Calcul différentiel extérieur et géométrie

Frédéric HÉLEIN *

10 novembre 2016

1 Les bases du calcul différentiel extérieur

Ce chapitre est essentiellement consacré à des rappels de notions fondamentales pour la suite.

1.1 L'algèbre extérieure

1.1.1 Définition

Dans la suite V désigne un espace vectoriel et on note V^* son dual, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur V.

Définition 1.1 (forme p-multilinéaire alternée) *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie m. Une **forme p-multilinéaire alternée** α **sur** V ou, de façon abrégée, une p-**forme** α **sur** V est une application $\alpha : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $V \times \cdots \times V = V^p$) qui est*

- *multilinéaire, i.e. $\forall i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq p$, pour tous $v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_p, w_i \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

$$\alpha(v_1, \cdots, \lambda v_i + \mu w_i, \cdots, v_p) = \lambda\alpha(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_p) + \mu\alpha(v_1, \cdots, w_i, \cdots, v_p);$$

- *alternée, i.e. $\forall i, j \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i, j \leq p$,*

$$\alpha(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) + \alpha(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) = 0.$$

L'ensemble des p-formes sur V forme un espace vectoriel, que l'on note $\Lambda^p V^*$. Nous conviendrons que $\Lambda^p V^* = \mathbb{R}$, autrement dit une 0-forme sur V est un nombre réel.

Nous remarquons que $\Lambda^1 V^*$ s'identifie à V^* et que $\Lambda^p V^* = \{0\}$ si $p > m$.

*Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR CNRS 7586 Université Denis Diderot — Paris 7, UFR de Mathématiques, Case 7012, Bâtiment Chevaleret 75205 Paris Cedex 13, France, helein@math.jussieu.fr

Définition 1.2 (produit extérieur) *Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on définit le produit extérieur*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^p V^* \times \Lambda^q V^* & \longrightarrow & \Lambda^{p+q} V^* \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha \wedge \beta \end{array}$$

par

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \cdots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \cdots, v_{\sigma(p+q)}). \quad (1)$$

Cette opération est clairement bilinéaire. De plus, elle satisfait les propriétés suivantes.

Proposition 1.1 *Le produit extérieur est* ***associatif*** *:*

$$\forall \alpha \in \Lambda^p V^*, \forall \beta \in \Lambda^q V^*, \forall \gamma \in \Lambda^r V^*, \quad (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma). \quad (2)$$

On peut donc noter $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ ce produit extérieur.
Démonstration — Soit $\alpha \in \Lambda^p V^*$, $\beta \in \Lambda^q V^*$ et $\gamma \in \Lambda^r V^*$, soit $v_1, \cdots, v_{p+q+r} \in V$. Il vient de la définition du produit extérieur

$$\begin{aligned} & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(v_1, \cdots, v_{p+q+r}) \\ & = \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q+r)} (-1)^{|\sigma|} \alpha \wedge \beta(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p+q)}) \gamma(v_{\sigma(p+q+1)}, \cdots, v_{\sigma(p+q+r)}) \\ & = \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q+r)} (-1)^{|\sigma|} \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(p+q)} (-1)^{|\tau|} \\ & \qquad \alpha(v_{\sigma\circ\tau(1)}, \cdots, v_{\sigma\circ\tau(p)}) \beta(v_{\sigma\circ\tau(p+1)}, \cdots, v_{\sigma\circ\tau(p+q)}) \gamma(v_{\sigma(p+q+1)}, \cdots, v_{\sigma(p+q+r)}). \end{aligned}$$

L'application[1] $\mathfrak{S}(p+q+r) \times \mathfrak{S}(p+q) \ni (\sigma, \tau) \longmapsto \sigma \circ \tau \in \mathfrak{S}(p+q+r)$ est surjective et l'image inverse de chaque permutation dans $\mathfrak{S}(p+q+r)$ par cette application est de cardinal $(p+q)!$. On peut donc réécrire que $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(v_1, \cdots, v_{p+q+r})$ est égal à :

$$\frac{1}{p!q!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q+r)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \cdots, v_{\sigma(p+q)}) \gamma(v_{\sigma(p+q+1)}, \cdots, v_{\sigma(p+q+r)}).$$

Un calcul similaire en partant de $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)(v_1, \cdots, v_{p+q+r})$ nous mènerait au même résultat. On en déduit (2). □

Comme nous le verrons au fur et à mesure, l'associativité du produit extérieur est une propriété merveilleuse, qui a le pouvoir de transformer des calculs compliqués en des identités toutes simples ! Le produit extérieur n'est *pas* commutatif mais...

Proposition 1.2 *Le produit extérieur est* ***commutatif gradué****, c'est à dire :*

$$\forall \alpha \in \Lambda^p V^*, \forall \beta \in \Lambda^q V^*, \quad \beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta. \quad (3)$$

1. où l'on convient que l'on a étendu τ en une permutation de $\{1, \cdots, p+q+r\}$ en posant $\tau(j) = j$ si $p+q+1 \leq j \leq p+q+r$

Démonstration — Une conséquence de la définition d'une forme multilinéaire alternée est que, pour toute forme $\gamma \in \Lambda^{p+q}V^*$, on a : $\forall v_1, \cdots, v_{p+q} \in V$,

$$\gamma(v_1, \cdots, v_{p+q}) = (-1)^{pq}\gamma(v_{q+1}, \cdots, v_{q+p}, v_1, \cdots, v_q).$$

En remplaçant γ par $\alpha \wedge \beta$, où $\alpha \in \Lambda^p V^*$ et $\beta \in \Lambda^q V^*$, et en utilisant (1) de chaque côté de l'identité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \cdots, v_{\sigma(p+q)}) \\ &= (-1)^{pq} \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(q+1)}, \cdots, v_{\sigma(q+p)}) \beta(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(q)}) \end{aligned}$$

qui nous donne (3). □

Exemples

(i) Si $\alpha \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ et si $\beta \in \Lambda^q V^*$, $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$, expression dans laquelle le scalaire α multiple la q-forme β.

(ii) Si $\alpha, \beta \in \Lambda^1 V^* = V^*$, alors

$$\forall v, w \in V, \quad \alpha \wedge \beta(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) = \begin{vmatrix} \alpha(v) & \alpha(w) \\ \beta(v) & \beta(w) \end{vmatrix}.$$

Supposons pour simplifier encore que $\dim V = 2$ et soit (θ^1, θ^2) une base de V^* Notons $v^1 = \theta^1(v)$, $v^2 = \theta^2(v)$, $w^1 = \theta^1(w)$ et $w^2 = \theta^2(w)$. Décomposons également $\alpha = a_1\theta^1 + a_2\theta^2$ et $\beta = b_1\theta^1 + b_2\theta^2$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(v, w) &= (a_1v^1 + a_2v^2)(b_1w^1 + b_2w^2) - (a_1w^1 + a_2w^2)(b_1v^1 + b_2v^2) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)(v^1w^2 - v^2w^1). \end{aligned}$$

En particulier $\theta^1 \wedge \theta^2(v, w) = v^1w^2 - v^2w^1$. Nous voyons ainsi que

$$\alpha \wedge \beta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \theta^1 \wedge \theta^2 \quad \text{et} \quad \alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha.$$

(iii) Plus généralement, si $\alpha^1, \cdots, \alpha^p \in V^*$ et si $v_1, \cdots, v_p \in V$,

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p(v_1, \cdots, v_p) = \begin{vmatrix} \alpha^1(v_1) & \cdots & \alpha^1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^p(v_1) & \cdots & \alpha^p(v_p) \end{vmatrix}.$$

(iv) Si $\alpha \in V^*$ et $\beta \in \Lambda^2 V^*$, $\forall u, v, w \in V$,

$$\alpha \wedge \beta(u, v, w) = \alpha(u)\beta(v, w) + \alpha(v)\beta(w, u) + \alpha(w)\beta(u, v).$$

Le produit extérieur n'est pas une loi de composition interne. Pour y remédier il suffit de rassembler tous les $\Lambda^p V^*$.

Définition 1.3 (algèbre extérieure) *On note*

$$\Lambda^\bullet V^* := \oplus_{p=0}^m \Lambda^p V^*.$$

Alors le produit extérieur s'étend par linéarité en une loi de composition interne dans $\Lambda^\bullet V^*$. *On obtient l'**algèbre extérieure*** $(\Lambda^\bullet V^*, +, \wedge)$.

Cette algèbre est *associative* et *commutative graduée*.

Construire une base de $\Lambda^p V^*$ n'est pas très compliqué : soit $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$ une base de V et soit $(\theta^1, \cdots, \theta^m)$ la base de V^* qui est duale de $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$, alors :

Proposition 1.3 *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$*, la famille*

$$\left(\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}\right)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m}$$

est une base de $\Lambda^p V^*$. *Par conséquent dim*$\Lambda^p V^* = \frac{m!}{(m-p)!p!}$.

Démonstration — Nous confions au lecteur le soin de vérifier que, pour toute forme $\alpha \in \Lambda^p V^*$, alors

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \cdots i_p} \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_p \leq m} \alpha_{i_1 \cdots i_p} \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p},$$

où $\alpha_{i_1 \cdots i_p} = \alpha(\epsilon_{i_1}, \cdots, \epsilon_{i_p})$. Pour cela il suffit de calculer $\alpha(v_1, \cdots, v_p)$ pour une collection quelconque de p vecteurs $v_1, \cdots, v_p \in V$ en ayant décomposé chacun de ces vecteurs dans la base $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$. □

On en déduit aussi que

$$\dim \Lambda^\bullet V^* = \sum_{p=0}^m \dim \Lambda^p V^* = \sum_{p=0}^m \frac{m!}{(m-p)!p!} = 2^m.$$

Remarque (multi-indices) — Il est commode d'introduire des notations plus compactes en notant $I = (i_1, \cdots, i_p)$ un multi-indice (pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$) et en écrivant $\alpha_I := \alpha_{i_1 \cdots i_p}$ et $\theta^I := d\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\theta^{i_p}$, ce qui donne

$$\alpha = \sum_I \alpha_I \theta^I. \tag{4}$$

1.1.2 Le produit intérieur

Définition 1.4 *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour toute p-forme $\alpha \in \Lambda^p V^*$ et pour tout vecteur $\xi \in V$, on définit le* **produit intérieur** *de α par ξ comme étant la $(p-1)$-forme notée $\iota_\xi \alpha$ ou $\xi \lrcorner \alpha \in \Lambda^{p-1}V^*$ définie par*

$$\forall v_2, \cdots, v_p \in V, \quad \iota_\xi \alpha(v_2, \cdots, v_p) = \alpha(\xi, v_2, \cdots, v_p).$$

Si $p = 0$ et si $\alpha \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$, on convient de poser $\iota_\xi \alpha = 0$.

Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} V \times \Lambda^p V^* & \longrightarrow & \Lambda^{p-1}V^* \\ (\xi, \alpha) & \longmapsto & \iota_\xi \alpha \end{array}$$

est bilinéaire. On peut d'ailleurs l'étendre de façon unique en une application bilinaire de $V \times \Lambda^* V^*$ vers $\Lambda^* V^*$. Le produit intérieur satisfait en outre les propriétés suivantes.

Proposition 1.4 $\forall \xi, \eta \in V$, $\forall \alpha \in \Lambda^p V^*$,

$$\iota_\xi \iota_\eta \alpha + \iota_\eta \iota_\xi \alpha = 0 \tag{5}$$

donc en particulier $\iota_\xi \iota_\xi \alpha = 0$.

Démonstration — immédiate. □

Lemme 1.1 *Le produit intérieur satisfait la règle de Leibniz graduée : $\forall \xi \in V$, $\forall \alpha \in \Lambda^p V^*$, $\forall \beta \in \Lambda^q V^*$*

$$\iota_\xi(\alpha \wedge \beta) = (\iota_\xi \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (\iota_\xi \beta). \tag{6}$$

L'appellation « **règle de Leibniz graduée** » vient de l'analogie de (6) avec la règle de Leibniz pour la dérivation du produit de deux fonctions. Il s'avère qu'il est extrêmement utile de toujours garder cette analogie en tête et nous verrons au prochain paragraphe que, pour Elie Cartan, le produit intérieur n'était pas autre chose qu'une dérivation (graduée).

Démonstration — Nous commençons par montrer cette identité dans le cas où $p = 1$. Soit $v_1, \cdots, v_{q+1} \in V$, nous remarquons que l'identité

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \cdots, v_{q+1}) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q+1)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}) \beta(v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(q+1)})$$

peut, en rangeant $\sigma(2), \cdots, \sigma(q+1)$ dans l'ordre croissant, se simplifier sous la forme

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \cdots, v_{q+1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q+1); \sigma(2) < \cdots < \sigma(q+1)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}) \beta(v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(q+1)}) \tag{7}$$

Il y a $q+1$ permutations de $\{1, \cdots, q+1\}$ de ce type [2], qui sont, chacune, déterminées par $\sigma(1) = i$. On peut ainsi expliciter la dernière expression sous la forme

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \cdots, v_{q+1}) = \alpha(v_1)\beta(v_2, \cdots, v_{q+1}) + \sum_{i=2}^{q+1} (-1)^{i-1} \alpha(v_i) \beta(v_1, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_{q+1})$$

2. appelées *battages* ou, en anglais, *shuffles* ; en effet lorsqu'on joue aux cartes, une façon de battre les cartes consiste à couper le paquet en deux et à intercaler l'un des deux paquets ainsi obtenus dans l'autre, ici on coupe en prenant la carte sur le dessus du paquet

La dernière somme dans le terme de droite peut s'écrire d'une façon analogue à (7) (en y notant $\mathfrak{S}(q)$ les permutations de $\{2,\cdots,q+1\}$) comme étant égale à :

$$\sum_{\tau\in\mathfrak{S}(q);\tau(3)<\cdots<\tau(q+1)} (-1)^{|\tau|-1}\alpha(v_{\tau(2)})(v_1 \lrcorner \beta)(v_{\tau(3)},\cdots,v_{\tau(q+1)})$$

et, en vertu de (7), est donc égale à : $-\alpha\wedge(v_1 \lrcorner \beta)(v_2,\cdots,v_{q+1})$. Ainsi nous en concluons que $\alpha\wedge\beta(v_1,\cdots,v_{q+1}) = (v_1 \lrcorner \alpha)\beta(v_2,\cdots,v_{q+1}) - \alpha\wedge(v_1 \lrcorner \beta)(v_2,\cdots,v_{q+1})$. Mais comme par ailleurs $\alpha\wedge\beta(v_1,\cdots,v_{q+1}) = v_1 \lrcorner (\alpha\wedge\beta)(v_2,\cdots,v_{q+1})$, cela nous donne (6) pour $p=1$.

