Université Paris Diderot—Paris 7
Introduction à la mécanique statistique
et à la physique quantique

M2 de Mathématiques fondamentales
Frédéric Hélein
2011-2012

Quelques notions de calcul différentiel extérieur et de géométrie différentielle

1 Premières notions de calcul différentiel extérieur

1.1 L'algèbre extérieure

Notation : si V est un espace vectoriel, on note V^* son dual.

Définition 1.1 (forme p-multilinéaire alternée) *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie m. Une **forme p-multilinéaire alternée α sur V** ou, de façon abrégée, une **p-forme α sur V** est une application $\alpha : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $V \times \cdots \times V = V^p$) qui est*

- *multilinéaire, i.e. $\forall i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq p$, pour tous $v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_p, w_i \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

$$\alpha(v_1, \cdots, \lambda v_i + \mu w_i, \cdots, v_p) = \lambda\alpha(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_p) + \mu\alpha(v_1, \cdots, w_i, \cdots, v_p);$$

- *alternée, i.e. $\forall i, j \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i, j \leq p$,*

$$\alpha(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) + \alpha(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) = 0.$$

On note $\Lambda^p V^*$ l'espace vectoriel des p-formes sur V. Nous conviendrons que $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$.

Remarque — si $p > m$, alors $\Lambda^p V^* = \{0\}$.

Définition 1.2 (produit extérieur) *Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on définit le produit extérieur*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^p V^* \times \Lambda^q V^* & \longrightarrow & \Lambda^{p+q} V^* \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha \wedge \beta \end{array}$$

par

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \cdots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \cdots, v_{\sigma(p+q)}).$$

Remarque — cette opération est clairement bilinéaire.

Définition 1.3 (algèbre extérieure) *On note*

$$\Lambda^* V^* := \oplus_{p=0}^m \Lambda^p V^*.$$

*Alors le produit extérieur s'étend par linéarité en une loi de composition interne dans $\Lambda^* V^*$. On obtient l'**algèbre extérieure** $(\Lambda^* V^*, +, \wedge)$.*

Cette algèbre satisfait les conditions suivantes :

- elle est associative :

$$\forall \alpha \in \Lambda^p V^*, \forall \beta \in \Lambda^q V^*, \forall \gamma \in \Lambda^r V^*, \quad (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma). \tag{1}$$

  On peut donc noter $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ ce produit extérieur.
- elle n'est *pas* commutative mais elle est *commutative graduée*, c'est à dire :

$$\forall \alpha \in \Lambda^p V^*, \forall \beta \in \Lambda^q V^*, \quad \beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta. \tag{2}$$

Comment construire une base de $\Lambda^p V^*$?
Soit $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$ une base de V et soit $(\theta^1, \cdots, \theta^m)$ la base de V^* qui est duale de $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, la famille

$$\left(\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}\right)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m}$$

est une base de $\Lambda^p V^*$. Par conséquent $\dim \Lambda^p V^* = \frac{m!}{(m-p)!p!}$. On en déduit aussi que

$$\dim \Lambda^* V^* = \sum_{p=0}^{m} \dim \Lambda^p V^* = \sum_{p=0}^{m} \frac{m!}{(m-p)!p!} = 2^m.$$

1.2 Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$

Définition 1.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{N}$. Une p-forme différentielle α sur U est une application régulière*

$$\alpha : U \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*.$$

On note $\Omega^p(U)$ l'ensemble des p-formes sur U.

Exemples : a) si $p = 0$, une forme différentielle sur U de degré 0 est juste une fonction de U dans $\mathbb{R}$.
b) Soit φ une fonction dans $\mathcal{C}^1(U)$). Alors l'application différentielle $d\varphi : \mathrm{M} \longmapsto d\varphi_{\mathrm{M}}$ est une 1-forme.

Quelques commentaires sur les notations — Si $x = (x^1, \cdots, x^m) : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un système de coordonnées sur U (affine, ou plus généralement, régulières), alors en tout point $\mathrm{M} \in U$, les différentielles

$$dx^1_{\mathrm{M}}, \cdots, dx^m_{\mathrm{M}}$$

forment une base de $(\mathbb{R}^m)^*$. Donc on peut décomposer la valeur de α_{M} dans la base $\left(dx^{i_1}_{\mathrm{M}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}_{\mathrm{M}}\right)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m}$:

$$\alpha_{\mathrm{M}} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \cdots i_p}(\mathrm{M}) dx^{i_1}_{\mathrm{M}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}_{\mathrm{M}}.$$

L'usage est, sauf indication contraire, de ne pas écrire l'indice M dans dx^i_{M} :

$$\alpha_{\mathrm{M}} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \cdots i_p}(\mathrm{M}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

On peut aussi introduire les multi-indices $I = (i_1, \cdots, i_p)$, avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ et noter $\alpha_I := \alpha_{i_1 \cdots i_p}$ et $dx^i := dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, ce qui donne

$$\alpha_{\mathrm{M}} = \sum_I \alpha_I(\mathrm{M}) dx^I.$$

Enfin, si $(x^1, \cdots, x^m)$ sont les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^m$, alors on a $\mathrm{M} = x = (x^1, \cdots, x^m)$ et on écrit tout simplement

$$\alpha_x = \sum_I \alpha_I(x) dx^I.$$

2 Les variétés

2.1 Variétés, espaces tangents et cotangents

Définition 2.1 (Variété différentielle) *Une variété différentielle $\mathcal{M}$ de dimension n est un espace topologique équipé d'un **atlas**, c'est à dire un système de **cartes locales** $x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i \subset \mathbb{R}^m$, où $i \in I$ (I est un ensemble fini ou dénombrable) et*

– *chaque* $\mathcal{O}_i$ *est un ouvert de* $\mathcal{M}$ *et la réunion* $\cup_{i\in I}\mathcal{O}_i$ *est égale à* $\mathcal{M}$ *;*
– *chaque* U_i *est un ouvert de* $\mathbb{R}^m$ *;*
– *chaque application* x_i *est un homéomorphisme ;*
– *si* $\mathcal{O}_{ij} := \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ *est non vide, alors l'homéomorphisme* $\varphi_{ij} := x_j \circ (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})}$ *est un difféomorphisme de* $x_i(\mathcal{O}_{ij})$ *vers* $x_j(\mathcal{O}_{ij})$.

