e_a}{\partial x}\rangle+\langle\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial e_a}{\partial x}\rangle \\ &= \sum_{b=1}^n\langle\frac{\partial u}{\partial x},e_b\rangle\langle\frac{\partial e_a}{\partial x},e_b\rangle+\langle\frac{\partial u}{\partial y},e_b\rangle\langle\frac{\partial e_a}{\partial y},e_b\rangle. \end{aligned} \tag{67}$$

Il est utile d'adjoindre à cette équation la projection sur e_a de l'équation $ddu = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle\frac{\partial u}{\partial y},e_a\rangle-\frac{\partial}{\partial y}\langle\frac{\partial u}{\partial x},e_a\rangle=\sum_{b=1}^n\langle\frac{\partial u}{\partial y},e_b\rangle\langle\frac{\partial e_a}{\partial x},e_b\rangle-\langle\frac{\partial u}{\partial x},e_b\rangle\langle\frac{\partial e_a}{\partial y},e_b\rangle. \tag{68}$$

Les équations (67) et (68) se condensent maintenant en un système elliptique du premier ordre (Cauchy-Riemann non linéaire) comme suit. Notons $\alpha^a = \langle \frac{\partial u}{\partial x}, e_a\rangle - i\langle \frac{\partial u}{\partial y}, e_a\rangle \in \mathbb{C}$ et $\theta_a^b = \frac{1}{2}\left(\langle \frac{\partial e_a}{\partial x}, e_b\rangle + i\langle \frac{\partial e_a}{\partial y}, e_b\rangle\right)$ et finalement

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \ , \ \theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta_2^1 & \cdots & \theta_n^1 \\ \theta_1^2 & 0 & \cdots & \theta_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta_1^n & \theta_2^n & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in so(n) \otimes \mathbb{C}.$$

Nous avons alors

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \overline{z}} = \theta.\alpha. \tag{69}$$

Le point crucial dans le l'exploitation de cette équation, où $\alpha \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^n)$, est que $\theta \in L^{(2,1)}_{loc}(\Omega, so(n) \otimes \mathbb{C})$. En effet, utilisant le fait que $L^{(2,1)}$ est en dualité avec $L^{(2,\infty)}$ et que $\frac{1}{\pi z}$, le noyau de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, est dans $L^{(2,\infty)}$, on peut construire facilement des fonctions $\beta \in L^{(2,\infty)}_{loc}(\Omega, SO(n)^{\mathbb{C}})$ solutions de

$$\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}} = \theta.\beta. \tag{70}$$

Et il s'ensuit, en utilisant (69) et (70), que

$$\frac{\partial ({}^t\beta\alpha)}{\partial \overline{z}} = {}^t\beta.{}^t\theta.\alpha + {}^t\beta.\theta.\alpha = 0.$$

Donc ${}^t\beta\alpha$ est holomorphe, d'où l'on déduit immédiatement que $\alpha \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$. Cette information signifie que u est localement lipschitzienne. On en déduit alors, par des arguments classiques, que u est régulière. *CQFD.*

Remarque 14 *La preuve du théorème de F. Bethuel, qui généralise celui de L.C. Evans aux applications faiblement stationnaires à valeurs dans $\mathcal{N}$ est plus compliquée et fait appel à toutes les techniques que nous avons vues, dont notamment la dualité entre Hardy et BMO et l'utilisation des repères de Coulomb.*

5 Reférences bibliographiques

[Baird, Eells] P. Baird, J. Eells, *A conservation law for harmonic maps*, Symp. Utrecht (1980), Lec. Notes Maths. 894, Springer 1981, 1-25.

[Bergh, Löfström] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces, an introduction*, Springer Verlag Berlin, 1976.

[Bethuel 1] F. Bethuel, *The approximation problem for Sobolev mappings between manifolds*, Acta Mathematica 167 (1991), 167-201.

[Bethuel 2] F. Bethuel, *On the singular set of stationary harmonic maps*, Manuscripta Mathematica 78 (1993), 417-443.

[Bethuel, Zheng] F. Bethuel, X. Zheng, *Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev spaces*, J. Funct. Anal. 80 (1988), 60-75.

[Brezis] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris 1983.

[Brezis, Coron] H. Brezis, J.-M. Coron, *Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture*, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), 149-187.

[Brezis, Coron, Lieb] H. Brezis, J.-M. Coron, E.H. Lieb *Harmonic maps with defects*, Comm. Math. Phys. 107 (1986), 649-705.

[Chang, Wang, Yang] S.-Y. A. Chang, L. Wang, P. C. Yang, *Regularity of harmonic maps*, prépublication 1998.

[Chen] Y. Chen, *The weak solutions to the evolution problems of harmonic maps*, Math. Zeitschrift 201 (1989), 69-74.

[Coifman, Lions, Meyer, Semmes] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer, S.. Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pure Appl. 72 (1993), 247-286.

[Evans] L. C. Evans, *Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres*, Arch. Rat. Mech. Anal. 116 (1991), 101-163.

[Fefferman] C. Fefferman, *Characterisation of bounded mean oscillations*, Bull. Am. Math. Soc. 77 (1971), 585-587.