Ce résultat se généralise au cas où $\alpha = \alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^p$, où $\alpha^1\cdots\alpha^p \in V^*$ par récurrence sur p. Pour $p=1$, nous venons de le montrer. Supposons ce résultat valable pour un entier quelconque $p\in\mathbb{N}^*$. Soit alors $\alpha^1\cdots\alpha^{p+1}\in V^*$ et $\xi\in V$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\xi \lrcorner (\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1}\wedge\beta)\\
&= (\xi \lrcorner \alpha^1)\wedge(\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1}\wedge\beta) - \ \alpha^1\wedge[\xi \lrcorner (\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1}\wedge\beta)]\\
&= (\xi \lrcorner \alpha^1)\wedge(\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1}\wedge\beta)\\
&- \ \alpha^1\wedge[(\xi \lrcorner (\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1}))\wedge\beta + \ (-1)^p(\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1})\wedge(\xi \lrcorner \beta)]\\
&= [(\xi \lrcorner \alpha^1)\wedge\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1} - \ \alpha^1\wedge(\xi \lrcorner (\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1}))]\wedge\beta\\
&+ \ (-1)^{p+1}(\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1})\wedge(\xi \lrcorner \beta)\\
&= [\xi \lrcorner (\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1})]\wedge\beta + (-1)^{p+1}(\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1})\wedge(\xi \lrcorner \beta)
\end{aligned}$$

et nous obtenons ainsi (6) pour $\alpha = \alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^{p+1}$. Par linéarité nous en concluons que (6) est valable en général. □

Le lecteur est invité à titre d'exercice à calculer dans $V=\mathbb{R}^2$ muni de la base (ϵ_1,ϵ_2) et sa base duale (θ^1,θ^2) le produit intérieur de $\theta^1\wedge\theta^2$ par $\xi = \xi^1\epsilon_1 + \xi^2\epsilon_2$. Puis vous pourrez calculer dans $\mathbb{R}^3$ avec la base $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ les produits intérieurs de $\alpha = a^1\theta^2\wedge\theta^3 + a^2\theta^3\wedge\theta^1 + a^3\theta^1\wedge\theta^2$ et de $\beta = \theta^1\wedge\theta^2\wedge\theta^3$ avec un vecteur $\xi = \xi^1\epsilon_1+\xi^2\epsilon_2+\xi^3\epsilon_3$.

1.1.3 Le produit intérieur est une dérivation (Elie Cartan)

Elie Cartan présentait les formes différentielles comme des fonctions en des variables qui anticommutent (suivant en cela une idée due à Grassmann). Le produit intérieur y apparaissait sous la forme de dérivées de ces fonctions par rapport à ces variables anticommutantes.

A titre de préliminaire, considérons m variables ordinaires $x^1,\cdots,x^m$, que nous pouvons voir comme des coordonnées sur un espace vectoriel W de dimension m. Considérons $\mathcal{C}^\infty(W)$, l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur W. Nous pouvons alors définir l'action de l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sur ces fonctions par les règles algébriques :

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j; \tag{8}$$

(où δ_i^j est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i=j$ et 0 si $i\neq j$) et la règle de Leibniz :

$$\forall f,g\in\mathcal{C}^\infty(W),\quad \frac{\partial(fg)}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}g + f\frac{\partial g}{\partial x^i}. \tag{9}$$

A présent considérons un espace vectoriel V de dimension m muni d'une base $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$ et soit $(\theta^1, \cdots, \theta^m)$ la base duale. Elie Cartan voit les formes différentielles sur V comme des fonctions en les variables $\theta^1, \cdots, \theta^m$, avec la particularité que ces variables anticommutent, c'est à dire satisfont

$$\theta^i\theta^j + \theta^j\theta^i = 0.$$

Cette règle d'anticommutation a comme conséquence que l'espace vectoriel des polynômes en les variables $\theta^1, \cdots, \theta^m$ est de dimension finie et s'identifie avec l'algèbre extérieure $\Lambda^* V^*$. Plus généralement, on convient que l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en ces variables s'identifie aussi avec $\Lambda^* V^*$.

Cartan définit alors l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial\theta^i}$ par :

$$\frac{\partial\theta^j}{\partial\theta^i} = \delta_i^j; \tag{10}$$

et la règle de Leibniz graduée :

$$\forall f \in \Lambda^p V^*, \forall g \in \Lambda^q V^*, \quad \frac{\partial(fg)}{\partial\theta^i} = \frac{\partial f}{\partial\theta^i} g + (-1)^p f \frac{\partial g}{\partial\theta^i}. \tag{11}$$

Nous remarquons que l'opérateur ι_{ϵ_i} satisfait exactement les mêmes relations, à savoir : $\iota_{\epsilon_i}\theta^j = \delta_i^j$ et la règle de Leibniz graduée (6). Comme ces règles caractérisent complètement ces opérateurs, ils coïncident :

$$\iota_{\epsilon_i} = \frac{\partial}{\partial\theta^i}.$$

Suivant ce point de vue, Cartan découvre des analogues « anticommutantes » de relations bien connues. Par exemple l'analogue de l'identité d'Euler $\sum_{i=1}^m x^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) = pf(x)$ satisfaite par une fonction f homogène de degré p est la relation $\sum_{i=1}^m \theta^i \frac{\partial}{\partial\theta^i} f(\theta) = pf(\theta)$, satisfaite par une p-forme $f \in \Lambda^p V^*$. De même on pourra interpréter (5) comme un analogue du lemme de Schwarz.

Dans la suite, nous ne priverons pas de noter de temps à autre le produit intérieur comme une dérivation par rapport à une 1-forme, surtout dans le cas d'un produit intérieur par un vecteur faisant partie d'une base que l'on s'est donnée. Le fait de voir le produit intérieur comme une dérivation par rapport à une variable « impaire » semble avoir été pratiquement oublié (à part quelques réminiscences chez Jean Leray et Israel Gelfand) pendant longtemps, jusqu'à ce qu'il ait refait surface chez les physiciens qui ont inventé la supersymétrie à partir de 1970.

Par ailleurs Cartan avait l'habitude de désigner le produit extérieur de deux formes différentielles α, β par $[\alpha\beta]$. Cette notation est aujourd'hui remplacée par $\alpha\wedge\beta$ chez la plupart des auteurs (ou par $\alpha\beta$ chez [1]).

1.1.4 L'image inverse d'une forme par une application linéaire

Rappelons qu'à toute application linéaire $A : V \longrightarrow W$, nous pouvons associer l'application linéaire adjointe $A^* : W^* \longrightarrow V^*$, qui, à $\ell \in W^*$, associe $A^*\ell := \ell \circ A \in V^*$. Cette application s'étend en une application de $\Lambda^\bullet W^*$ vers $\Lambda^\bullet V^*$.

Définition 1.5 *Soient V et et W deux espaces vectoriels réels et $p \in \mathbb{N}$. Soit $A : V \longrightarrow W$ une application linéaire et soit $\alpha \in \Lambda^p W^*$. L'**image inverse** ou le **pull-back** de α par A est la p-forme notée $A^*\alpha \in \Lambda^p V^*$ définie par :*

$$\forall v_1, \cdots, v_p \in V, \quad (A^*\alpha)(v_1, \cdots, v_p) := \alpha(A(v_1), \cdots, A(v_p)). \tag{12}$$

L'application $\alpha \longmapsto A^*\alpha$ s'étend de façon unique en une application linéaire de $\Lambda^\bullet W^*$ vers $\Lambda^\bullet V^*$.

Si $\dim V = \dim W = n$, si $(\eta^1, \cdots, \eta^n)$ est une base de W^* et si $(\theta^1, \cdots, \theta^n)$ est une base de V^*, alors, pour toute application linéaire $A : V \longrightarrow W$, $A^*(\eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^n) = (\det A^\eta_\theta)(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n)$, A^η_θ est la matrice de A dans les bases duales de $(\theta^1, \cdots, \theta^n)$ et $(\eta^1, \cdots, \eta^n)$.

Notons une propriété immédiate : si $\alpha, \beta \in \Lambda^\bullet W^*$ et $A : V \longrightarrow W$,

$$A^*(\alpha \wedge \beta) = (A^*\alpha) \wedge (A^*\beta). \tag{13}$$

Une application de (13) est de retrouver la formule du développement d'un déterminant par rapport à une colonne ou une ligne. En effet, si $\dim V = n$, si $(\theta^1, \cdots, \theta^n)$ est une base de V^*, pour tout endomorphisme $A : V \longrightarrow V$, une conséquence de (13) est

$$A^*(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n) = (A^*\theta^1) \wedge A^*(\theta^2 \wedge \cdots \wedge \theta^n).$$

Identifions A avec sa matrice $\begin{pmatrix} A^1_1 & \cdots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \cdots & A^n_n \end{pmatrix}$ dans la base duale de $(\theta^1, \cdots, \theta^n)$ (*Id est* $A^*\theta^i = A^i_j\theta^j$). La relation précédente se traduit alors par

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & \cdots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \cdots & A^n_n \end{vmatrix} \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n = (A^1_i\theta^i) \wedge \left(\frac{\partial \det A}{\partial A^1_j} \frac{\partial}{\partial \theta^j} (\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n) \right)$$

où les signe $\sum_{i=1}^n$ et $\sum_{j=1}^n$ sont sous-entendus dès qu'un indice est répété et où, pour tout i, j, $\frac{\partial \det A}{\partial A^i_j}$ est le cofacteur de A^i_j, c'est à dire $(-1)^{i+j}$ fois le mineur $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en ôtant la ligne i et la colonne j à la matrice A. Comme $\theta^i \wedge \frac{\partial}{\partial \theta^j}(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n) = \delta^i_j \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$ (où δ^i_j, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$, est le symbole de Kronecker), on en déduit que

$$\det A = A^1_i \frac{\partial \det A}{\partial A^1_i},$$

qui correspond au développement du déterminant par rapport à la première ligne de A.

La même méthode permet de généraliser ce type de formule. En partant de

$$A^*(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n) = A^*(\theta^1 \wedge \theta^2) \wedge A^*(\theta^3 \wedge \cdots \wedge \theta^n),$$

on obtient

$$A^*(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n) = \sum_{i_1<i_2} \begin{vmatrix} A^1_{i_1} & A^1_{i_2} \\ A^2_{i_1} & A^2_{i_2} \end{vmatrix} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \sum_{j_1<j_2} \frac{\partial^2 \mathrm{det} A}{\partial A^1_{j_1} \partial A^2_{j_2}} \frac{\partial}{\partial \theta^{j_1}} \frac{\partial}{\partial \theta^{j_2}} \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n,$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{det} A = 2 \sum_{i_1<i_2} A^{12}_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 \mathrm{det} A}{\partial A^1_{i_1} \partial A^2_{i_2}} = \sum_{i_1<i_2} A^{12}_{i_1 i_2} \left(\frac{\partial^2 \mathrm{det} A}{\partial A^1_{i_1} \partial A^2_{i_2}} - \frac{\partial^2 \mathrm{det} A}{\partial A^2_{i_1} \partial A^1_{i_2}} \right),$$

où $A^{i_1 i_2}_{i_1 i_2} := \begin{vmatrix} A^{i_1}_{i_1} & A^{i_1}_{i_2} \\ A^{i_1 2}_{i_1} & A^{i_2}_{i_2} \end{vmatrix}$ et $\frac{\partial^2 \mathrm{det} A}{\partial A^{i_1}_{j_1} \partial A^{i_2}_{j_2}} = -\frac{\partial^2 \mathrm{det} A}{\partial A^{i_1}_{j_2} \partial A^{i_2}_{j_1}}$ est le cofacteur de $A^{i_1 i_2}_{i_1 i_2}$, c'est à dire $(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}$ fois le mineur $(n-2) \times (n-2)$ obtenu en ôtant les lignes i_1 et i_2 et les colonnes j_1 et j_2 à la matrice A.

1.1.5 Un lemme de Cartan

Le résultat suivant est très utile.

Lemme 1.2 *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, $(\theta^1, \cdots, \theta^p)$ et $(\varphi^1, \cdots, \varphi^p)$ deux familles dans V^*. Supposons que la famille $(\theta^1, \cdots, \theta^p)$ est **libre** et que la relation suivante est satisfaite :*

$$\sum_{i=1}^{p} \theta^i \wedge \varphi^i = \theta^1 \wedge \varphi^1 + \cdots + \theta^p \wedge \varphi^p = 0. \tag{14}$$

Alors il existe une unique famille de coefficients $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ telle que : $\forall i, j = 1, \cdots, p$, $a_{ij} = a_{ji}$ et

$$\forall i = 1, \cdots, p, \quad \varphi^i = a_{i1}\theta^1 + \cdots + a_{ip}\theta^p = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\theta^j. \tag{15}$$

Démonstration — Notons m la dimension de V et commençons pas examiner le cas particulier où $p = m$. Alors $(\theta^1, \cdots, \theta^m)$ est une base de V^* et l'existence et l'unicité des coefficients tels que (15) ait lieu est alors automatique. De plus si nous remplaçons les φ^i dans (14) par leur expression donnée par (15), nous obtenons la relation

$$0 = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\theta^i \wedge \theta^j = \sum_{1 \leq i < j \leq m} (a_{ij} - a_{ji})\theta^i \wedge \theta^j,$$

qui entraîne la relation de symétrie $a_{ij} = a_{ji}$.

Dans le cas où $p < m$, nous pouvons toujours compléter la famille libre $(\theta^1, \cdots, \theta^p)$ en une base $(\theta^1, \cdots, \theta^m)$ de V^*. Nous complétons également la famille $(\varphi^1, \cdots, \varphi^p)$ en la famille $(\varphi^1, \cdots, \varphi^m)$ en choisissant tout simplement $\varphi^j = 0$ si $p+1 \leq j \leq m$. Nous sommes alors ramenés au cas précédent. En appliquant le résultat que nous avions obtenu, nous en déduisons que, $\forall i = 1, \cdots, m$, $\varphi^i = \sum_{j=1}^m a_{ij}\theta^j$. Puisque $\varphi^i = 0$ si $p+1 \leq i \leq m$ et comme $(\theta^1, \cdots, \theta^m)$ est une base, nous en déduisons que $a_{ij} = 0$ si $p+1 \leq i \leq m$. Mais à cause de la relation de symétrie $a_{ij} = a_{ji}$, nous avons aussi $a_{ij} = 0$ si $p+1 \leq j \leq m$. Le résultat s'ensuit. □

1.1.6 Décomposition d'une 2-forme

Théorème 1.1 *Soit V un espace vectoriel réel de dimension m, $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$ une base de V et $(\theta^1, \cdots, \theta^m)$ la base duale. Soit $F \in \Lambda^2 V^*$ une 2-forme sur V. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2p \leq m$ et il existe une famille $(\alpha^1, \cdots, \alpha^{2p})$ de rang $2p$ dans V^* telle que*

$$F = \alpha^1 \wedge \alpha^2 + \cdots + \alpha^{2p-1} \wedge \alpha^{2p}. \tag{16}$$

De plus l'entier p est donné par rang $\left(\frac{\partial F}{\partial \theta^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial \theta^m}\right) = 2p$.