On dit que la variété est de classe $\mathcal{C}^k$ *si les applications de recollement* $\varphi_{ij} : (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})} \longrightarrow x_i(\mathcal{O}_{ij})$ *sont toutes de classe* $\mathcal{C}^k$.

Pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, on définit l'*espace tangent* à la variété $\mathcal{M}$ en M comme suit. On définit dans l'ensemble $\Gamma_{\mathrm{M}} := \{(I,\gamma); I \text{ (intervalle) } \subset \mathbb{R}, 0 \in I, \gamma \in \mathcal{C}^1(I,\mathcal{M}), \gamma(0) = \mathrm{M}\}$ la relation d'équivalence $\sim$ définie par : pour toute carte locale $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$,

$$(I_1,\gamma_1) \sim (I_2,\gamma_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d(x\circ\gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(x\circ\gamma_2)}{dt}(0).$$

Définition 2.2 (espace tangent) *L'*espace tangent *à* M *en* $\mathcal{M}$ *est l'ensemble, noté* $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$, *des classes d'équivalence de* $\sim$ *:*

$$T_{\mathrm{M}}\mathcal{M} := \Gamma_{\mathrm{M}}/\sim.$$

Alors $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$ peut être muni d'une *unique structure d'espace vectoriel* telle que l'application

$$\begin{array}{rccc} dx_{\mathrm{M}} : & T_{\mathrm{M}}\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (I,\gamma) \bmod \sim & \longmapsto & \dfrac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0) \end{array}$$

est un isomorphisme. Si $y : \mathcal{O}' \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ est une autre carte locale et si $y = \varphi \circ x$ sur un voisinage de M dans $\mathcal{M}$, alors

$$dy_{\mathrm{M}} = d\varphi_{x(\mathrm{M})} \circ dx_{\mathrm{M}}.$$

Définition 2.3 (champs de vecteurs) *Soit* $\mathcal{M}$ *une variété différentielle, un* champ de vecteur tangent X *sur* $\mathcal{M}$ *est la donnée, en chaque point* M *de* $\mathcal{M}$, *d'un vecteur* $X(\mathrm{M}) \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$. *On note* $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ *l'espace vectoriel des champs de vecteurs tangents sur* $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ et si $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ est une carte locale, on définit l'application x_*X de U vers $\mathbb{R}^n$ comme suit : pour tout $t \in U$, $\exists!\mathrm{M} \in \mathcal{O}$ tel que $x(\mathrm{M}) = t$, alors $(x_*X)(t)$ est l'image par dx_{M} de $X(\mathrm{M}) \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$, i.e. :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{O}, \quad (x_*X)(x(\mathrm{M})) = dx_{\mathrm{M}}(X(\mathrm{M})),$$

ou encore

$$\forall t \in U, \quad (x_*X)(t) = dx_{x^{-1}(t)}(X(x^{-1}(t))).$$

Si la variété est de classe $\mathcal{C}^k$ et si $k \geq \ell + 1$, on dit que le champ de vecteur X est de classe $\mathcal{C}^\ell$ si $x_*X \in \mathcal{C}^\ell(U,\mathbb{R}^m)$.

Définition 2.4 (espace cotangent) *Soit* $\mathcal{M}$ *une variété différentielle et* $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$. *L'*espace cotangent à $\mathcal{M}$ au point M *est* $(T_{\mathrm{M}}\mathcal{M})^*$, *l'espace dual de* $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$. *On le note* $T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$.

Nous définissons de même l'espace des **formes p-multilinéaires alternées sur $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$**, nous le noterons $\Lambda^p T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$.

Définition 2.5 (p-formes différentielles) *Soit* $\mathcal{M}$ *une variété différentielle, une* p-forme différentielle α *sur* $\mathcal{M}$ *est la donnée, en chaque point* M *de* $\mathcal{M}$, *d'une* p*-forme* $\alpha_{\mathrm{M}} \in \Lambda^p T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$. *On note* $\Omega^p(\mathcal{M})$ *l'espace vectoriel des* p*-formes différentielles sur* $\mathcal{M}$.

Soit $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ une carte, nous définissons $(x^{-1})^*\alpha \in \Omega^p(U)$ par : $\forall t \in U$, $\forall \xi_1, \cdots, \xi_p \in \mathbb{R}^m$,

$$\left((x^{-1})^*\alpha\right)_t(\xi_1, \cdots, \xi_p) = \alpha_{x^{-1}(t)}\left((dx_{x^{-1}(t)})^{-1}(\xi_1), \cdots, (dx_{x^{-1}(t)})^{-1}(\xi_p)\right),$$

(où l'on peut écrire aussi $(dx_{x^{-1}(t)})^{-1} = d(x^{-1})_t$) ou, de façon équivalente,

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{O}, \forall v_1, \cdots, v_p \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}, \quad \left((x^{-1})^*\alpha\right)_{x(\mathrm{M})}(dx_{\mathrm{M}}(v_1), \cdots, dx_{\mathrm{M}}(v_1)) = \alpha_{\mathrm{M}}(v_1, \cdots, v_p).$$

Si la variété est de classe $\mathcal{C}^k$ et si $k \geq \ell + 1$, on dit que que α est de classe $\mathcal{C}^\ell$ si, pour toute carte locale $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$, $(x^{-1})^*\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\ell$. (Le cas $p = 0$ est exceptionnel : $k \geq \ell$ suffit).