[Fefferman, Stein] C. Fefferman, E. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Mathematica 129 (1972), 137-193.

[Giaquinta] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Princeton University Press, 1983.

[Grüter] M. Grüter, *Regularity of weak H-surfaces*, J. Reine Angewandte Math 329 (1981), 1-15.

[Hajlasz, Strzelecki] P. Hajlasz, P. Strzelecki, *Subelliptic p-harmonic maps into spheres and the ghost of Hardy spaces*, Prépublication, 1997.

[Hélein 1] F. Hélein, *Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphère*, C. R. Acad. Sci. Paris 311 (1990), 519-524.

[Hélein 2] F. Hélein, *Regularity of weakly harmonic maps from a surface into a manifold with symmetries*, Manuscripta Mathematica 70 (1991), 293-318.

[Hélein 3] F. Hélein, *Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne*, C. R. Acad. Sci. Paris 312 (1990), 591-596.

[Hélein 4] F,. Hélein, *Applications harmoniques, lois de conservation et repères mobiles*, Diderot éditeur, 1996 ; *Harmonic maps, conservations laws and moving frames*, Diderot éditeur, 1997.

[Hildebrandt, Kaul, Widman] S. Hildebrandt, H. Kaul, K.-O. Widman, *An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Acta Mathematica 138 (1977), 1-16.

[Hunt] R.A. Hunt, *On L(p,q) spaces*, L'enseignement mathématique XII (1966), 249-276.

[John, Nirenberg] F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillations*, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415-426.

[Keller, Rubinstein, Sternberg] J. Keller, J. Rubinstein, P. Sternberg, *Reaction-diffusion processes and evolution to harmonic maps*, SIAM J. Appl. Math. 49 n. 6 (1989), 1722-1733.

[Ladyzhenskaya, Ural'tseva] O. Ladyzhenskaya, N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic press, New York and London, 1968.

[Lemaire] L. Lemaire, *Applications harmoniques de surfaces riemanniennes*, J. Diff. Geometry 13 (1978), 51-78.

[Lin 1] F. H. Lin, *Une remarque sur l'application* $x/|x|$, C. R. Acad. Sci. Paris 305 (1987), 529-531.

[Lin 2] F. H. Lin, *Gradient estimates and blow-up analysis for stationary harmonic maps*, prépublication..

[Morrey] C.B. Morrey Jr., *The problem of Plateau on a Riemannian manifold*, Ann. Math. 49 (1948), 807-951.

[Müller] S. Müller, *Higher integrability of determinants and weak convergence in* L^1, J. Reine Angewandte Math. 412 (1990), 20-34.

[Olver] P. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, second edition, Graduate text in Math. 107, Springer-Verlag, New-York, 1993.

[Pohozaev] S. Pohozaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u = \lambda f(u)$, Soviet Math. Dokl. 6 (1965), 1408-1411 (traduction de Dokl. Akad. Nauk. SSSR 165 (1965), 33-36).

[Rivière] T. Rivière, *Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres*, Acta Math. 175 (1995), 197-226.

[Schoen] R. Schoen, *Analytic aspects of the harmonic maps problem*, Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations (S.S. Chern editor), MSRI publication, vol. 2, Springer-Verlag, New-York, 1984.

[Schoen, Uhlenbeck 1] R. Schoen, K. Uhlenbeck, *Approximation theorems for Sobolev mappings*, prépublication.

[Schoen, Uhlenbeck 2] R. Schoen, K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps*, J. Diff. Geometry 17 (1982), 307-335 et 18 (1983), 253-268.

[Shatah] J. Shatah, *Weak solutions and developments of singularities of the SU(2)* σ*-model*, Comm. Pure and Appl. Math. 41 (1988), 459-469.

[Stein 1] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[Stein 2] E. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1993.

[Stein, Weiss] E. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[Wente 1] H. Wente, *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature*, J. Math. Anal. Appl. 26 (1969), 318-344.

[Wente 2] H. Wente, *Large solutions to the volume constraint Plateau problem*, Arch. Rat. Mech. Anal. 75 (1980), 59-77.

[Wood] J. Wood, *Nonexistence of solutions to certain Dirichlet problems for harmonic maps*, prépublicaton, Université de Leeds, 1981.

[Ziemer] W. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer-Verlag, 1989.

Ces notes font suite à plusieurs séries de cours que j'ai données à l'Université de Tripoli, au Liban en avril 1997, à l'Université de Bucarest, en Roumanie en mai 1997, à l'Université de Bordeaux en janvier 1998 et enfin à l'Université de Pise, en Italie en mai et juin 1998. A ce titre, je tiens à remercier tous ces instituts pour m'avoir accueilli et plus particulièrement l'Université de Pise et le Professeur Giaquinta pour leur invitation, sans laquelle ce texte n'aurait peut-être jamais vu le jour. Je remercie également Gilles Carbou et Nicola Visciglia pour leur aide, lors de la préparation de ce texte.

Frédéric Hélein, membre de l'Institut Universitaire de France, Centre de mathématiques et de Leurs Applications, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France
helein@math.jussieu.fr.