(Rappelons que $\frac{\partial F}{\partial \theta^i} = \iota_{\epsilon_i} F = \epsilon_i \lrcorner F$.)
Démonstration — Le cas où $F = 0$ est immédiat, on a alors dès le départ la forme (16) avec $p = 0$. Supposons donc que $F \neq 0$ et partons de la décomposition

$$F = \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_{ij}\theta^i \wedge \theta^j.$$

Etape 1 — Sans perte de généralité, on suppose que $a_{12} \neq 0$. Alors, si nous notons

$$\alpha_1 = \frac{\partial F}{\partial \theta^1} = a_{12}\theta^2 + \sum_{j=3}^m a_{1j}\theta^j \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{1}{a_{12}}\frac{\partial F}{\partial \theta^2} = -\theta^1 + \frac{1}{a_{12}}\sum_{k=3}^m a_{2k}\theta^k,$$

il est clair que le système (α_1, α_2) est de rang 2. Notons

$$\Phi := F - \alpha_1 \wedge \alpha_2 = F - \frac{1}{a_{12}}\frac{\partial F}{\partial \theta^1} \wedge \frac{\partial F}{\partial \theta^2}$$

et montrons que $\Phi \in \Lambda^2\mathrm{Vect}(\theta^3, \cdots, \theta^m)$. Pour cela nous calculons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \theta^1} \wedge \frac{\partial F}{\partial \theta^2} &= \left(a_{12}\theta^2 + \sum_{j=3}^m a_{1j}\theta^j\right) \wedge \left(-a_{12}\theta^1 + \sum_{k=3}^m a_{2k}\theta^k\right) \\
&= -(a_{12})^2\theta^2 \wedge \theta^1 + a_{12}\sum_{k=3}^m a_{2k}\theta^2 \wedge \theta^k + a_{12}\sum_{j=3}^m a_{1j}\theta^1 \wedge \theta^j + \sum_{j=3}^m a_{1j}\theta^j \wedge \sum_{k=3}^m a_{2k}\theta^k \\
&= a_{12}\left(a_{12}\theta^1 \wedge \theta^2 + \sum_{j=3}^m a_{1j}\theta^1 \wedge \theta^j + \sum_{k=3}^m a_{2k}\theta^2 \wedge \theta^k\right) + \sum_{j=3}^m a_{1j}\theta^j \wedge \sum_{k=3}^m a_{2k}\theta^k \\
&= a_{12}\left(F - \sum_{3 \leq i < j \leq m} a_{ij}\theta^i \wedge \theta^j\right) + \sum_{j=3}^m a_{1j}\theta^j \wedge \sum_{k=3}^m a_{2k}\theta^k.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\Phi = \sum_{3\leq i<j\leq m} a_{ij}\theta^i \wedge \theta^j - \frac{1}{a_{12}} \sum_{j=3}^{m} a_{1j}\theta^j \wedge \sum_{k=3}^{m} a_{2k}\theta^k \in \Lambda^2\mathrm{Vect}(\theta^3, \cdots, \theta^m).$$

Etape 2 — Nous avons obtenu que $F = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \Phi$, où $\Phi \in \Lambda^2\mathrm{Vect}(\theta^3, \cdots, \theta^m)$, c'est à dire, Φ est un polynôme en les variables $\theta^3, \cdots, \theta^m$. On peut alors réitérerer le raisonnement : soit $\Phi = 0$ et on s'arrête là, on obtient (16) avec $p = 2$; soit $\Phi \neq 0$ et on décompose à nouveau Φ comme à l'étape précédente, obtenant ainsi une décomposition de la forme $F = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4 + \Phi^{(2)}$, où $\Phi^{(2)}$st un polynôme en les variables $\theta^5, \cdots, \theta^m$. On continue ainsi de suite jusqu'au résultat recherché. Comme on passe d'un polynôme en $m - 2j$ variables à un polynôme en $m - 2j - 2$ variables à chaque itération non triviale, l'algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations.

Notons que nous pouvons interpréter géométriquement le fait que $\Phi \in \Lambda^2\mathrm{Vect}(\theta^3, \cdots, \theta^m)$, en en concluant que Φ provient d'une 2-forme sur l'espace quotient [3] $V/(\mathbb{R}\epsilon_1 + \mathbb{R}\epsilon_2)$ qui est de dimension $m - 2$.

Etape 3 — Complétons la famille $(\alpha^1, \cdots, \alpha^{2p})$ en une base $(\alpha^1, \cdots, \alpha^m)$ de V^* et notons $(X_1, \cdots, X_m)$ sa base duale. Comme $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$ et $(X_1, \cdots, X_m)$ sont deux bases de V, il existe $A = (A^i_j)_{1\leq i,j\leq m} \in GL(m, \mathbb{R})$ tel que $\epsilon_j = A^i_j X_i$ (le signe $\sum_{i=1}^m$ est sous-entendu). Notons $\frac{\partial F}{\partial \alpha^i} = X_i \lrcorner F$, nous avons alors

$$\frac{\partial F}{\partial \theta^j} = \epsilon_j \lrcorner F = A^i_j X_i \lrcorner F = A^i_j \frac{\partial F}{\partial \alpha^i},$$

on en déduit donc que $\mathrm{rang}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial \theta^m}\right) = \mathrm{rang}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial \alpha^m}\right)$. Mais cette dernière quantité est facile à calculer, en effet

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^i} = \begin{cases} \alpha^{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq 2p \text{ et } i \text{ est impair} \\ -\alpha^{i-1} & \text{si } 1 \leq i \leq 2p \text{ et } i \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } 2p+1 \leq i \leq m \end{cases}$$

et donc $\mathrm{rang}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial \theta^m}\right) = \mathrm{rang}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial \alpha^m}\right) = 2p$. □

Remarque — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $F^{\wedge k} := \underbrace{F \wedge \cdots \wedge F}_{k}$. Une autre caractérisation de l'entier p est qu'il est le plus grand entier k tel que $F^{\wedge k} \neq 0$. Cela provient du fait que, si on note $\beta^i := \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}$ pour $i = 1, \cdots, k$, on a, pour tout k tel que $1 \leq k \leq p$:

$$F^{\wedge k} = k! \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq m} \beta^{i_1} \wedge \beta^{i_k}$$

et donc en particulier $F^{\wedge p} = p!\beta^1 \wedge \cdots \beta^p$ et $F^{\wedge k} = 0$ si $k > p$.

3. En effet, le dual de $V/(\mathbb{R}\epsilon_1 + \mathbb{R}\epsilon_2)$ s'identifie de façon canonique à $\mathrm{Vect}(\theta^3, \cdots, \theta^m)$ et, plus précisément, Φ est le pull-back d'une 2-forme sur $V/(\mathbb{R}\epsilon_1 + \mathbb{R}\epsilon_2)$ par l'application canonique $\pi : V \longrightarrow V/(\mathbb{R}\epsilon_1 + \mathbb{R}\epsilon_2)$

1.2 Formes différentielles et champs de vecteur sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$

1.2.1 Définitions

Définition 1.6 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{N}$. Une p-forme différentielle α sur U est une application régulière*

$$\alpha : U \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*.$$

Pour tout $\mathrm{M} \in U$, on note $\alpha_{\mathrm{M}} \in \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ la valeur de α en M. On note $\Omega^p(U)$ l'espace vectoriel des p-formes différentielles sur U et on pose $\Omega^\bullet(U) := \oplus_{p=0}^m \Omega^p(U)$.

Il est naturel de définir en même temps l'espace des champs de vecteur.

Définition 1.7 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Un champ de vecteur sur U est une application régulière*

$$X : U \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

On note $X(\mathrm{M})$ la valeur d'un champ de vecteur $X \in \mathcal{X}(U)$ en un point $\mathrm{M} \in U$. On note $\mathcal{X}(U)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur U.

Produits extérieurs et intérieurs
Les opérations de produit extérieur et de produit intérieur définies précédemment s'étendent de façon immédiate aux formes différentielles extérieures et aux champs de vecteur.

— Si $\alpha \in \Omega^p(U)$ et $\beta \in \Omega^q(U)$, le produit extérieur de α par β est la $(p+q)$-forme $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q}(U)$ définie par

$$\forall \mathrm{M} \in U, \quad (\alpha \wedge \beta)_{\mathrm{M}} = \alpha_{\mathrm{M}} \wedge \beta_{\mathrm{M}}.$$

— Si $\alpha \in \Omega^p(U)$ et $X \in \mathcal{X}(U)$, le produit intérieur de X par α est la $(p-1)$-forme $X \lrcorner \alpha \in \Omega^{p-1}(U)$ définie par

$$\forall \mathrm{M} \in U, \quad (X \lrcorner \alpha)_{\mathrm{M}} = X(\mathrm{M}) \lrcorner \alpha_{\mathrm{M}}.$$

1.2.2 Deux exemples fondamentaux de formes différentielles extérieures

L'exemple le plus simple d'une forme différentielle sur un ouvert U est une forme de degré 0 : comme $\Lambda^0(\mathbb{R}^m)^*$ s'identifie à $\mathbb{R}$, une 0-forme est simplement une fonction de U dans $\mathbb{R}$.

Un autre exemple simple consiste à partir d'une fonction φ définie sur U, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ (i.e. dans $\mathcal{C}^1(U)$). Alors, en tout point $\mathrm{M} \in U$, la différentielle de φ en M

$$\begin{array}{cccc} d\varphi_{\mathrm{M}} : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \xi = (\xi^1, \cdots, \xi^m) & \longmapsto & \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(\mathrm{M}) \end{array}$$

est un élément de $(\mathbb{R}^m)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^m)^*$ et donc l'application différentielle $d\varphi : \mathrm{M} \longmapsto d\varphi_{\mathrm{M}}$ est une 1-forme.

Ces deux exemples sont fondamentaux, comme nous le verrons à la Section 3. A partir d'eux et en utilisant le produit extérieur $\Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \longrightarrow \Omega^{p+q}(U)$, il est possible de reconstituer toutes les p-formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et pour tout p. De plus l'application

$$\begin{array}{cccc} d: & \Omega^0(U) & \longrightarrow & \Omega^1(U) \\ & f & \longmapsto & df \end{array}$$

conduit, via une extension sur $\Omega^\bullet(U) = \oplus_{p=0}^m \Omega^p(U)$, à la construction de la *différentielle extérieure*, objet central dans le calcul différentiel extérieur.

1.2.3 Les notations dx^i et $\frac{\partial}{\partial x^i}$

Soit $x = (x^1, \cdots, x^m) : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un système de coordonnées sur U (affine, ou plus généralement, régulières). Observons le fait élémentaire que, pour tout $i = 1, \cdots, m$, x^i est une fonction sur U et donc dx^i est une 1-forme différentielle sur U. De plus, en tout point $\mathrm{M} \in U$, les différentielles

$$dx^1_{\mathrm{M}}, \cdots, dx^m_{\mathrm{M}}$$

forment une base de $(\mathbb{R}^m)^*$. En fait il s'agit tout simplement de la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ qui, en particulier, ne dépend pas de M. On pourra donc écrire dx^i au lieu de dx^i_{M} en général. Si $\alpha \in \Omega^p(U)$, on peut décomposer la valeur de α_{M} dans la base $(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m}$:

$$\forall \mathrm{M} \in U, \quad \alpha_{\mathrm{M}} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \cdots i_p}(\mathrm{M}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \sum_I \alpha_I(\mathrm{M}) dx^I,$$

où nous avons utilisée la notation concise I pour un multi-indice introduite en (4). Nous pouvons aussi écrire l'identité suivante dans $\Omega^p(U)$

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \sum_I \alpha_I dx^I.$$

De même nous préférerons souvent noter

$$(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m})$$

la base canonique de $\mathbb{R}^m$ (ou, plus généralement, la base duale de $(dx^1, \cdots, dx^m)$), au lieu de $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$. Le lecteur peut se demander de quel droit je note des champs de vecteur comme des opérateurs différentiels. La raison est qu'un champ de vecteur sur U n'est pas très différent d'un opérateur différentiel homogène de degré 1 agissant sur les fonctions définies sur U. Expliquons pourquoi.

Notons $\mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(U), \mathcal{C}^\infty(U))$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathcal{C}^\infty(U)$ vers $\mathcal{C}^\infty(U)$ et considérons

$$\mathcal{D}^1(U) := \{D \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(U), \mathcal{C}^\infty(U));\ D(fg) = (Df)g + fDg, \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)\}.$$

C'est ainsi que nous définissons l'espace des opérateurs différentiels homogènes de degré 1 agissant sur les fonctions définies sur U. La propriété essentielle est que ces opérateurs satisfont la règle de Leibniz.

Il n'est pas difficile de voir que, si $X \in \mathcal{X}(U)$, l'opérateur $D_X \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(U), \mathcal{C}^\infty(U))$ défini par

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(U), \forall \mathrm{M} \in U \quad (D_X f)(\mathrm{M}) := df_{\mathrm{M}}(X(\mathrm{M}))$$

satisfait la règle de Leibniz et donc $D_X \in \mathcal{D}^1(U)$. Cela définit une application linéaire canonique

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{X}(U) & \longrightarrow & \mathcal{D}^1(U) \\ & X & \longmapsto & D_X \end{array}$$

Proposition 1.5 *L'application T est un isomorphisme.*

Remarquons que, étant donné un $D \in \mathcal{D}^1(U)$, si l'on sait que $T^{-1}(D)$ existe, il n'est pas difficile d'identifier $T^{-1}(D)$ (et donc de montrer que T est injectif). Il suffit pour cela de tester D sur les fonctions coordonnées x^i. On trouve ainsi que $T^{-1}(D)$ est le champ de vecteur $\sum_{i=1}^m (Dx^i)\epsilon_i$.

Démonstration de la Proposition 1.5 — Il s'agit de construire l'application inverse T^{-1}. Commençons par remarquer que, pour tout $D \in \mathcal{D}^1(U)$, $D1 = 0$ (où 1 est la fonction constante égale à un). Cela découle de la règle de Leibniz : $D1 = D1^2 = (D1)1 + 1D1 = 2D1$. Par linéarité, cela entraîne que, pour toute fonction constante a, $Da = 0$.

Fixons $\mathrm{M}_0 \in U$ et posons $x_0^i := x^i(\mathrm{M}_0)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, nous avons

$$\forall \mathrm{M} \in U, \quad f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}_0) + \sum_{i=1}^m (x^i(\mathrm{M}) - x_0^i) g_i(\mathrm{M}),$$

où $g_i(\mathrm{M}) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathrm{M}_0 + s(\mathrm{M} - \mathrm{M}_0))ds$. Donc

$$Df = D(f(\mathrm{M}_0)) + \sum_{i=1}^m D[(x^i - x_0^i)g_i] = 0 + \sum_{i=1}^m [(Dx^i - 0)g_i + (x^i - x_0^i)Dg_i].$$

En évaluant cette fonction en $\mathrm{M} = \mathrm{M}_0$, on obtient

$$(Df)(\mathrm{M}_0) = \sum_{i=1}^m (Dx^i)(\mathrm{M}_0) g_i(\mathrm{M}_0) + 0 = \sum_{i=1}^m (Dx^i)(\mathrm{M}_0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathrm{M}_0).$$

Donc D coïncide avec $T(X)$ avec $X = \sum_{i=1}^m (Dx^i)\epsilon_i$. □

Cela justifie donc que nous identifions ϵ_i avec $T(\epsilon_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Ainsi, par exemple, $T^{-1}(D) = \sum_{i=1}^m (Dx^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$.

2 Les variétés

Nous nous ne présentons ici que les variétés sans bord. Les variétés avec bord seront abordées (si je puis me permettre) à la Section 3.6.1.