2.2 Fibrés vectoriels

Les ensembles :

$$T\mathcal{M} := \{(\mathrm{M}, v) |\ \mathrm{M} \in \mathcal{M}, v \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{M}} T_{\mathrm{M}}\mathcal{M},$$

$$T^*\mathcal{M} := \{(\mathrm{M}, \alpha) |\ \mathrm{M} \in \mathcal{M}, \alpha \in T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{M}} T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$$

et, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda^pT^*\mathcal{M} := \{(\mathrm{M}, \alpha) |\ \mathrm{M} \in \mathcal{M}, \alpha \in \Lambda^pT^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{M}} \Lambda^pT^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$$

peuvent être munis d'une structure de variété différentielle, dont la construction se déduit naturellement de la structure de variété de $\mathcal{M}$. Nous appellerons $T\mathcal{M}$ **le fibré tangent de** $\mathcal{M}$, $T^*\mathcal{M}$ **le fibré cotangent de** $\mathcal{M}$ et enfin $\Lambda^pT^*\mathcal{M}$, **le fibré des p-formes sur** $\mathcal{M}$. Noter que dans le cas $p = 1$, on a $T^*\mathcal{M} = \Lambda^1T^*\mathcal{M}$.

En effet, supposons que $\mathcal{M}$ est une variété de classe $\mathcal{C}^k$ et soit $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ une carte locale. Nous considérons d'abord l'exemple du fibré tangent. Notons

$$T_{\mathcal{O}}\mathcal{M} := \{(\mathrm{M}, v) |\ \mathrm{M} \in \mathcal{O}, v \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{O}} T_{\mathrm{M}}\mathcal{M},$$

le sous-ensemble de $T\mathcal{M}$ qui est « au-dessus de » $\mathcal{O}$. Nous considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} Tx : & T_{\mathcal{O}}\mathcal{M} & \longrightarrow & U \times \mathbb{R}^m \\ & (\mathrm{M}, v) & \longmapsto & (x(\mathrm{M}), dx_{\mathrm{M}}(v)). \end{array}$$

Il est alors facile de vérifier que Tx est une bijection (donc devient un homéomorphisme à partir du moment où l'on choisit sur $T_{\mathcal{O}}\mathcal{M}$ une topologie qui rend cette application continue). Mais, en plus, en partant d'un atlas $(\mathcal{O}_i, x_i)_{i\in I}$ sur $\mathcal{M}$, on peut construire ainsi un *atlas* $(T_{\mathcal{O}_i}\mathcal{M}, Tx_i)_{i\in I}$ sur $T\mathcal{M}$, dont les applications de recollement sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Ainsi $T\mathcal{M}$ possède une structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Nous pouvons faire de même avec le fibré cotangent $T^*\mathcal{M}$: nous construisons à partir de la carte x sur $\mathcal{O}$ une carte sur :

$$T^*_{\mathcal{O}}\mathcal{M} := \{(\mathrm{M}, \alpha) |\ \mathrm{M} \in \mathcal{O}, \alpha \in T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{O}} T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$$

à savoir :

$$\begin{array}{rccc} T^*x : & T^*_{\mathcal{O}}\mathcal{M} & \longrightarrow & U \times (\mathbb{R}^m)^* \\ & (\mathrm{M}, \alpha) & \longmapsto & \left(x(\mathrm{M}), \alpha_{\mathrm{M}} \circ (dx_{\mathrm{M}})^{-1}\right). \end{array}$$

Et nous pouvons donc construire de façon naturelle un atlas sur $T^*\mathcal{M}$ à partir d'un atlas sur $\mathcal{M}$ et munir ainsi $T^*\mathcal{M}$ d'une structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

De même en construisant une carte locale sur

$$\Lambda^pT^*_{\mathcal{O}}\mathcal{M} := \{(\mathrm{M}, \alpha) |\ \mathrm{M} \in \mathcal{O}, \alpha \in \Lambda^pT^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{O}} \Lambda^pT^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M},$$

nous pouvons démontrer que $\Lambda^p T^*\mathcal{M}$ est également une variété de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Par ailleurs pour, par exemple, le fibré tangent, nous pouvons définir une **projection**

$$\begin{array}{rccc} \pi: & T\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & (\mathrm{M}, v) & \longmapsto & \mathrm{M} \end{array}$$

L'image inverse par π d'un point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ est l'espace tangent $T_\mathrm{M}\mathcal{M}$. De façon analogue, nous pouvons définir les projections $\pi : T^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ et $\pi : \Lambda^p T^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. A chaque fois, l'image inverse par π d'un point M est un espace vectoriel, que nous appellerons **fibre** de la projection. Ces constructions sont des exemples de fibrés vectoriels :

Définition 2.6 (fibré vectoriel) *Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle de dimension m et soit V un espace vectoriel de dimension $k \in \mathbb{N}$. Un* fibré vectoriel $\mathcal{F}$ au-dessus de $\mathcal{M}$ et de fibre type V *est une variété $\mathcal{F}$ munie d'une application différentiable surjective $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{M}$, appelée* ***fibration*** *telle que*