2.1 Variétés, espaces tangents et cotangents

Définition 2.1 (Variété différentielle) *Une variété différentielle $\mathcal{M}$ de dimension n est un espace topologique équipé d'un* ***atlas****, c'est à dire un système de* ***cartes locales*** *$x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i \subset \mathbb{R}^m$, où $i \in I$ (I est un ensemble fini ou dénombrable) et*

- *chaque $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathcal{M}$ et la réunion $\cup_{i\in I}\mathcal{O}_i$ est égale à $\mathcal{M}$;*
- *chaque U_i est un ouvert de $\mathbb{R}^m$;*
- *chaque application x_i est un homéomorphisme ;*
- *si $\mathcal{O}_{ij} := \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ est non vide, alors l'homéomorphisme $\varphi_{ij} := x_j \circ (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})}$ est un difféomorphisme de $x_i(\mathcal{O}_{ij})$ vers $x_j(\mathcal{O}_{ij})$.*

On dit que la variété est de classe $\mathcal{C}^k$ si les applications de recollement $\varphi_{ij} : (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})} \longrightarrow x_i(\mathcal{O}_{ij})$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^k$.

Cette définition permet de donner un sens aux notions suivantes : une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ dans $\mathcal{M}$ de classe $\mathcal{C}^k$ ou, à l'inverse, une application de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathcal{M}$ vers $\mathbb{R}^m$ ou encore, plus généralement, une application entre deux variétés de classe $\mathcal{C}^k$, etc.

2.1.1 L'espace tangent

Pour tout point $\textsc{m} \in \mathcal{M}$, on définit l'*espace tangent* à la variété $\mathcal{M}$ en $\textsc{m}$ comme suit. Tout d'abord on considère l'ensemble de tous les trajectoires dynamiques d'un point dans $\mathcal{M}$ qui passent en $\textsc{m}$ à l'instant $t = 0$:

$$\Gamma_{\textsc{m}} := \{(I,\gamma)|\ I \text{ (intervalle) } \subset \mathbb{R}, 0 \in I, \gamma \in \mathcal{C}^1(I,\mathcal{M}), \gamma(0) = \textsc{m}\}$$

et on décidera que *deux trajectoires (I_1,γ_1) et (I_2,γ_2) sont équivalentes si elles ont même vecteur vitesse à l'instant* 0. Bien évidemment la difficulté est de donner un sens au mot « vecteur vitesse », puisque celui-ci est censé vivre dans l'espace tangent, que l'on n'a pas encore défini. On s'en sort en utilisant une carte locale $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$, où $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ est un ouvert qui contient le point $\textsc{m}$. Cela donne :

$$(I_1,\gamma_1) \sim (I_2,\gamma_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d(x\circ\gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(x\circ\gamma_2)}{dt}(0).$$

Grâce aux axiomes de la définition d'une variété, on peut alors vérifier que cette relation d'équivalence ne dépend pas de la carte locale utilisée. En effet, si $y : \mathcal{O}' \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$ est une autre carte locale, alors $y = \varphi \circ x$ sur un voisinage de $\textsc{m}$ dans $\mathcal{M}$ et, pour tout chemin γ tracé sur $\mathcal{M}$ et passant par $\textsc{m}$ à l'instant 0, nous avons $y\circ\gamma = \varphi\circ(x\circ\gamma)$ et donc

$$\frac{d(y\circ\gamma)}{dt}(0) = d\varphi_{x(\textsc{m})} \circ \frac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0), \tag{17}$$

où $d\varphi_{x(\textsc{m})}$ est la différentielle de φ en $x(\textsc{m})$. Donc, comme $d\varphi_{x(\textsc{m})}$ est une bijection, nous voyons que la relation d'équivalence $\sim$ ne dépend pas du choix de la carte. On peut alors adopter la définition suivante :

Définition 2.2 (espace tangent) *L'*espace tangent *à* M *en* $\mathcal{M}$ *est l'ensemble des classes d'équivalence de* $\sim$ *:*

$$T_{\text{M}}\mathcal{M} := \Gamma_{\text{M}}/\sim .$$

Pour tout élément $v = [\gamma \mod \sim] \in T_{\text{M}}\mathcal{M}$ et pour toute carte locale x, on pose $dx_{\text{M}}(v) = \frac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0)$. Cela définit la bijection

$$\begin{array}{cccc} dx_{\text{M}} : & T_{\text{M}}\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & [(I,\gamma) \mod \sim] & \longmapsto & \dfrac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0) \end{array}$$

Nous pouvons donc munir $T_{\text{M}}\mathcal{M}$ de l'unique structure d'espace vectorielle telle que dx_{M} soit linéaire. La relation (17) se traduit par

$$dy_{\text{M}} = d\varphi_{x(\text{M})} \circ dx_{\text{M}}. \tag{18}$$

Comme $d\varphi_{\text{M}}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^m$, cela entraîne que la structure d'espace vectoriel que nous avons définie sur $T_{\text{M}}\mathcal{M}$ ne dépend pas de la carte choisie.

2.1.2 L'espace cotangent

Le compagnon de l'espace tangent est son dual, qui joue un rôle au moins aussi important.

Définition 2.3 (espace cotangent) *Soit* $\mathcal{M}$ *une variété différentielle et* M $\in \mathcal{M}$*. L'*espace cotangent à $\mathcal{M}$ au point M *est* $(T_{\text{M}}\mathcal{M})^*$*, l'espace dual de* $T_{\text{M}}\mathcal{M}$*. On le note :*

$$T^*_{\text{M}}\mathcal{M}.$$

Nous définissons de même l'espace des **formes p-multilinéaires alternées sur $T_{\text{M}}\mathcal{M}$**, nous le noterons :

$$\Lambda^p T^*_{\text{M}}\mathcal{M}.$$

Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathcal{M}$ (ou sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathcal{M}$), nous définissons $df_{\text{M}} : T_{\text{M}}\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$df_{\text{M}}(v) := \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(0), \quad \text{où} \quad v = [\gamma \mod \sim].$$

Si x est une carte locale sur un voisinage de M dans $\mathcal{M}$, nous pouvons écrire l'identité $f\circ\gamma = (f\circ x^{-1})\circ(x\circ\gamma)$, dont nous déduisons $\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(0) = d(f\circ x^{-1})_{x(\text{M})} \circ \frac{d(x\circ\gamma)}{dt}(0) = d(f\circ x^{-1})_{x(\text{M})} \circ dx_{\text{M}}(v)$. Cela entraîne que, d'une part, $\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(0)$ ne dépend pas du choix de γ pour représenter v et, d'autre part, $[v \longrightarrow df_{\text{M}}(v)]$ est linéaire. Ainsi $df_{\text{M}} \in T^*_{\text{M}}\mathcal{M}$.

Appliquant en particulier cela aux fonctions $x^1, \cdots, x^m : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ (c'est à dire aux composantes d'une carte locale $x : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^m$), nous obtenons ainsi en chaque point M $\in \mathcal{O}$ une famille $(dx^1_{\text{M}}, \cdots, dx^m_{\text{M}})$ dans $T^*_{\text{M}}\mathcal{M}$. Comme il ne s'agit ni plus ni moins que des composantes canoniques de l'isomorphisme dx_{M}, cette famille forme donc une base de $T^*_{\rm M}\mathcal{M}$ (cela généralise les remarques faites au §1.2). La différentielle d'une fonction quelconque f en un point $\rm M \in \mathcal{O}$ se décompose donc d'une façon unique dans cette base. L'usage est de noter

$$df_{\rm M} = \frac{\partial f}{\partial x^j}({\rm M})dx^j_{\rm M}.$$

cette décomposition (le signe $\sum_{j=1}^m$ est sous-entendu). Remarquer que $\frac{\partial f}{\partial x^j}({\rm M}) = \frac{\partial (f\circ x^{-1})}{\partial t^j}(x({\rm M}))$. Si f est définie et différentiable sur $\mathcal{O}$, on écrira $df = \frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j$ sur $\mathcal{O}$.

2.1.3 Applications différentiables entre variétés

Nous disposons maintenant de tous les outils pour faire du calcul différentiel entre deux variétés. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés de dimensions m et n, respectivement. Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application. Nous dirons que φ est de classe $\mathcal{C}^k$ si, pour toute carte locale $x : \mathcal{D} \longrightarrow U$ sur $\mathcal{M}$ et toute carte locale $y : \mathcal{O} \longrightarrow V$ sur $\mathcal{N}$ telle que l'image $x(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par x soit contenue dans $\mathcal{O}$, l'application

$$y \circ \varphi \circ x^{-1} : U \longrightarrow V$$

est de classe $\mathcal{C}^k$. A nouveau, cette définition n'a de sens (indépendant des cartes utilisées sur $\mathcal{M}$ et sur $\mathcal{N}$) que si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont des variétés de classe au moins égale à k. Si tel est le cas et si $k \geq 1$, nous pouvons définir la différentielle de φ en un point $\rm M \in \mathcal{M}$ comme étant l'application linéaire $d\varphi_{\rm M} : T_{\rm M}\mathcal{M} \longrightarrow T_{\varphi({\rm M})}\mathcal{N}$ telle que $dy_{\varphi({\rm M})} \circ d\varphi_{\rm M} \circ (dx_{\rm M})^{-1} = d(y \circ \varphi \circ x^{-1})_{x({\rm M})}$.

2.2 Les sous-variétés

2.2.1 Définitions

Une classe importante d'exemples de variétés sont les sous-variétés des variétés. Nous en donnons plusieurs définitions équivalentes.

Définition 2.4 (sous-variété 1) *Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension m. Une sous-variété $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}$ de dimension k est un sous-ensemble de $\mathcal{M}$ tel que pour tout point $\rm M$ de $\mathcal{S}$, il existe un voisinage $\mathcal{O}_{\rm M}$ de $\rm M$ dans $\mathcal{M}$ et une carte x définie sur $\mathcal{O}_{\rm M}$ et à valeurs dans un ouvert de $\mathbb{R}^m$, tel que $x(\mathcal{O}_{\rm M} \cap \mathcal{S}) = \Delta^k \cap x(\mathcal{O}_{\rm M})$, où Δ^k est le sous-espace de dimension m de $\mathbb{R}^m$ défini par*

$$\Delta^k := \{t \in \mathbb{R}^m / t^{k+1} = \cdots = t^m = 0\}.$$

Cette définition signifie que, localement, une sous-variété ressemble à un sous-espace affine, si on la regarde « à travers » une carte locale bien choisie.

Définition 2.5 (sous-variété 2) *Une sous-variété $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}$ de dimension k est un sous-ensemble de $\mathcal{M}$ tel que pour tout point $\rm M$ de $\mathcal{S}$, il existe un voisinage $\mathcal{O}_{\rm M}$ de $\rm M$ dans $\mathcal{M}$, une application $f : \mathcal{O}_{\rm M} \longrightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ de rang $m-k$ partout (cela signifie que le rang de df est $m-k$ partout sur $\mathcal{O}_{\rm M}$) et une valeur $s_0 \in \mathbb{R}^{m-k}$ tels que $\mathcal{O}_{\rm M} \cap \mathcal{S} = f^{-1}(s_0)$.*

Cette définition entraîne en particulier que tout ensemble de niveau d'une application régulière correspondant à une valeur régulière est une sous-variété. Enfin une dernière définition est :

Définition 2.6 (sous-variété 3) *Une sous-variété $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}$ de dimension k est un sous-ensemble de $\mathcal{M}$ tel que pour tout point* M *de $\mathcal{S}$, il existe un voisinage $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$ de* M *dans $\mathcal{M}$, un ouvert ω de $\mathbb{R}^k$ et une application $\psi : \omega \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{M}}$ telle que*
- *ψ est un homéomorphisme entre ω et $\mathcal{O}_{\mathrm{M}} \cap \mathcal{S}$ (où la topologie utilisée sur $\mathcal{O}_{\mathrm{M}} \cap \mathcal{S}$ est celle induite par la distance dans $\mathcal{M}$)*
- *ψ est une **immersion**, id est $d\psi$ est de rang k partout sur ω*

Théorème 2.1 *Les trois définitions précédentes d'une sous-variété sont toutes équivalentes.*

Démonstration — *(i)* Pour passer de la définition 1 à la définition 2, il suffit de prendre $f = (x^{k+1}, \ldots, x^m)$.
(ii) Passons de la définition 2 à la définition 1. Notons $f = (f^{k+1}, \cdots, f^m)$ les composantes de f et choisissons une carte locale $x : \mathcal{O}'_{\mathrm{M}} \longrightarrow U$ sur un voisinage $\mathcal{O}'_{\mathrm{M}}$ de M. Par le théorème de la base incomplète, nous pouvons choisir k composantes de x, que, quitte à les renuméroter, nous pouvons noter $x^1, \cdots, x^k$ et telles que $(dx^1_{\mathrm{M}}, \cdots, dx^k_{\mathrm{M}}, df^{k+1}_{\mathrm{M}}, \cdots, df^m_{\mathrm{M}})$ soit de rang m. Nous pouvons alors appliquer le théorème d'inversion locale en ce point pour montrer que l'application $(x^1, \cdots, x^k, f^{k+1}, \cdots, f^m)$ est une carte locale qui satisfait les conditions de la définition 1.
(iii) Pour passer de la définition 1 à la définition 3, il suffit de restreindre x^{-1} à $x(\mathcal{O}_{\mathrm{M}}) \cap \Delta^k$ pour obtenir l'application ψ désirée.
(iv) Terminons en montrant comment passer de la définition 3 à la définition 1. Supposons que $\psi(0) = \mathrm{M}$. Soit y une carte locale sur un voisinage de M dans $\mathcal{M}$ et à valeur dans un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Considérons l'application $y \circ \psi$ (bien définie, quitte à remplacer ω par un ouvert plus petit si nécessaire). Cette application satisfait les mêmes propriétés que ψ. En particulier $d(y \circ \psi)_0$ est de rang k et nous pouvons donc trouver $m-k$ vecteurs $E_{k+1}, \cdots, E_m \in \mathbb{R}^m$ tels que $(\frac{\partial y \circ \psi}{\partial t^1}, \cdots, \frac{\partial y \circ \psi}{\partial t^k}, E_{k+1}, \cdots, E_m)$ soit une base de $\mathbb{R}^m$. Nous pouvons donc appliquer le théorème d'inversion locale pour en déduire que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \omega \times \mathbb{R}^{m-k} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (t^1, \cdots, t^m) & \longmapsto & y \circ \psi(t^1, \cdots, t^k) + E_{k+1} t^{k+1} + \cdots + E_m t^m \end{array}$$

est inversible sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$. Considérons l'application $x := \Phi^{-1} \circ y$, qui constitue une carte locale définie sur un voisinage $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$ de M dans $\mathcal{M}$ (bien définie, pourvu qu'on l'on choisisse $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$ suffisamment petit). Quitte à choisir $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$ encore plus petit, on peut supposer aussi que $x(\mathcal{O}_{\mathrm{M}}) = U_0 \times V_0$, où $U_0 \subset \mathbb{R}^k$ et $V_0 \subset \mathbb{R}^{m-k}$. Il est clair que $x^{-1}(U_0 \times \{0\})$ est contenu dans $\mathcal{S} \cap \mathcal{O}_{\mathrm{M}}$ (puisque la restriction de x^{-1} à $U_0 \times \{0\}$ coïncide avec ψ). Il reste à montrer que l'inclusion inverse, à savoir que l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathrm{M}} \cap \mathcal{S} \subset x^{-1}(U_0 \times \{0\})$ ou, de façon équivalente, $x(\mathcal{O}_{\mathrm{M}} \cap \mathcal{S}) \subset U_0 \times \{0\}$ peut être satisfaite si nous choisissons U_0 suffisament petit. Pour cela nous utilisons le fait que ψ est un homéomorphisme local vers

$\mathcal{S}$ et donc, en particulier, l'application inverse ψ^{-1} est continue. Cela implique qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}'_{\mathrm{M}}$ de M dans $\mathcal{M}$ tel que $\psi^{-1}(\mathcal{O}'_{\mathrm{M}} \cap \mathcal{S}) \subset U_0$, ce qui signifie que $\forall \mathrm{M}' \in \mathcal{O}'_{\mathrm{M}} \cap \mathcal{S}$, $\exists!(t^1, \cdots, t^k) \in U_0$ tel que $\psi(t^1, \cdots, t^k) = \mathrm{M}'$ et alors $x^{-1}(t^1, \cdots, t^k, 0, \cdots, 0) = \mathrm{M}'$. Donc $x(\mathrm{M}') = (t^1, \cdots, t^k, 0, \cdots, 0) \in U_0 \times \{0\}$. Il suffit donc de remplacer $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$ par $\mathcal{O}'_{\mathrm{M}}$ et $x(\mathcal{O}_{\mathrm{M}})$ par $x(\mathcal{O}'_{\mathrm{M}})$. □

Le diagramme suivant récapitule très schématiquement les liens entre les différentes applications de l'étape *(iv)* de la preuve :

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[d, "\psi"'] & \subset & \omega \times \mathbb{R}^{m-k} \arrow[dd, bend left, "\Phi"] \\
\mathcal{S} & \subset & \mathcal{M} \arrow[u, "x"'] \arrow[d, "y"'] \\
& & \mathbb{R}^m \arrow[uu, bend right, "\Phi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

2.2.2 Une tautologie importante

Toute sous-variété $\mathcal{S}$ d'une variété $\mathcal{M}$ est naturellement munie d'une structure de variété : il suffit par exemple de prendre les applications réciproques ψ^{-1} des paramétrisations locales de la troisième définition pour obtenir un système de cartes. L'application d'inclusion

$$\begin{array}{rccc} \iota_{\mathcal{S}} : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} \end{array}$$

est un objet idiot mais très utile pour clarifier certains raisonnements. Il s'agit non seulement d'une inclusion entre deux ensembles, mais aussi d'une application différentiable entre deux variétés. Sa différentielle en un point $\mathrm{M} \in \mathcal{S}$, $d(\iota_{\mathcal{S}})_{\mathrm{M}} : T_{\mathrm{M}}\mathcal{S} \longrightarrow T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$, est injective et permet, à travers l'abus de notation $T_{\mathrm{M}}\mathcal{S} \simeq d(\iota_{\mathcal{S}})_{\mathrm{M}}(T_{\mathrm{M}}\mathcal{S})$, d'identifier $T_{\mathrm{M}}\mathcal{S}$ avec un sous-espace vectoriel de $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$.

2.3 Semons les vecteurs et les covecteurs dans les champs

Définition 2.7 (champs de vecteurs) *Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle, un* champ de vecteur tangent *X sur $\mathcal{M}$ est la donnée, en chaque point M de $\mathcal{M}$, d'un vecteur $X(\mathrm{M}) \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$.*

On note $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs tangents sur $\mathcal{M}$.

En d'autres termes un champ de vecteur est analogue à une application définie sur $\mathcal{M}$ et à valeurs dans un espace vectoriel, à la nuance près que l'« espace d'arrivée » $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$ dépend, lui aussi, de M. Nous verrons plus loin la notion adéquate pour décrire un tel objet : celle de *fibré vectoriel* sur une variété.

En général on suppose que $X(\mathrm{M})$ *dépend de façon régulière (continue, $\mathcal{C}^\ell$, etc.) de* M. Mais une telle notion nécessite des précautions. Pour cela, on se place sur un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ sur lequel est définie une carte $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$. Il existe alors un moyen naturel pour représenter la restriction sur $\mathcal{O}$ du champ de vecteur X, par une application de U vers $\mathbb{R}^n$ que nous noterons x_*X (un champ de vecteur sur U). Pour définir la valeur de x_*X en un point $t \in U$, prenons l'unique $\text{M} \in \mathcal{O}$ tel que $x(\text{M}) = t$. On définit alors $(x_*X)(t)$ comme étant l'image par dx_{M} de $X(\text{M}) \in T_{\text{M}}\mathcal{M}$. Autrement, x_*X est caractérisé par l'une des deux propriétés (équivalentes) suivantes :

$$\forall \text{M} \in \mathcal{O}, \quad (x_*X)(x(\text{M})) = dx_{\text{M}}(X(\text{M})),$$

ou

$$\forall t \in U, \quad (x_*X)(t) = dx_{x^{-1}(t)}(X(x^{-1}(t)).$$

A présent il est possible de demander que le champ de vecteur X soit de classe $\mathcal{C}^\ell$: il suffit pour cela de supposer que, pour toute carte locale $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$, on ait $x_*X \in \mathcal{C}^\ell(U, \mathbb{R}^m)$. Mais, attention ! cela n'a de sens que si la variété est de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq \ell + 1$, car sinon, on obtiendrait des contradictions en passant d'une carte à l'autre (puisque une application de recollement φ est de classe $\mathcal{C}^k$ et que, par conséquent, sa différentielle $d\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$).

Nous pouvons alors définir, de façon analogue aux champs de vecteurs, des champs de formes p-multilinéaires alternées sur $\mathcal{M}$, que nous désignerons par **p-formes différentielles sur $\mathcal{M}$**.

Définition 2.8 (p-formes différentielles) *Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle, une p-forme différentielle α sur $\mathcal{M}$ est la donnée, en chaque point* M *de $\mathcal{M}$, d'une p-forme $\alpha_{\text{M}} \in \Lambda^p T^*_{\text{M}}\mathcal{M}$.*

On note $\Omega^p(\mathcal{M})$ l'espace vectoriel des p-formes différentielles sur $\mathcal{M}$.

Comme pour les champs de vecteurs, nous pouvons préciser avec quelle continuité ou avec quelle régularité la p-forme α_{M} varie en fonction de M. Nous devons pour cela « transporter » α en une p-forme sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ en utilisant une carte locale. Soit $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ une telle carte, nous définissons $(x^{-1})^*\alpha \in \Omega^p(U)$ par : $\forall t \in U$, $\forall \xi_1, \cdots, \xi_p \in \mathbb{R}^m$,

$$\left((x^{-1})^*\alpha\right)_t (\xi_1, \cdots, \xi_p) = \alpha_{x^{-1}(t)} \left((dx_{x^{-1}(t)})^{-1}(\xi_1), \cdots, (dx_{x^{-1}(t)})^{-1}(\xi_p)\right),$$

(où l'on peut écrire aussi $(dx_{x^{-1}(t)})^{-1} = d(x^{-1})_t$) ou, de façon équivalente,

$$\forall \text{M} \in \mathcal{O}, \forall v_1, \cdots, v_p \in T_{\text{M}}\mathcal{M}, \quad \left((x^{-1})^*\alpha\right)_{x(\text{M})} (dx_{\text{M}}(v_1), \cdots, dx_{\text{M}}(v_1)) = \alpha_{\text{M}}(v_1, \cdots, v_p).$$

Et alors nous dirons que α est de classe $\mathcal{C}^\ell$ si, pour toute carte locale $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$, $(x^{-1})^*\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\ell$. A nouveau cette définition n'a de sens (pour $p \geq 1$) que si la variété $\mathcal{M}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $k \geq \ell + 1$ (le cas $p = 0$ est exceptionnel : $k \geq \ell$ suffit).

2.4 Fibrés vectoriels

Les ensembles :

$$T\mathcal{M} := \{(\text{M}, v) |\ \text{M} \in \mathcal{M}, v \in T_{\text{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\text{M} \in \mathcal{M}} T_{\text{M}}\mathcal{M},$$

$$T^*\mathcal{M} := \{(\mathrm{M},\alpha)|\ \mathrm{M}\in\mathcal{M},\alpha\in T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{M}} T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$$

et, pour $p\in\mathbb{N}$,

$$\Lambda^pT^*\mathcal{M} := \{(\mathrm{M},\alpha)|\ \mathrm{M}\in\mathcal{M},\alpha\in \Lambda^pT^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{M}} \Lambda^pT^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$$

peuvent être munis d'une structure de variété différentielle, dont la construction se déduit naturellement de la structure de variété de $\mathcal{M}$. Nous appellerons $T\mathcal{M}$ **le fibré tangent de** $\mathcal{M}$, $T^*\mathcal{M}$ **le fibré cotangent de** $\mathcal{M}$ et enfin $\Lambda^pT^*\mathcal{M}$, **le fibré des** p**-formes sur** $\mathcal{M}$. Noter que dans le cas $p=1$, on a $T^*\mathcal{M}=\Lambda^1T^*\mathcal{M}$.

En effet, supposons que $\mathcal{M}$ est une variété de classe $\mathcal{C}^k$ et soit $x:\mathcal{O}\longrightarrow U\subset\mathbb{R}^m$ une carte locale. Nous considérons d'abord l'exemple du fibré tangent. Notons

$$T_{\mathcal{O}}\mathcal{M} := \{(\mathrm{M},v)|\ \mathrm{M}\in\mathcal{O},v\in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{O}} T_{\mathrm{M}}\mathcal{M},$$

le sous-ensemble de $T\mathcal{M}$ qui est « au-dessus de » $\mathcal{O}$. Nous considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} Tx: & T_{\mathcal{O}}\mathcal{M} & \longrightarrow & U\times\mathbb{R}^m \\ & (\mathrm{M},v) & \longmapsto & (x(\mathrm{M}),dx_{\mathrm{M}}(v)). \end{array}$$

Il est alors facile de vérifier que Tx est une bijection (donc devient un homéomorphisme à partir du moment où l'on choisit sur $T_{\mathcal{O}}\mathcal{M}$ une topologie qui rend cette application continue). Mais, en plus, en partant d'un atlas $(\mathcal{O}_i,x_i)_{i\in I}$ sur $\mathcal{M}$, on peut construire ainsi un *atlas* $(T_{\mathcal{O}_i}\mathcal{M},Tx_i)_{i\in I}$ sur $T\mathcal{M}$, dont les applications de recollement sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ (exercice : le vérifier !). Ainsi $T\mathcal{M}$ possède une structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Nous pouvons faire de même avec le fibré cotangent $T^*\mathcal{M}$: nous construisons à partir de la carte x l'application définie sur

$$T^*_{\mathcal{O}}\mathcal{M} := \{(\mathrm{M},\alpha)|\ \mathrm{M}\in\mathcal{O},\alpha\in T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{O}} T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$$

par

$$\begin{array}{rccc} T^*x: & T^*_{\mathcal{O}}\mathcal{M} & \longrightarrow & U\times(\mathbb{R}^m)^* \\ & (\mathrm{M},\alpha) & \longmapsto & \big(x(\mathrm{M}),\alpha_{\mathrm{M}}\circ(dx_{\mathrm{M}})^{-1}\big). \end{array}$$

Et nous pouvons donc construire de façon naturelle un atlas sur $T^*\mathcal{M}$ à partir d'un atlas sur $\mathcal{M}$ et munir ainsi $T^*\mathcal{M}$ d'une structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

De même en construisant une carte locale sur

$$\Lambda^pT^*_{\mathcal{O}}\mathcal{M} := \{(\mathrm{M},\alpha)|\ \mathrm{M}\in\mathcal{O},\alpha\in \Lambda^pT^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{\mathrm{M}\in\mathcal{O}} \Lambda^pT^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M},$$

nous pouvons démontrer que $\Lambda^pT^*\mathcal{M}$ est également une variété de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Par ailleurs pour, par exemple, le fibré tangent, nous pouvons définir une **projection**

$$\begin{array}{rccc} \pi : & T\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & (\mathrm{M}, v) & \longmapsto & \mathrm{M} \end{array}$$

L'image inverse par π d'un point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ est l'espace tangent $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$. De façon analogue, nous pouvons définir les projections $\pi : T^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ et $\pi : \Lambda^p T^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. A chaque fois, l'image inverse par π d'un point M est un espace vectoriel, que nous appellerons **fibre** de la projection.

Ces constructions sont des exemples de fibrés vectoriels :

Définition 2.9 (fibré vectoriel) *Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle de dimension m et soit V un espace vectoriel de dimension $k \in \mathbb{N}$. Un* fibré vectoriel $\mathcal{F}$ au-dessus de $\mathcal{M}$ et de fibre type V *est une variété $\mathcal{F}$ munie d'une application différentiable $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{M}$, appelée **fibration** telle que*

- *pour tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, la* fibre $\mathcal{F}_{\mathrm{M}} := \pi^{-1}(\mathrm{M})$ *est un espace vectoriel isomorphe à V ;*
- *il existe un atlas $(\mathcal{F}_{\mathcal{O}_i}, \Phi_i)_{i\in I}$ où :*
  - *$(\mathcal{O}_i, x_i)_{i\in I}$ est un atlas de $\mathcal{M}$, c'est à dire : $\cup_{i\in I}\mathcal{O}_i = \mathcal{M}$ et pour tout $i \in I$, $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathcal{M}$, $x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i \subset \mathbb{R}^m$ est un homéomorphisme et les fonctions de recollement entre deux cartes x_i et x_j sont des difféomorphismes,*
  - *$\mathcal{F}_{\mathcal{O}_i} := \{(\mathrm{M}, f) |\ \mathrm{M} \in \mathcal{O}_i, f \in \mathcal{F}_{\mathrm{M}}\} \simeq \cup_{\mathrm{M}\in\mathcal{O}_i}\mathcal{F}_{\mathrm{M}}$,*
  - *pour tout $i \in I$,*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_i : & \mathcal{F}_{\mathcal{O}_i} & \longrightarrow & U_i \times V \\ & (\mathrm{M}, f) & \longmapsto & (x_i(\mathrm{M}), A_i(\mathrm{M})(f)), \end{array}$$

où, $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{O}_i$, $A_i(\mathrm{M})$ est une application linéaire inversible de $\mathcal{F}_{\mathrm{M}}$ vers V, i.e. un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque — On appelle *rang du fibré vectoriel* la dimension k de ses fibres.

Grossièrement on peut voir un fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}$ et de fibre type V comme une variété qui ressemblerait *localement* au produit $\mathcal{M} \times V$, mais qui ne serait pas globalement difféomorphe (c'est à dire équivalente par un difféomorphisme) à ce produit. A ce propos, mentionnons que $\mathcal{M} \times V$ est un exemple de fibré, que l'on qualifie de *trivial*.

Définition 2.10 (section d'un fibré vectoriel) *Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}$ et de fibre type V et notons $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{M}$ la fibration associée. Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$ une partie de $\mathcal{M}$ (un ouvert, une sous-variété...). Une* section σ de $\mathcal{F}$ au dessus de $\mathcal{P}$ *est une application $\sigma : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$ telle que l'application composée $\pi \circ \sigma$ coïncide avec l'application identité de $\mathcal{P}$ dans lui-même.*

On note $\Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ au dessus de $\mathcal{P}$.