- *pour tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, la* fibre $\mathcal{F}_\mathrm{M} := \pi^{-1}(\mathrm{M})$ *est un espace vectoriel isomorphe à V ;*
- *il existe un atlas $(\mathcal{F}_{\mathcal{O}_i}, \Phi_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{F}$ où :*
  - *$(\mathcal{O}_i, x_i)_{i\in I}$ est un atlas de $\mathcal{M}$, où $\cup_{i\in I}\mathcal{O}_i = \mathcal{M}$ et $\forall i \in I$, $x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i \subset \mathbb{R}^m$ est une carte ;*
  - *$\mathcal{F}_{\mathcal{O}_i} := \{(\mathrm{M}, f) | \ \mathrm{M} \in \mathcal{O}_i, f \in \mathcal{F}_\mathrm{M}\} \simeq \cup_{\mathrm{M}\in\mathcal{O}_i}\mathcal{F}_\mathrm{M}$;*
  - *pour tout $i \in I$, $\Phi_i : \mathcal{F}_{\mathcal{O}_i} \longrightarrow U_i \times V$ est de la forme :*

$$(\mathrm{M}, f) \longmapsto (x_i(\mathrm{M}), A_i(\mathrm{M})(f)),$$

où, $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{O}_i$, $A_i(\mathrm{M}) : \mathcal{F}_\mathrm{M} \longrightarrow V$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque — il est courant d'appeler *rang du fibré vectoriel* la dimension k de sa fibre type.

On peut voir un fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}$ et de fibre type V comme une variété qui ressemblerait *localement* au produit $\mathcal{M} \times V$, mais qui ne serait pas globalement difféomorphe à ce produit. A ce propos, mentionnons que $\mathcal{M} \times V$ est un exemple de fibré, que l'on qualifie de *trivial*.

Définition 2.7 (section d'un fibré vectoriel) *Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}$ et de fibre type V et notons $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{M}$ la fibration associée. Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$ une partie de $\mathcal{M}$ (un ouvert, unes sous-variété...). Une* section σ de $\mathcal{F}$ au dessus de $\mathcal{P}$ *est une application $\sigma : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$ telle que l'application composée $\pi \circ \sigma$ coïncide avec l'application identité de $\mathcal{P}$ dans lui-même.*

On note $\Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ au dessus de $\mathcal{P}$.

Autrement dit, si $\mathrm{M} \in \mathcal{P}$, $\sigma(\mathrm{M}) = (\mathrm{M}, \psi(\mathrm{M}))$, où $\psi(\mathrm{M}) \in \mathcal{F}_\mathrm{M}$. Ainsi un champ de vecteur tangent sur $\mathcal{M}$ est une section du fibré tangent $T\mathcal{M}$, i.e. $\mathcal{X}(\mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ et une p-forme différentielle sur $\mathcal{M}$ est une section de $\Lambda^p T^*\mathcal{M}$, i.e. $\Omega^p(\mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^p T^*\mathcal{M})$.

2.3 A propos des notations

Nous pouvons généraliser les remarques faites au §1.2 au cas d'une variété : si $x = (x^1 \cdots, x^m) : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ est une carte locale, en chaque point $\mathrm{M} \in \mathcal{O}$, les différentielles des fonctions coordonnées $x^1, \cdots, x^m$, c'est à dire $dx^1_\mathrm{M}, \cdots, dx^m_\mathrm{M}$ constituent une base de $T^*_\mathrm{M}\mathcal{M}$. Nous utiliserons souvent cette base et la noterons $(dx^1, \cdots, dx^m)$ (c'est à dire en omettant d'écrire l'indice M).

De même, nous noterons

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$$

la base de $T_\mathrm{M}\mathcal{M}$ qui est duale de $(dx^1, \cdots, dx^m)$, c'est à dire telle $dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$, pour tous les entiers i et j tels que $1 \leq i, j \leq m$. (Rappelons que le *symbole de Kronecker* δ^i_j vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.) Cette notation, où les vecteurs sont notés comme des opérateurs différentiels, peut se justifier par le fait que l'espace tangent admet une autre définition, équivalente à la première :

Définition 2.8 (espace tangent 2) *Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$. Soit $\mathcal{C}^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{M}$ vers $\mathbb{R}$. L'espace tangent à $\mathcal{M}$ en M est l'ensemble des dérivations agissant sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ au point M, c'est à dire l'ensemble des applications linéaires $D : \mathcal{C}^1(\mathcal{M},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, continues pour la topologie $\mathcal{C}^1$, telles que $\forall f,\, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$,*

$$D(f\,g) = (Df)g(\mathrm{M}) + f(\mathrm{M})(Dg) \tag{3}$$

(règle de Leibniz).

3 Tout sur le calcul différentiel extérieur

Nous allons voir quatre opérations qui jouent un rôle très important dans le calcul différentiel extérieur : l'image inverse par une application différentiable, la différentielle extérieure, le produit intérieur par un champ de vecteur et l'intégration. Pour simplifier la présentation et les notations, nous supposerons désormais que les formes différentielles considérées sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$, sauf mention contraire.

3.1 L'image inverse d'une forme différentielle

Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés, de dimensions quelconques (et différentes en général) et $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application régulière. Nous allons étendre l'opération

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ f & \longmapsto & f\circ\varphi \end{array}$$

en une opération

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \Omega^p(\mathcal{M}) \\ \alpha & \longmapsto & \varphi^*\alpha, \end{array}$$

pour tout $0 \leq p \leq n$. Nous appellerons **image inverse de** α **par** φ ou **tiré en arrière de** α **par** φ (nom peu élégant), ou encore **pull-back de** α **par** φ la forme $\varphi^*\alpha$.