Autrement dit, si $\mathrm{M} \in \mathcal{P}$, $\sigma(\mathrm{M}) = (\mathrm{M}, \widetilde{\sigma}(\mathrm{M}))$, où $\widetilde{\sigma}(\mathrm{M}) \in \mathcal{F}_{\mathrm{M}}$. Par abus de langage nous noterons $\sigma(\mathrm{M}) = \widetilde{\sigma}(\mathrm{M}) \in \mathcal{F}_{\mathrm{M}}$.

Notons également qu'une section du fibré trivial $\mathcal{M} \times V$ au dessus de $\mathcal{M}$ est une application de la forme $\sigma(\mathrm{M}) = (\mathrm{M}, s(\mathrm{M}))$, où s est une application de $\mathcal{M}$ vers V.

Expression en coordonnées locales
Si σ est une section de $\mathcal{F}$ au dessus de $\mathcal{M}$ et si $\Phi : \mathcal{F}_{\mathcal{O}} \longrightarrow U \times V$ est une carte locale avec $\Phi(\mathrm{M}, f) = (x(\mathrm{M}), A(\mathrm{M})(f))$, nous pouvons représenter σ grâce à une application $s : U \longrightarrow V$ telle que

$$\forall t \in U, \quad (t, s(t)) = \Phi \circ \sigma \circ x^{-1}(t).$$

Ce qui revient à dire que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "x"] & \mathcal{F} \arrow[d, "\Phi"] \\ U \arrow[r, "1\times s"] & U \times V \end{tikzcd}$$

est commutatif. Autrement dit : $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{O}$, $s(x(\mathrm{M})) = A(\mathrm{M})(\sigma(\mathrm{M}))$.

En guise de conclusion et pour faire le lien avec le paragraphe précédent, nous aurions pu définir un champ de vecteur tangent sur $\mathcal{M}$ comme étant une section du fibré tangent $T\mathcal{M}$, i.e. $\mathcal{X}(\mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$. De même une p-forme différentielle sur $\mathcal{M}$ est une section de $\Lambda^p T^*\mathcal{M}$, i.e. $\Omega^p(\mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^p T^*\mathcal{M})$.

2.5 A propos des notations

Comme nous avons vu au §2.1.2, si $x = (x^1 \cdots, x^m) : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ est une carte locale, en chaque point $\mathrm{M} \in \mathcal{O}$, les différentielles des fonctions coordonnées $x^1, \cdots, x^m$ constituent une base $(dx^1, \cdots, dx^m)$ de $T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$. De même et comme au paragraphe 1.2.3, nous noterons

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(\mathrm{M}), \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}(\mathrm{M})\right) \quad \text{ou, plus simplement,} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$$

la base de $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$ qui est duale de $(dx^1, \cdots, dx^m)$, c'est à dire telle $dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$, pour tous les entiers i et j tels que $1 \leq i, j \leq m$. (Rappelons que le *symbole de Kronecker* δ^i_j vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.) Cette notation, où les vecteurs sont notés comme des opérateurs différentiels, peut se justifier par le fait que l'espace tangent admet une autre définition, équivalente à la première :

Théorème 2.2 *Soit $\mathcal{S}$ une variété différentielle et $\mathrm{M} \in \mathcal{S}$. Soit $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{M}$ vers $\mathbb{R}$. L'espace tangent à $\mathcal{M}$ en M s'identifie canoniquement à l'ensemble des dérivations agissant sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ au point M, c'est à dire à l'ensemble des applications linéaires $D : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfont la règle de Leibniz : $\forall f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$,*

$$D(f\,g) = (Df)g(\mathrm{M}) + f(\mathrm{M})(Dg) \tag{19}$$

Démonstration — Ce résultat généralise la Proposition 1.5. Dans un sens, il est relativement facile : à tout $v \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$, on associe l'opérateur différentiel $D_v : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \ni f \longmapsto D_v f := df_{\mathrm{M}}(v) \in \mathbb{R}$. On vérifie alors sans peine que D_v satisfait (19).

Réciproquement, soit $\mathrm{M}_0 \in \mathcal{M}$ et soit $D : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ un opérateur linéaire satisfaisant $D(fg) = f(\mathrm{M}_0)Dg + g(\mathrm{M}_0)Df$, $\forall f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$.

Première étape : Localisation, ou comment se ramener à un un opérateur L agissant sur des fonctions définies sur un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ — Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ un ouvert contenant M_0 et soit $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ une carte locale. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x(\mathrm{M}_0) = 0$. Soit $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$ une fonction égale à 1 en dehors d'un compact contenu dans $\mathcal{O}$ et telle que $\psi(\mathrm{M}_0) = 0$ et soit $\chi := 1 - \psi^2 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$ (alors χ s'annule en dehors d'un compact contenu dans $\mathcal{O}$). Calculons $D\chi$. En remarquant que $D1 = 0$ (cf. Proposition 1.5), on obtient $D\chi = D1 - 2\psi(\mathrm{M}_0)D\psi = 0$. De plus $\chi(\mathrm{M}_0) = 1$. De ces deux propriétés, nous déduisons que, pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$,

$$D(\chi f) = (D\chi)f(\mathrm{M}_0) + \chi(\mathrm{M}_0)Df = 0 + 1 \cdot Df = Df. \tag{20}$$

Introduisons l'opérateur d'extension $E : \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$ qui, à toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$, associe la fonction $E(f) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$ qui coïncide avec χf sur $\mathcal{O}$ et qui s'annule sur $\mathcal{M} \setminus \mathcal{O}$. Nous définissons également l'opérateur de restriction

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathcal{C}^1(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) \\ & f & \longmapsto & f|_{\mathcal{O}} \end{array}$$

Considérons l'opérateur $L : \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $L = D \circ E$. Nous avons alors les deux propriétés suivantes :

$$L \circ R = D \tag{21}$$

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}), \quad L(fg) = (Lf)g(\mathrm{M}_0) + f(\mathrm{M}_0)Lg. \tag{22}$$

Pour montrer (21), nous déduisons des définitions que, pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$, $L \circ R(f) = D \circ E \circ R(f) = D(\chi f)$ et donc $L \circ R(f) = Df$, en vertu de (20). Pour montrer (22), observons d'abord que $\chi E(fg) = E(f)E(g)$ et donc, en utilisant (20),

$$\begin{array}{rcl} L(fg) & = & D[E(fg)] = D[\chi E(fg)] = D[E(f)E(g)] \\ & = & E(f)(\mathrm{M}_0)D[E(g)] + D[E(f)]E(g)(\mathrm{M}_0) \\ & = & f(\mathrm{M}_0)(Lg) + (Lf)g(\mathrm{M}_0). \end{array}$$

Ainsi L satisfait la même propriété que D.

Deuxième étape : Le résultat pour L — Soit $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ une carte locale telle que $x(\mathrm{M}_0) = 0$ et soit $\Lambda : \mathcal{C}^\infty(x(\mathcal{O})) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $\Lambda(\varphi) = L(\varphi \circ x)$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(x(\mathcal{O}))$. Alors $\Lambda(\varphi\psi) = \varphi(0)\Lambda(\psi) + \psi(0)\Lambda(\varphi)$. On peut donc utiliser le résultat de la Proposition 1.5 à Λ. On en déduit qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}^m$ tel que $\Lambda(\varphi) = d\varphi_0(\xi)$. Donc $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, $L(f) = \Lambda(f \circ x^{-1}) = d(f \circ x^{-1})_0(\xi) = df_{\mathrm{M}_0}(v)$, où $v := dx^{-1}{}_0(\xi) \in T_{\mathrm{M}_0}\mathcal{M}$. Donc, par (21), $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $D(f) = L(R(f)) = d(R(f))_{\mathrm{M}_0}(v) = df_{\mathrm{M}_0}(v)$. $\square$

3 Opérations sur les formes différentielles

Nous allons voir quatre opérations qui jouent un rôle très important dans le calcul différentiel extérieur : *l'image inverse* par une application différentiable, *la différentielle extérieure*, *le produit intérieur* par un champ de vecteur et *l'intégration*. Pour simplifier la présentation et les notations, nous supposerons désormais que les formes différentielles considérées sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$, sauf mention contraire.

L'idée conductrice de ce qui suit est de voir l'espace des formes différentielles $\Omega^*(\mathcal{M}) = \oplus_{p=0}^m \Omega^p(\mathcal{M})$ sur une variété $\mathcal{M}$ comme une extension de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, puisque $\Omega^0(\mathcal{M}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. On peut enrichir ce point de vue d'une intuition géométrique, à condition d'imaginer qu'une variété n'est pas seulement un continuum de *points* M, mais qu'elle est également le support d'objets de la forme $(\mathrm{M}, v) \in T\mathcal{M}$, $(\mathrm{M}, v_1 \wedge v_2) \in \Lambda^2 T\mathcal{M}$, etc., où, par exemple, $\Lambda^2 T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$ (dont nous ne donnerons pas une définition précise ici) est l'espace engendré par les *produits extérieurs* $v_1 \wedge v_2$ de paires de vecteurs $(v_1, v_2) \in (T_{\mathrm{M}}\mathcal{M})^2$. On peut envisager $v_1 \wedge v_2$ comme étant un élément infinitésimal d'une surface orientée. Alors une p-forme peut être vue comme une fonction sur $\Lambda^p T\mathcal{M}$.

3.1 L'image inverse d'une forme différentielle

Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés, de dimensions quelconques (et différentes en général) et $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application régulière. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$, il existe une méthode naturelle pour fabriquer une autre fonction sur $\mathcal{M}$: la composer avec φ. On obtient ainsi :

$$f \circ \varphi : x \longmapsto f(\varphi(x)).$$

Nous allons étendre l'opération

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

en une opération

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \Omega^p(\mathcal{M}) \\ \alpha & \longmapsto & \varphi^*\alpha, \end{array}$$

pour tout $0 \leq p \leq n$. Nous appellerons **image inverse de α par φ** ou **tiré en arrière de α par φ** (nom peu élégant), ou encore **pull-back de α par φ** la forme $\varphi^*\alpha$.

Définition 3.1 (image inverse d'une p-forme) *Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application régulière et soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$. L'image inverse de α par φ est la p-forme $\varphi^*\alpha$ définie par :*

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}, \forall v_1, \cdots, v_p \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}, \quad (\varphi^*\alpha)_{\mathrm{M}}(v_1, \cdots, v_p) = \alpha_{\varphi(\mathrm{M})}(d\varphi_{\mathrm{M}}(v_1), \cdots, d\varphi_{\mathrm{M}}(v_p)).$$

Observons que, de façon immédiate, $\varphi^*\alpha$ est bien automatiquement p-multilinéaire et alternée et

$$\forall f \in \Omega^0(\mathcal{N}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}), \quad \varphi^* f = f \circ \varphi. \tag{23}$$

Une autre remarque importante : après les 0-formes (qui sont des fonctions) les exemples de formes différentielles les plus simples sont les différentielles de fonctions. En effet, comme nous l'avons vu au §2.1.2, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$ et en tout point $\text{N} \in \mathcal{N}$, la différentielle df_{N} est un élément de $T^*_{\text{N}}\mathcal{N}$. Ainsi nous pouvons voir de façon naturelle df comme une section régulière de $T^*\mathcal{N}$, c'est à dire $df \in \Omega^1(\mathcal{N})$. Quelle est l'image inverse de df par $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$? d'après la définition, elle est caractérisée par :

$$\forall \text{M} \in \mathcal{M}, \forall v \in T_{\text{M}}\mathcal{M}, \quad (\varphi^*(df))_{\text{M}}(v) = df_{\varphi(\text{M})}(d\varphi_{\text{M}}(v)) = \left(df_{\varphi(\text{M})} \circ d\varphi_{\text{M}}\right)(v).$$

On voit donc que, d'après la règle de dérivation d'une fonction composée, $(\varphi^*(df))_{\text{M}}$ s'identifie à $\left(df_{\varphi(\text{M})} \circ d\varphi_{\text{M}}\right) = d(f \circ \varphi)_{\text{M}}$. Donc, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$,

$$\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^* f). \tag{24}$$

Enfin l'opération d'image inverse est compatible avec le produit extérieur des formes différentielles :

Proposition 3.1 *Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application régulière et soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ et $\beta \in \Omega^q(\mathcal{M})$ (pour $1 \leq p, q \leq m$). Alors*

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta). \tag{25}$$

Preuve — exercice. □

En fait les propriétés (23), (24) et (25) *caractérisent complètement l'image inverse des formes différentielles*, c'est à dire que l'on aurait pu adopter une autre définition de $\alpha \longmapsto \varphi^*\alpha$ qui serait

Définition 3.2 (image inverse d'une p-forme, variante) *Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application régulière. Alors l'opérateur d'image inverse par φ l'unique opérateur linéaire*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \Omega^p(\mathcal{M}) \\ f & \longmapsto & \varphi^* f, \end{array}$$

qui satisfait les relations (23), (24) et (25).

Cete dernière définition repose sur une caractérisation algébrique : φ^* est le *morphisme* de $(\Omega^*(\mathcal{N}), +, \wedge)$ vers $(\Omega^*(\mathcal{M}), +, \wedge)$ (au sens où (25) est vérifié) dont l'action sur les fonctions et sur les différentielles de fonctions sont données respectivement par (23) et (24).

Exercice 3.1 *Montrer l'équivalence des deux définitions. Pour cela, on utilisera que, étant donnée une carte locale $y : \mathcal{N} \supset \mathcal{O} \longrightarrow U$, la restriction d'une p-forme $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$ sur $\mathcal{O}$ peut s'écrire $\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} \alpha_{j_1 \cdots j_p} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_p}$, où $\alpha_{j_1 \cdots j_p} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$.*

Comment calculer, en pratique, l'image inverse d'une p-forme ?
Soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$ et $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application régulière. Nous pouvons appliquer une des deux définitions (3.1 ou 3.2) dont nous disposons pour définir l'image inverse $\varphi^*\alpha$. Utiliser la première revient à tester la valeur de $\varphi^*\alpha$ en un point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ et avec des vecteurs $v_1, \cdots, v_p \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$.

Exercice 3.2 *Montrer en utilisant la définition 3.1 que, si α a l'expression :*

$$\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} \alpha_{j_1 \cdots j_p} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_p}$$

dans une carte locale $y = (y^1, \cdots, y^n) : \mathcal{N} \supset \mathcal{O} \longrightarrow U$, alors $\varphi^*\alpha$ a l'expression suivante dans $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$:

$$(\varphi^*\alpha)_{\mathrm{M}} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} \alpha_{j_1 \cdots j_p}(\varphi(\mathrm{M})) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^{j_1}}{\partial x^{i_1}}(\mathrm{M}) & \cdots & \frac{\partial \varphi^{j_1}}{\partial x^{i_p}}(\mathrm{M}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{j_p}}{\partial x^{i_1}}(\mathrm{M}) & \cdots & \frac{\partial \varphi^{j_p}}{\partial x^{i_p}}(\mathrm{M}) \end{vmatrix} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, \tag{26}$$

où l'on utilise une carte locale $x = (x^1, \cdots, x^m)$ sur $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$ et l'on note $\varphi^j := y^j \circ \varphi$. Il est important dans ce calcul d'utiliser la multi-linéarité et la l'alternance de α (indication : commencer par $p = 1$, puis $p = 2$).

La deuxième définition (3.2) permet de faire le même calcul sans avoir besoin de tester la valeur de $\varphi^*\alpha$ avec des vecteurs $v_1, \cdots, v_p \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$, mais en utilisant (23), (24) et (25). En pratique, cela donne des calculs plus courts : en utilisant d'abord (25) et (23), on a

$$\varphi^*\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} (\alpha_{j_1 \cdots j_p} \circ \varphi)(\varphi^* dy^{j_1}) \wedge \cdots \wedge (\varphi^* dy^{j_p}),$$

puis, en utilisant (24), qui entraîne notamment $\varphi^* dy^j = d(\varphi^* y^j) = d(y^j \circ \varphi) = d\varphi^j$, on obtient

$$\varphi^*\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} (\alpha_{j_1 \cdots j_p} \circ \varphi) d\varphi^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{j_p}.$$

Il ne reste plus alors qu'à développer $d\varphi^j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} dx^i$ et utiliser le fait que le produit extérieur est alterné pour retrouver (26).

3.2 Restriction d'une forme différentielle à une sous-variété

Considérons une variété $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$ une sous-variété de $\mathcal{M}$. Grâce à l'application d'inclusion $\iota_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M}$ introduite au §2.2.2 nous pouvons étendre l'opération de restriction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}) \\ f & \longmapsto & f|_{\mathcal{S}} = f \circ \iota_{\mathcal{S}} \end{array}$$

en une application $\Omega^\bullet(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{S})$.

Définition 3.3 *Soit $\mathcal{M}$ une variété et $\mathcal{S}$ une sous-variété de $\mathcal{M}$. Soit $\alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{M})$, alors la restriction de α à $\mathcal{S}$ est $\alpha|_\mathcal{S} := (\iota_\mathcal{S})^*\alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{S})$.*

Il sera utile dans la suite de disposer de plusieurs critères pour reconnaître quand la restriction d'une forme sur une sous-variété s'annule ou ne s'annule pas. C'est le but du résultat qui suit.

Proposition 3.2 *Soit $\mathcal{M}$ une variété et $\mathcal{S}$ une sous-variété de $\mathcal{M}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $\alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{M})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes entre elles.*

(i) $(\iota_\mathcal{S})^*\alpha = 0$ *;*

(ii) $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{S}$, $\forall v_1, \cdots, v_p \in T_\mathrm{M}\mathcal{S}$, $\alpha_\mathrm{M}(v_1, \cdots, v_p) = 0$ *;*

(iii) $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{S}$, *il existe un voisinage* $\mathcal{O}_\mathrm{M}$ *de* M *dans* $\mathcal{S}$ *et une carte locale* x *sur* $\mathcal{O}_\mathrm{M}$ *telle que* $(x^{-1})^*\alpha = 0$ *;*

(iv) pour toute application u *à valeurs dans* $\mathcal{M}$ *dont l'image est contenue dans* $\mathcal{S}$, $u^*\alpha = 0$.

Démonstration — L'équivalence entre (i) et (ii) est une conséquence immédiate de la définition de $(\iota_\mathcal{S})^*\alpha$, pourvu qu'on ait à l'esprit l'abus de notation $T_\mathrm{M}\mathcal{S} \simeq d(\iota_\mathcal{S})_\mathrm{M}(T_\mathrm{M}\mathcal{S})$, qui conduit à l'identification :

$$\alpha_\mathrm{M}(v_1, \cdots, v_p) \simeq \alpha_{\iota_\mathcal{S}(\mathrm{M})}(d(\iota_\mathcal{S})_\mathrm{M}(v_1), \cdots, d(\iota_\mathcal{S})_\mathrm{M}(v_p)) = ((\iota_\mathcal{S})^*\alpha)_\mathrm{M}(v_1, \cdots, v_p).$$

(i) entraîne (iii) simplement parce qu'il faut comprendre que (iii) signifie que $(\iota_\mathcal{S} \circ x^{-1})^*\alpha = 0$ et parce que $(\iota_\mathcal{S} \circ x^{-1})^*\alpha = (x^{-1})^*(\iota_\mathcal{S})^*\alpha$. Pour la même raison (i) entraîne (iv) : en effet, si l'image de u est contenue dans $\mathcal{S}$, alors il existe v à valeurs dans $\mathcal{S}$ tel que $u = \iota_\mathcal{S} \circ v$ et $u^*\alpha = v^*(\iota_\mathcal{S})^*\alpha$.
(iii) entraîne (ii) car $\alpha_\mathrm{M}(v_1, \cdots, v_p) = ((x^{-1})^*\alpha)_{x(\mathrm{M})}(dx_\mathrm{M}(v_1), \cdots, dx_\mathrm{M}(v_p))$.
Enfin (iv) implique (iii) puisqu'il suffit d'appliquer (iv) avec $u = x^{-1}$. □

3.3 Image directe d'un champ de vecteur

Nous donnons la définition de l'image directe d'un champ de vecteur sur une variété par un difféomorphisme. Au passage soulignons que, pour définir l'image directe d'un champ de vecteur, *on doit impérativement utiliser un difféomorphisme*[4]. En revanche, il est possible de définir l'image inverse d'une p-forme par n'importe quelle application, du moment qu'elle soit régulière (noter que, en particulier, nous n'avons même pas besoin que les dimensions de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ soient les mêmes pour l'image inverse d'une forme).

Définition 3.4 (image directe d'un champ de vecteur) *Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un* ***difféomorphisme****. Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur. Alors l'image directe de X par φ est le champ de vecteur $\varphi_*X \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ défini par*

$$\forall \mathrm{N} \in \mathcal{N}, \quad (\varphi_*X)(\mathrm{N}) := d\varphi_{\varphi^{-1}(\mathrm{N})}(X(\varphi^{-1}(\mathrm{N}))),$$

4. ou, à défaut, un plongement, c'est à dire une application, mais alors l'image du champ de vecteur est défini uniquement sur l'image du plongement, c'est à dire sur une sous-variété.

ou encore

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}, \quad (\varphi_* X)(\varphi(\mathrm{M})) := d\varphi_{\mathrm{M}}(X(\mathrm{M})).$$

Les opérations d'images directes pour les champs de vecteur et d'images inverses pour les formes sont liées, comme il apparaît dans le résultat suivant.

Proposition 3.3 *Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un **difféomorphisme**, soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$ et soit $X_1, \cdots, X_p \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ des champs de vecteur. Alors*

$$[\alpha(\varphi_* X_1, \cdots, \varphi_* X_p)] \circ \varphi = (\varphi^* \alpha)(X_1, \cdots, X_p). \tag{27}$$

Démonstration — Il suffit de calculer, pour tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, la valeur en M du terme de gauche :

$$\begin{array}{rcl} [\alpha(\varphi_* X_1, \cdots, \varphi_* X_p)] \circ \varphi(\mathrm{M}) & = & \alpha_{\varphi(\mathrm{M})}(\varphi_* X_1(\varphi(\mathrm{M})), \cdots, \varphi_* X_p(\varphi(\mathrm{M})) \\ & = & \alpha_{\varphi(\mathrm{M})}(d\varphi_{\mathrm{M}}(X_1(\mathrm{M}), \cdots, d\varphi_{\mathrm{M}}(X_1(\mathrm{M})) \\ & = & (\varphi^* \alpha)_{\mathrm{M}}(X_1(\mathrm{M}), \cdots, X_p(\mathrm{M})). \end{array}$$

□

En notant $\beta(Y_1, \cdots, Y_p) = \langle \beta, Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_p \rangle$ (façon de voir la valeur de ce nombre comme le produit de dualité entre un élément $\beta \in \Lambda^p V^*$ et un multivecteur $Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_p \in \Lambda^p V$), la relation (27) se lit $\langle \varphi^* \alpha, X_1 \wedge \cdots \wedge X_p \rangle = \langle \alpha, \varphi_* X_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_* X_p \rangle \circ \varphi$. Autrement dit le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\langle \varphi^* \alpha, X_1 \wedge \cdots \wedge X_p \rangle"] & \\ \mathcal{N} \arrow[r, "\langle \alpha, \varphi_* X_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_* X_p \rangle"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

3.4 La différentielle extérieure

Nous avons vu précédemment que, à toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \Omega^0(\mathcal{M})$, on peut associer la 1-forme $df \in \Omega^1(\mathcal{M})$ dont la valeur en chaque point M est df_{M}, la différentielle de f en M. Nous allons à présent étendre l'application

$$\begin{array}{rccc} d: & \Omega^0(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \Omega^1(\mathcal{M}) \\ & f & \longmapsto & df \end{array}$$

en une application $d : \Omega^*(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^*(\mathcal{M})$ appelée *différentielle extérieure*, qui applique $\Omega^p(\mathcal{M})$ sur $\Omega^{p+1}(\mathcal{M})$.

3.4.1 La différentielle extérieure sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$

Commençons par expliquer comment on construit cette application sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \Omega^p(U)$, alors, si

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le m} \alpha_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \sum_I \alpha_I dx^I,$$

sa différentielle extérieure est la $(p+1)$-forme $d\alpha \in \Omega^{p+1}(U)$ définie par

$$d\alpha := \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq m} d\alpha_{i_1\cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I, \tag{28}$$

où $d\alpha_{i_1\cdots i_p} = d\alpha_I$ est simplement la différentielle de la fonction α_I.

Peut-on étendre cette définition sur les variétés ? et si oui, comment ? Nous verrons plus loin que la réponse est positive : le point capital pour cela est de vérifier que cette définition est invariante par difféomorphisme, c'est à dire de montrer que : pour tout difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^m$ et pour toute p-forme $\alpha \in \Omega^p(V)$, si on calcule $d\alpha$ et $d(\varphi^*\alpha)$ en appliquant la relation (28) à α et $\varphi^*\alpha$, alors on a bien $\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha)$. Il se trouve que cela est vrai et est même la conséquence d'un résultat plus général, à savoir : la propriété $\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha)$ sera valable pour *n'importe quelle application différentiable* φ, sans qu'il soit nécessaire qu'elle soit un difféomorphisme.

En attendant voyons quelques propriétés fondamentales vérifiées par la différentielle extérieure, toujours sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Proposition 3.4 (règle de Leibniz graduée) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit $\alpha \in \Omega^p(U)$ et $\beta \in \Omega^q(U)$, alors*

$$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge d\beta. \tag{29}$$

Preuve — Ecrivons

$$\alpha = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq m} \alpha_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} = \sum_I \alpha_I dx^I$$

et

$$\beta = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_q\leq m} \beta_{j_1\cdots j_q} dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q} = \sum_J \beta_J dx^J.$$

Alors $\alpha\wedge\beta = \sum_I\sum_J \alpha_I\beta_J dx^I\wedge dx^J$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
d(\alpha\wedge\beta) &= \sum_I\sum_J d(\alpha_I\beta_J)\wedge dx^I\wedge dx^J \\
&= \textstyle\sum_I\sum_J \left((d\alpha_I)\beta_J\wedge dx^I\wedge dx^J\right) + \left(\alpha_I d\beta_J\wedge dx^I\wedge dx^J\right) \\
&= \left(\sum_I d\alpha_I\wedge dx^I\right)\wedge\left(\sum_J \beta_J dx^J\right) + \left(\sum_I \alpha_I dx^I\right)\wedge\left(\sum_J (-1)^p d\beta_J\wedge dx^J\right) \\
&= d\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge d\beta. \qquad \square
\end{aligned}$$

Théorème 3.1 ($dd = 0$) *Pour tout $\alpha \in \Omega^*(U)$, on a :*

$$d(d\alpha) = 0. \tag{30}$$

Preuve — Nous commençons par montrer (30) pour une 0-forme, c'est à dire pour une fonction : nous allons voir ce résultat est essentiellement le lemme de Schwarz sur les dérivées secondes. Soit $f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$. Alors

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum_{i_2=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^{i_2}} dx^{i_2}$$

et donc, en appliquant (28) :

$$d(df) = \sum_{i_2=1}^{m} d\left(\frac{\partial f}{\partial x^{i_2}}\right) \wedge dx^{i_2} = \sum_{i_2=1}^{m} \left(\sum_{i_1=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} dx^{i_1}\right) \wedge dx^{i_2} = \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}.$$

Mais comme d'une part, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_2} \partial x^{i_1}}$ et, d'autre part, $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} = -dx^{i_2} \wedge dx^{i_1}$, nous en déduisons que $d(df) = 0$.

Nous en déduisons à présent le résultat pour une forme de degré p quelconque. Soit $\alpha \in \Omega^p(U)$, alors on peut écrire $\alpha = \sum_I \alpha_I dx^I$, ce qui entraîne en utilisant (28) $d\alpha = \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I$, qui implique à son tour, en utilisant (29) :

$$d(d\alpha) = \sum_I d(d\alpha_I) \wedge dx^I - d\alpha_I \wedge d(dx^I).$$

Mais comme $d(d\alpha_I) = 0$, puisque α_I est une fonction et $d(dx^I) = d(1dx^I) = d(1) \wedge dx^I = 0$, en vertu de (28), on en conclut que $d(d\alpha) = 0$. □

3.4.2 Compatibilité entre la différentielle extérieure et l'image inverse

Nous pouvons maintenant démontrer [5] le résultat suivant :

Théorème 3.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\varphi : U \longrightarrow V$ une application régulière. Alors, pour toute p-forme $\alpha \in \Omega^p(V)$, on a*

$$d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha). \tag{31}$$

Preuve — Nous procédons en plusieurs étapes élémentaires :

(i) pour une 0-forme $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$: c'est tout simplement l'identité (24) déjà montrée au § précédent.

(ii) pour une 1-forme qui est la différentielle df d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Il s'agit d'une conséquence de

$$d\left(\varphi^*(df)\right) = 0 = \varphi^*(d(df)). \tag{32}$$

En effet, grâce à (24), c'est à dire $\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$, on peut réécrire le terme de gauche $d\left(\varphi^*(df)\right) = d\left(d\left(\varphi^* f\right)\right)$. Les deux termes dans (32) sont donc nuls à cause de (30).

5. En réalité il possible de montrer le théorème 3.2 directement, mais au prix de calculs assez lourds et compliqués. En revanche nous allons voir que, une fois que l'on a établi (29) et (30), cela devient beaucoup plus simple, grâce aussi à (23), (24) et (25).

(iii) Soit $y = (y^1, \cdots, y^n)$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^n \supset V$. L'identité (32) est vraie en particulier pour $f = y^j$ $(1 \leq j \leq n)$, i.e. $d(\varphi^* dy^j) = 0$. Donc, en utilisant (25) et (29), on en déduit que

$$\begin{aligned} d\left(\varphi^*\left(dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_p}\right)\right) &= d\left(\left(\varphi^* dy^{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\varphi^* dy^{j_p}\right)\right) \\ &= \textstyle\sum_{a=1}^{p}(-1)^{a-1}\left(\varphi^* dy^{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\varphi^* dy^{j_a}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\varphi^* dy^{j_p}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iv) Nous pouvons enfin montrer (31) pour une forme $\alpha \in \Omega^p(V)$ quelconque Nous partons de la décomposition $\alpha = \sum_J \alpha_J dy^J$, où, pour $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$, $J = (j_1, \cdots, j_p)$ et $dy^J = dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_p}$. Alors, en vertu de (25),

$$\varphi^*\alpha = \varphi^*\left(\sum_J \alpha_J dy^J\right) = \sum_J (\alpha_J \circ \varphi)\varphi^* dy^J$$

et donc, en utilisant (29), puis les étapes (i) et (iii),

$$\begin{aligned} d(\varphi^*(d\alpha)) &= \textstyle\sum_J d(\alpha_J \circ \varphi) \wedge \varphi^* dy^J + (\alpha_J \circ \varphi) d(\varphi^* dy^J) \\ &= \textstyle\sum_J \varphi^*(d\alpha_J) \wedge \varphi^* dy^J = \varphi^*(d\alpha). \qquad \square \end{aligned}$$

3.4.3 La différentielle extérieure sur une variété

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition de la différentielle extérieure sur une variété.