Définition 3.1 (image inverse d'une p-forme) *Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application régulière et soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$. L'image inverse de α par φ est la p-forme $\varphi^*\alpha$ définie par :*

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}, \forall v_1, \cdots, v_p \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}, \quad (\varphi^*\alpha)_{\mathrm{M}}(v_1,\cdots,v_p) = \alpha_{\varphi(\mathrm{M})}(d\varphi_{\mathrm{M}}(v_1),\cdots,d\varphi_{\mathrm{M}}(v_p)).$$

Observons premièrement que

$$\forall f \in \Omega^0(\mathcal{N}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}), \quad \varphi^* f = f\circ\varphi. \tag{4}$$

Deuxièmement, en vertu de la règle de dérivation d'une fonction composée ($\forall \mathrm{N} \in \mathcal{N}$, $\left(df_{\varphi(\mathrm{M})} \circ d\varphi_{\mathrm{M}}\right) = d(f\circ\varphi)_{\mathrm{M}}$),

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}), \quad \varphi^*(df) = d(f\circ\varphi) = d(\varphi^* f). \tag{5}$$

Troisièmement :

Proposition 3.1 *Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application régulière et soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ et $\beta \in \Omega^q(\mathcal{M})$ (pour $1 \leq p, q \leq m$). Alors*

$$\varphi^*(\alpha\wedge\beta) = (\varphi^*\alpha)\wedge(\varphi^*\beta). \tag{6}$$

En fait les propriétés (4), (5) et (6) *caractérisent complètement l'image inverse des formes différentielles*, i.e. la Définition 3.1 est équivalente à :

Définition 3.2 (image inverse d'une p-forme, variante) *Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application régulière. Alors l'opérateur d'image inverse par φ l'unique opérateur linéaire*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \Omega^p(\mathcal{M}) \\ f & \longmapsto & \varphi^* f, \end{array}$$

qui satisfait les relations (4), (5) et (6).

En d'autres termes φ^* est le *morphisme* de $(\Omega^*(\mathcal{N}), +, \wedge)$ vers $(\Omega^*(\mathcal{M}), +, \wedge)$ (au sens où (6) est vérifié) dont l'action sur les fonctions et sur les différentielles de fonctions sont données respectivement par (4) et (5).

Comment calculer l'image inverse d'une p-forme ?
La deuxième définition (3.2) donne en pratique des calculs plus courts : en utilisant d'abord (6) et (4), on a

$$\varphi^*\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} (\alpha_{j_1 \cdots j_p} \circ \varphi)(\varphi^* dy^{j_1}) \wedge \cdots \wedge (\varphi^* dy^{j_p}),$$

puis, en utilisant (5), qui entraîne notamment $\varphi^* dy^j = d(\varphi^* y^j) = d(y^j \circ \varphi) = d\varphi^j$, on obtient

$$\varphi^*\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} (\alpha_{j_1 \cdots j_p} \circ \varphi) d\varphi^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{j_p}.$$

Il ne reste plus alors qu'à développer $d\varphi^j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} dx^i$ et utiliser le fait que le produit extérieur est alterné pour obtenir la décomposition de $\varphi^*\alpha$ dans la base $(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p})$.

Image directe d'un champ de vecteur
Dans ce qui suit, *on doit impérativement utiliser un difféomorphisme.*

Définition 3.3 (image directe d'un champ de vecteur) *Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un **difféomorphisme**. Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur. Alors l'image directe de X par φ est le champ de vecteur $\varphi_* X \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ défini par*

$$\forall \mathrm{N} \in \mathcal{N}, \quad (\varphi_* X)(\mathrm{N}) := d\varphi_{\varphi^{-1}(\mathrm{N})}(X(\varphi^{-1}(\mathrm{N}))),$$

ou encore

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}, \quad (\varphi_* X)(\varphi(\mathrm{M})) := d\varphi_{\mathrm{M}}(X(\mathrm{M})).$$

3.2 La différentielle extérieure

Nous allons à présent étendre l'application

$$\begin{array}{rccc} d : & \Omega^0(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \Omega^1(\mathcal{M}) \\ & f & \longmapsto & df \end{array}$$

en une application $d : \Omega^*(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^*(\mathcal{M})$ appelée *différentielle extérieure*, qui applique $\Omega^p(\mathcal{M})$ sur $\Omega^{p+1}(\mathcal{M})$.

3.2.1 La différentielle extérieure sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \Omega^p(U)$, alors, si

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \sum_I \alpha_I dx^I,$$

sa différentielle extérieure est la $(p+1)$-forme $d\alpha \in \Omega^{p+1}(U)$ définie par

$$d\alpha := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} d\alpha_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I, \tag{7}$$

où $d\alpha_{i_1 \cdots i_p} = d\alpha_I$ est simplement la différentielle de la fonction α_I.

Proposition 3.2 (règle de Leibniz graduée) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit $\alpha \in \Omega^p(U)$ et $\beta \in \Omega^q(U)$, alors*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \tag{8}$$

Théorème 3.1 **($dd = 0$)** *Pour tout $\alpha \in \Omega^*(U)$, on a :*

$$d(d\alpha) = 0. \tag{9}$$

La preuve de ce résultat repose sur l'identité : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_2} \partial x^{i_1}}$.

3.2.2 Compatibilité entre la différentielle extérieure et l'image inverse

Théorème 3.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\varphi : U \longrightarrow V$ une application régulière. Alors, pour toute p-forme $\alpha \in \Omega^p(V)$, on a*

$$d(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d\alpha). \tag{10}$$

3.2.3 La différentielle extérieure sur une variété

Nous donnons deux définitions équivalentes de la différentielle extérieure sur une variété.

Définition 3.4 (différentielle extérieure) *Soit $\mathcal{M}$ une variété, la* différentielle extérieure *est l'opérateur $d : \Omega^*(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^*(\mathcal{M})$ tel que, pour toute p-forme $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ et pour toute carte locale $x : \mathcal{O} \longrightarrow U$, si on a $\alpha = \sum_I \alpha_I dx^I$ sur $\mathcal{O}$, alors*

$$d\alpha = \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I \quad \text{sur } \mathcal{O}. \tag{11}$$

Définition 3.5 (différentielle extérieure) *Soit $\mathcal{M}$ une variété, il existe un unique opérateur linéaire $d : \Omega^*(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^*(\mathcal{M})$, appelé* différentielle extérieure, *qui envoie $\Omega^p(\mathcal{M})$ sur $\Omega^{p+1}(\mathcal{M})$ et qui satisfait les conditions suivantes :*

(i) *pour toute fonction $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$, df est la différentielle de f ;*

(ii) *pour toute fonction $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$, $d(df) = 0$;*

(iii) $\forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$, $\forall \beta \in \Omega^q(\mathcal{M})$, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.

Toutes les propriétés satisfaites par la différentielle extérieure sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ s'étendent à une variété.

Théorème 3.3 *Sur une variété $\mathcal{M}$, la différentielle extérieure satisfait les propriétés suivantes :*

$$\forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M}), \quad d(d\alpha) = 0,$$

$$\forall \varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}, \forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{N}), \quad d(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d\alpha).$$

Pour terminer, un peu de terminologie :

Définition 3.6 *Une forme $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{M})$ est dite* ***fermée*** *si $d\alpha = 0$. Une forme $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{M})$ est dite* ***exacte*** *si il existe une forme $\beta \in \Omega^*(\mathcal{M})$ telle que $\alpha = d\beta$.*

Le théorème 3.1 (et sa généralisation sur les variétés formulée au théorème 3.3) peut donc se reformuler ainsi : **toute forme extérieure exacte est fermée**. La réciproque est vraie sur certaines variétés (il s'agit du lemme de Poincaré, voir Section 3.5), mais est fausse en général.

3.3 Le produit intérieur par un champ de vecteur

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle, $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur et $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ une p-forme. En tout point $\text{M} \in \mathcal{M}$, nous considérons l'application

$$(\iota_X\alpha)_{\text{M}} \text{ ou } (X \lrcorner \alpha)_{\text{M}} : \begin{array}{ccc} (T_{\text{M}}\mathcal{M})^{p-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, \cdots, v_{p-1}) & \longmapsto & \alpha_{\text{M}}(X(\text{M}), v_1, \cdots, v_{p-1}) \end{array} \tag{12}$$

qui est clairement $(p-1)$-multilinéaire et alternée.

Définition 3.7 (produit intérieur) *Pour toute p-forme $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ et pour tout champ de vecteur $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, on appelle* produit intérieur de α par X *et on note $X \lrcorner \alpha$ (ou parfois $\iota_X\alpha$) la $(p-1)$-forme sur $\mathcal{M}$ définie en chaque point $\text{M} \in \mathcal{M}$ par (12).*

On peut démontrer que le produit intérieur satisfait une propriété analogue à la règle de Leibniz graduée :

Proposition 3.3 *Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur. Alors, $\forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$, $\forall \beta \in \Omega^q(\mathcal{M})$,*

$$X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (X \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (X \lrcorner \beta). \tag{13}$$

3.3.1 Le flot d'un champ de vecteur et la dérivée de Lie

A champ de vecteur $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ nous pouvons associer le problème dynamique :

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)), \tag{14}$$

où γ est une application régulière d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}$. L'ensemble des solutions de (14) est décrit par le couple $(\Delta_X, e^{\cdot X})$, où $\{0\} \times \mathcal{M} \subset \Delta_X \subset \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ et

$$e^{\cdot X} : \begin{array}{ccc} \Delta_X & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ (t, \text{M}) & \longmapsto & e^{tX}(\text{M}), \end{array}$$

est caractérisée par : la « condition initiale » $e^{tX}(\text{M})|_{t=0} = \text{M}$ et l'équation d'évolution

$$\frac{\partial e^{tX}(\text{M})}{\partial t} = X\left(e^{tX}(\text{M})\right).$$

L'**ensemble de vie** Δ_X est défini comme étant le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ sur lequel on puisse définir $e^{\cdot X}$. Il contient toujours un voisinage de $\{0\} \times \mathcal{M}$ (une façon de formuler le théorème d'existence locale de solutions à (14)). Dans le cas où $\Delta_X = \mathbb{R} \times \mathcal{M}$, on dit que le champ de vecteur X est **complet**.

Définition 3.8 (dérivation de Lie) *Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur sur une variété. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ ou $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Nous définissons leur* dérivée de Lie *par rapport à X par*

$$L_X f := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f \circ e^{tX} - f\right], \tag{15}$$

$$L_X \alpha := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[\left(e^{tX}\right)^* \alpha - \alpha\right], \tag{16}$$

$$L_X Y := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[\left(e^{-tX}\right)_* Y - Y\right]. \tag{17}$$

Il existe des formules très utiles pour calculer chacune de ces dérivées. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$:

$$\text{L}_X f = df(X) = X \lrcorner df = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad \text{(le signe } \sum_{i=1}^m \text{ est sous-entendu).}$$

Pour la dérivée de Lie d'un champ de vecteur par un autre :

Théorème 3.4 *Soit $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ deux champs de vecteur, alors il existe un troisième champ de vecteur, noté $[X, Y]$ et appelé* crochet de Lie [1] *tel que le commutateur de L_X et L_Y soit la dérivée de Lie par rapport à $[X, Y]$. C'est à dire : $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,*

$$L_X\left(L_Y f\right) - L_Y\left(L_X f\right) = L_{[X,Y]} f. \tag{19}$$

De plus on a

$$[X, Y] = L_X Y. \tag{20}$$

Rappelons aussi que, dans des coordonnées locales $(x^1, \cdots, x^m)$, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (le signe $\sum_{i=1}^m$ est ici sous-entendu), alors

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Enfin pour la dérivée de Lie d'une forme différentielle par un champ de vecteur on a :

Théorème 3.6 (formule de Cartan) *Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur et $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ une p-forme. Alors*

$$L_X \alpha = X \lrcorner\, d\alpha + d(X \lrcorner\, \alpha), \tag{21}$$

autrement dit, sur $\Omega^*(\mathcal{M})$, on a l'identité $L_X = (X \lrcorner\ ) \circ d + d \circ (X \lrcorner\ )$.

Signalons enfin une autre formule (belle et utile) due à Cartan :

Théorème 3.7 (formule de Cartan) *Soit $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ deux champs de vecteur et $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$ une 1-forme. Alors on a :*

$$d\alpha(X, Y) = L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \tag{22}$$

3.4 Intégrale d'une forme différentielle

3.4.1 Compléments préliminaires sur les variétés : l'orientation et le bord

Définition 3.9 *Une variété $\mathcal{M}$ est* ***orientée*** *si on peut choisir un système de cartes dans lequel toutes les fonctions de recollement φ_{ij} ont un jacobien positif.*

Noter que cette définition est équivalente à définir une orientation de chaque espace tangent $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$ qui dépend continûment de M : celle telle que, pour chaque carte locale $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ et pour tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, $dx_{\mathrm{M}} : T_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme qui préserve l'orientation.

Pour la suite, nous notons :

$$\mathbb{R}^m_- := \{t = (t^1, \cdots, t^m) \in \mathbb{R}^m |\ t^1 \leq 0\} =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}.$$

1. A ce propos un résultat fondamental sur le crochet de Lie sur les champs de vecteur est :

Théorème 3.5 *Soient $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ deux champs de vecteur sur une variété $\mathcal{M}$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $[X, Y] = 0$;

(ii) pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ et $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $e^{tX}\left(e^{sY}(\mathrm{M})\right)$ et $e^{sY}\left(e^{tX}(\mathrm{M})\right)$ existent, on a :

$$e^{tX}\left(e^{sY}(\mathrm{M})\right) = e^{sY}\left(e^{tX}(\mathrm{M})\right). \tag{18}$$

Autrement dit, en particulier, si $[X, Y] = 0$, alors les flots de X et de Y commutent et on peut noter

$$e^{tX+sY}(\mathrm{M}) := e^{tX}\left(e^{sY}(\mathrm{M})\right) = e^{sY}\left(e^{tX}(\mathrm{M})\right)$$

sans ambiguité.

Définition 3.10 (Variété différentielle avec bord) *Une variété différentielle à bord $\mathcal{M}$ de dimension m est un espace topologique équipé d'un* **atlas**, *c'est à dire un système de* **cartes locales** $x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i \subset \mathbb{R}^m_-$, *où $i \in I$ et*
- *chaque $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathcal{M}$ et la réunion $\cup_{i\in I}\mathcal{O}_i$ est égale à $\mathcal{M}$;*
- *chaque U_i est un ouvert de $\mathbb{R}^m_-$, c'est à dire l'intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ avec $\mathbb{R}^m_-$;*
- *chaque application x_i est un homéomorphisme ;*
- *si $\mathcal{O}_{ij} := \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ est non vide, alors l'homéomorphisme $\varphi_{ij} := x_j \circ (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})}$ est un difféomorphisme de $x_i(\mathcal{O}_{ij})$ vers $x_j(\mathcal{O}_{ij})$.*

On dit que la variété est de classe $\mathcal{C}^k$ si les applications de recollement $\varphi_{ij} : (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})} \longrightarrow x_i(\mathcal{O}_{ij})$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^k$.

Soit $\partial\mathbb{R}^m_- := \{(0, t^2, \cdots, t^m)|\ (t^2, \cdots, t^m) \in \mathbb{R}^{m-1}\} \simeq \mathbb{R}^{m-1}$. On définit le **bord de la variété** $\mathcal{M}$, noté $\partial\mathcal{M}$, comme étant l'ensemble des points M tels que, pour toute carte $x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i \subset \mathbb{R}^m_-$, on ait $x_i(\mathrm{M}) \in \partial\mathbb{R}^m_-$. On montre alors que $\partial\mathcal{M}$ est également une variété différentielle, de dimension $m-1$.

Si $\mathcal{M}$ est orientée, alors $\partial\mathcal{M}$ est aussi orientée comme suit : d'abord nous orientons $\partial\mathbb{R}^m_- \simeq \mathbb{R}^{m-1}$ en décidant que, si $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$ est la base canonique directe de $\mathbb{R}^m$, alors $(\epsilon_2, \cdots, \epsilon_m)$ est une base directe de $T_t\partial\mathbb{R}^m_- \simeq \mathbb{R}^{m-1}$. Puis, $\forall \mathrm{M} \in \partial\mathcal{M}$, $T_{\mathrm{M}}\partial\mathcal{M}$ est muni de l'orientation induite par celle de $\partial\mathbb{R}^m_-$ par une carte $x|_{\partial\mathcal{M}} : \partial\mathcal{M} \cap \mathcal{O} \longrightarrow \partial\mathbb{R}^m_-$. En d'autres termes, $\left(\frac{\partial}{\partial x^2} \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$ est une base directe de $T_{\mathrm{M}}\partial\mathcal{M}$.

3.4.2 Intégrale d'une forme différentielle

Nous définissons l'intégrale d'une m-forme α sur une *variété* orientée $\mathcal{M}$ de dimension m (avec ou sans bord) comme suit. Soit $(\mathcal{O}_i, x_i)_{i\in I}$ un atlas sur $\mathcal{M}$ (à valeursdans $\mathbb{R}^m_-$). Soit $(\chi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité sur $\mathcal{M}$ associée au recouvrement $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ et, enfin, pour tout $i \in I$, notons $\psi_i : x_i(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i$ l'inverse de x_i. Nous posons alors :

$$\int_{\mathcal{M}} \alpha := \sum_{i\in I} \int_{\mathbb{R}^m_-} \psi_i^*(\chi_i\alpha),$$

où chaque forme $\psi_i^*(\chi_i\alpha)$ est étendue sur $\mathbb{R}^m_-$ par la valeur 0 en dehors de $x_i(\mathcal{O}_i)$ et l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^m_-} \psi_i^*(\chi_i\alpha)$ est, par définition,

$$\int_{\mathbb{R}^m_-} \psi_i^*(\chi_i\alpha) := \int_{\mathbb{R}^m_-} f_i(t) dt^1 \cdots dt^m, \tag{23}$$

où $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m_-)$ est la densité telle que $\psi_i^*(\chi_i\alpha) = f_i dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^m$ et l'intégrale de droite dans (23) est une intégrale au sens de la théorie de la mesure (Riemann ou Lebesgue).

Le point capital est de vérifier que la définition (23) ne dépend pas du système de cartes, ni de la partition de l'unité utilisée. Cela repose sur le fait que la formule qui permet d'exprimer l'image inverse d'une p-forme par une application est *presque* (modulo des questions de signe) la même formule que celle du changement de variable dans une intégrale multiple. Cela conduit d'ailleurs au résultat suivant :

Théorème 3.8 *Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés différentielles* orientées *et de même dimension m (avec ou sans bord) et soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$. Soit $\alpha \in \Omega^m(\mathcal{M})$. Alors*

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi^*\alpha = \int_{\mathcal{N}} \alpha. \tag{24}$$

Grâce à (24) il est facile d'étendre la définition de l'intégrale d'une p-forme au cas d'une **sous-variété orientée** $\mathcal{S}$ de dimension p, plongée dans une variété $\mathcal{N}$ de dimension quelconque. Soit $j : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{N}$ l'application « inclusion », alors

$$\int_{\mathcal{S}} \alpha := \int_{\mathcal{S}} j^*\alpha. \tag{25}$$

Théorème 3.9 (formule de Stokes) *Soit $\mathcal{M}$ une variété à bord de dimension m et $\alpha \in \Omega^{m-1}(\mathcal{M})$. Alors*

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \alpha = \int_{\mathcal{M}} d\alpha. \tag{26}$$

Grâce à (24) ce résultat s'étend instantanément à une sous-variété $\mathcal{S}$ de dimension p d'une variété $\mathcal{N}$: soit $j : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{N}$ l'application inclusion et soit $\alpha \in \Omega^{p-1}(\mathcal{N})$. Alors

$$\int_{\mathcal{S}} d\alpha \overset{(25)}{:=} \int_{\mathcal{S}} j^*(d\alpha) \overset{(10)}{=} \int_{\mathcal{S}} d(j^*\alpha) \overset{(26)}{=} \int_{\partial\mathcal{S}} (j^*\alpha) \overset{(25)}{=:} \int_{\partial\mathcal{S}} \alpha.$$

3.5 L'homotopie et le lemme de Poincaré

Nous présentons ici une réciproque partielle au théorème 3.1, à savoir que, **sur certaines variétés**, une forme fermée est exacte. Noter qu'en général, une forme fermée n'est pas exacte. C'est le cas par exemple de la 1-forme :

$$\alpha := \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \mathrm{Im}\left(\frac{dz}{z}\right), \quad \text{où } z = x + iy$$

sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}^*$. En revanche, le résultat serait vrai pour une 1-forme fermée sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ ou, plus généralement, sur $\mathbb{R}^m$, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 3.1 *Soit $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^m)$ une 1-forme fermée, c'est à dire solution de $d\alpha = 0$. On note $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i dx^i$. Montrer que si on pose :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad f(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^m \alpha_i(tx)x^i dt, \tag{27}$$

alors, on a $\alpha = df$ sur $\mathbb{R}^m$.

Définition 3.11 (homotopie différentielle) *Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ deux variétés et soit $\varphi_0 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ et $\varphi_1 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ deux applications régulières. On dit que φ_0 **est régulièrement homotope à** φ_1 s'il existe une application régulière :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & [0,1] \times \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & (t,x) & \longmapsto & \Phi(t,x), \end{array}$$

*appelée **homotopie entre** φ_0 **et** φ_1, telle que :*

(i) $\forall x \in \mathcal{M}$, $\Phi(0,x) = \varphi_0(x)$;

(ii) $\forall x \in \mathcal{M}$, $\Phi(1,x) = \varphi_1(x)$.

Noter que la relation « est régulièrement homotope à » est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence s'appellent les *classes d'homotopie.*

Définition 3.12 (variété homotopiquement équivalente à un point) *Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle. On dit que $\mathcal{M}$ est régulièrement homotopiquement équivalente à un point s'il existe un point $\mathrm{M}_0 \in \mathcal{M}$ tel que les applications $Id : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ (application identité) et $0 : \mathcal{M} \longrightarrow \{\mathrm{M}_0\}$ (application constante) soient régulièrement homotopes.*

Nous remarquons que, si la variété $\mathcal{M}$ est connexe (ce qui est le cas ici), le point M_0 peut être échangé avec n'importe quel autre point car, alors, deux applications constantes à valeurs dans $\mathcal{M}$ sont forcément homotopes. Le lemme de Poincaré peut s'énoncer ainsi :

Théorème 3.10 (lemme de Poincaré) *Soit $\mathcal{M}$ une variété homotopiquement équivalente à un point. Alors, toute forme différentielle sur $\mathcal{M}$ qui est fermée est exacte. C'est à dire : pour toute forme $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$, si $d\alpha = 0$, alors il existe une forme $\beta \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M})$ telle que $\alpha = d\beta$.*