Définition 3.5 (différentielle extérieure) *Soit $\mathcal{M}$ une variété, la* différentielle extérieure *est l'opérateur $d : \Omega^*(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^*(\mathcal{M})$ tel que, pour toute p-forme $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ et pour toute carte locale $x : \mathcal{O} \longrightarrow U$, si on a $\alpha = \sum_I \alpha_I dx^I$ sur $\mathcal{O}$, alors*

$$d\alpha = \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I \quad \text{sur } \mathcal{O}. \tag{33}$$

En effet, en appliquant le théorème 3.2 aux fonctions de recollement entre deux cartes d'un atlas sur $\mathcal{M}$, on vérifie aisément que cette définition est cohérente.

Enfin notons que la définition (33) peut se retrouver en utilisant que la différentielle extérieure coïncide avec la différentielle des fonctions, que, pour toute fonction $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$, $d(df) = 0$ et enfin la règle de Leibniz graduée (29). D'où une autre définition, plus intrinsèque.

Définition 3.6 (différentielle extérieure (variante)) *Soit $\mathcal{M}$ une variété, il existe un unique opérateur linéaire $d : \Omega^*(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^*(\mathcal{M})$, appelé* différentielle extérieure, *qui envoie $\Omega^p(\mathcal{M})$ sur $\Omega^{p+1}(\mathcal{M})$ et qui satisfait les conditions suivantes :*

(i) pour toute fonction $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$, df est la différentielle de f ;

(ii) pour toute fonction $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$, $d(df) = 0$;

(iii) $\forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$, $\forall \beta \in \Omega^q(\mathcal{M})$, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.

Alors toutes les propriétés satisfaites par la différentielle extérieure sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ s'étendent sans difficultés à une variété.

Théorème 3.3 *Sur une variété $\mathcal{M}$, la différentielle extérieure satisfait les propriétés suivantes :*

$$\forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M}), \quad d(d\alpha) = 0,$$
$$\forall \varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}, \forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{N}), \quad d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha).$$

Pour terminer, un peu de terminologie :

Définition 3.7 *Une forme $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{M})$ est dite* ***fermée*** *si $d\alpha = 0$. Une forme $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{M})$ est dite* ***exacte*** *si il existe une forme $\beta \in \Omega^*(\mathcal{M})$ telle que $\alpha = d\beta$.*

Le théorème 3.1 (et sa généralisation sur les variétés formulée au théorème 3.3) peut donc se reformuler ainsi : **toute forme extérieure exacte est fermée**. On peut se demander si la réciproque est vraie : elle l'est localement (il s'agit du lemme de Poincaré, voir Section 3.7), mais non globalement en général.

3.4.4 Exemples et exercices

Exercice 3.3 *Soit E un espace vectoriel euclidien et orienté de dimension $m = 3$ et un U un ouvert de E. On associe à tout $\alpha \in \Lambda^1 E^*$ un unique vecteur V tel que $\forall \xi \in E$, $\alpha(\xi) = \langle V, \xi \rangle$; à tout $\alpha \in \Lambda^2 E^*$, un unique vecteur W tel que $\forall \xi, \eta \in E$, $\alpha(\xi, \eta) = det(W, \xi, \eta)$; enfin à tout $\alpha \in \Lambda^3 E^*$, un unique scalaire λ tel que $\forall \xi, \eta, \zeta \in E$, $\alpha(\xi, \eta, \zeta) = \lambda det(\xi, \eta, \zeta)$. Montrer qu'alors on peut identifier*

(i) $d : \Omega^0(U) \longrightarrow \Omega^1(U)$ avec l'opérateur gradient d'une fonction scalaire

(ii) $d : \Omega^1(U) \longrightarrow \Omega^2(U)$ avec l'opérateur rotationel d'un champ de vecteurs

(iii) $d : \Omega^2(U) \longrightarrow \Omega^3(U)$ avec l'opérateur divergence d'un champ de vecteurs.

Exercice 3.4 *Soit E un espace vectoriel euclidien et orienté de dimension $m = 3$ et un U un ouvert de E. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et pour tout champ de vecteur $V \in \mathcal{X}(U)$,*

$$\vec{rot}(\nabla f) = 0 \text{ et } div(\vec{rot} V) = 0.$$

3.4.5 Les équations de Maxwell

Ces équations gouvernent le comportement des champs électrique et magnétique, en présence de charges électriques distribuées dans l'espace, en fonction du temps. Soit $\vec{E}$ le champ électrique et $\vec{B}$ le champ magnétique. A première vue, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ressemblent à des champs de vecteurs (à valeurs dans $\mathbb{R}^3$) définis sur l'espace–temps $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, qui sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & = & 0 \\ \\ \mathrm{div}\, \vec{B} & = & 0 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{B} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & = & \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \\ \mathrm{div}\, \vec{E} & = & 4\pi\rho, \end{array} \right.$$

où $\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la densité de charge électrique par unité de volume, $\vec{j} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est le vecteur densité de courant électrique et c est la vitesse de la lumière.

En fait il est plus naturel de considérer $\vec{E}$ et $\vec{B}$ comme les composantes d'une paire de 2-formes sur l'espace–temps $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, tandis que $\vec{j}$ et ρ sont les composantes d'une 3-forme sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Les 2-formes sont :

$$F := (E_1dx^1 + E_2dx^2 + E_3dx^3)\wedge cdt + (B_1dx^2\wedge dx^3 + B_2dx^3\wedge dx^1 + B_3dx^1\wedge dx^2),$$

et

$$\star F := -(B_1dx^1 + B_2dx^2 + B_3dx^3)\wedge cdt + (E_1dx^2\wedge dx^3 + E_2dx^3\wedge dx^1 + E_3dx^1\wedge dx^2).$$

La 3-forme est :

$$J := \rho dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 - (j_1dx^2\wedge dx^3 + j_2dx^3\wedge dx^1 + j_3dx^1\wedge dx^2)\wedge dt.$$

Exercice 3.5 *(i) Vérifier que le premier système des équations de Maxwell est équivalent à la relation $dF = 0$ et que le second système est équivalent à $d(\star F) = 4\pi J$.*

(ii) Appliquer le lemme de Poincaré (théorème 3.10) et en déduire qu'il existe une 1-forme A sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, telle que $F = dA$. Faites appel à vos souvenirs des physique et interprétez.

(iii) Appliquer le théorème 3.1 et trouver une équation que doivent satisfaire ρ et $\vec{j}$. Interpréter.

Ecrire les équations de Maxwell sous la forme $dF = 0$ et $d(\star F) = 4\pi J$ est non seulement plus concis, mais en plus, cela permet de calculer comment l'expression des coordonnées du champ électromagnétique change lorsque l'on passe d'un référentiel inertiel à un autre (par exemple les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne changent pas de la même façon que celles du vecteur vitesse d'une particule, ce qui invalide définitivement l'idée naïve selon laquelle $\vec{E}$ et $\vec{B}$ devraient être des « vecteurs »). Les transformations des coordonnées de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en fait obtenues en prenant l'image inverse de la 2-forme F par l'application de changement de coordonnées. L'identification de ces règles de transformation est importante : il y a plus d'un siècle, H.A. Lorentz et H. Poincaré ont déterminé — parmi tous les changements de coordonnées — ceux dans lesquels l'expression des équations de Maxwell n'est pas altérée [6]. La grande surprise a été de découvrir que les équations de Maxwell étaient invariantes sous l'action d'un groupe appelé maintenant *groupe de Poincaré* (extension du *groupe de Lorentz*), qui est différent du groupe d'invariance des équations de la mécanique de Newton (le *groupe de Galilée*). De cette contradiction (et aussi sur la base d'expériences sur la vitesse de la lumière) est née la théorie de la relativité restreinte, mécanique invariante sous l'action du groupe de Poincaré.

6. On peut dire ici que la forme des équations de Maxwell n'est pas altérée si et seulement si l'opérateur linéaire (dit de *Hodge*) qui permet de passer de F à $\star F$ est toujours le même.

3.5 Le produit intérieur par un champ de vecteur

3.5.1 Définitions

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle, $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur et $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ une p-forme. L'opération que nous allons définir consiste à « contracter » α et X en une $(p-1)$-forme : en tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, nous considérons l'application

$$(\iota_X\alpha)_{\mathrm{M}} \text{ ou } (X \lrcorner \alpha)_{\mathrm{M}} : \begin{array}{ccc} (T_{\mathrm{M}}\mathcal{M})^{p-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, \cdots, v_{p-1}) & \longmapsto & \alpha_{\mathrm{M}}(X(\mathrm{M}), v_1, \cdots, v_{p-1}) \end{array} \tag{34}$$

qui est clairement $(p-1)$-multilinéaire et alternée. Cette définition est juste une extension de celle, donnée en 1.4, du produit intérieur ponctuel.

Définition 3.8 (produit intérieur) *Pour toute p-forme $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ et pour tout champ de vecteur $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, on appelle* produit intérieur de α par X *et on note $X \lrcorner \alpha$ (ou parfois $\iota_X\alpha$) la $(p-1)$-forme sur $\mathcal{M}$ définie en chaque point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ par (34).*

Une conséquence immédiate de (6) est que le produit intérieur satisfait la *règle de Leibniz graduée* :

Proposition 3.5 *Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur. Alors, $\forall\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$, $\forall\beta \in \Omega^q(\mathcal{M})$,*

$$X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (X \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (X \lrcorner \beta). \tag{35}$$

Le résultat suivant indique comment se comporte le produit intérieur d'une forme différentielle lorsqu'on le tire en arrière par un difféomorphisme.

Proposition 3.6 *Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés différentielles et $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un difféomorphisme. Soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$ une p-forme et $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ un champ de vecteur. Alors*

$$\varphi^* (Y \lrcorner \alpha) = \left(\varphi^{-1}{}_* Y\right) \lrcorner \varphi^*\alpha. \tag{36}$$

Démonstration — D'après la Proposition 3.3, pour toute p-forme α définie sur $\mathcal{N}$, pour tout difféomorphisme $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ et pour toute famille $(X_1, \cdots, X_p)$ de champs de vecteur sur $\mathcal{M}$, nous avons :

$$\alpha(\varphi_* X_1, \varphi_* X_2 \cdots, \varphi_* X_p) \circ \varphi = (\varphi^*\alpha)(X_1, X_2, \cdots, X_p). \tag{37}$$

Posant $X_1 := \varphi^{-1}{}_* Y$, ce qui revient à $\varphi_* X_1 = Y$, cela se traduit par

$$(Y \lrcorner \alpha)(\varphi_* X_2 \cdots, \varphi_* X_p) \circ \varphi = \left((\varphi^{-1}{}_* Y) \lrcorner \varphi^*\alpha\right)(X_2, \cdots, X_p),$$

ce qui nous donne le résultat en appliquant (37) à $Y \lrcorner \alpha$. $\square$

3.5.2 Le flot d'un champ de vecteur et la dérivée de Lie

Les champs de vecteurs sont la traduction géométrique de systèmes dynamiques que l'on rencontre partout dans la physique et les sciences appliquées. L'évolution au cours du temps de ces systèmes est décrite par le flot du champ de vecteur. Nous rappelons ici l'essentiel de ce qu'il faut savoir là-dessus. Les détails et des preuves sont donnés dans la section **??** en fin de ce chapitre.

Un champ de vecteur $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ est naturellement associé à un problème dynamique, c'est à dire à l'équation d'évolution

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)), \tag{38}$$

où γ est une application régulière d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}$. L'ensemble des solutions de (38) est décrit par le couple $(\Delta_X, e^{\cdot X})$, où $\Delta_X \subset \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ et

$$\begin{array}{rccc} e^{\cdot X}: & \Delta_X & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & (t, \mathrm{M}) & \longmapsto & e^{tX}(\mathrm{M}), \end{array}$$

est caractérisée par : la « condition initiale »

$$e^{tX}(\mathrm{M})|_{t=0} = \mathrm{M}$$

et l'équation d'évolution

$$\frac{\partial e^{tX}(\mathrm{M})}{\partial t} = X\left(e^{tX}(\mathrm{M})\right).$$

L'**ensemble de vie** Δ_X est défini comme étant le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ sur lequel on puisse définir $e^{\cdot X}$. C'est un ouvert qui contient toujours un voisinage de $\{0\} \times \mathcal{M}$ (une façon de formuler le théorème d'existence locale de solutions à (38)). Dans le cas où $\Delta_X = \mathbb{R} \times \mathcal{M}$, c'est à dire si les solutions de (38) existent pour tout temps et pour toute condition initiale, on dit que le champ de vecteur X est **complet**.

Ainsi un champ de vecteur $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ permet de déformer des fonctions, des champs de vecteur et des p-formes différentielles : si $(t, \mathrm{M}) \in \Delta_X$, on choisit de « rapatrier » au point M la « valeur » que la fonction ou le champ de vecteur ou la p-forme prend en $e^{tX}(\mathrm{M})$. Cela donne,

- pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$: $f\left(e^{tX}(\mathrm{M})\right)$;
- pour une p-forme $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$: $\left(\left(e^{tX}\right)^* \alpha\right)_{\mathrm{M}}$ (noter que, pour $p = 0$ on retrouve la même chose que pour une fonction) ;
- pour un champ de vecteur $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$: $\left(\left(e^{-tX}\right)_* Y\right)_{\mathrm{M}}$ (on a utilisé ici l'inverse e^{-tX} de e^{tX} et la définition 3.4).

Cela nous amène à définir la **dérivée de Lie** comme la dérivée de ces objets en $t = 0$.

Définition 3.9 (dérivation de Lie) *Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur sur une variété. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ ou $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Nous définissons leur* dérivée de Lie *par rapport à X par*

$$L_X f := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f \circ e^{tX} - f\right], \tag{39}$$

$$L_X\alpha := \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\left(e^{tX}\right)^*\alpha - \alpha\right], \tag{40}$$

$$L_X Y := \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\left(e^{-tX}\right)_* Y - Y\right]. \tag{41}$$

Il existe des formules très utiles pour calculer chacune de ces dérivées. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, il est simple de montrer :

$$\mathrm{L}_X f = df(X) = X \lrcorner\, df = X^i\frac{\partial f}{\partial x^i} \quad \text{(le signe } \sum_{i=1}^{m} \text{ est sous-entendu).}$$

Si $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$, nous verrons au théorème 3.6 une formule qui permet de calculer $\mathrm{L}_X\alpha$. Enfin la dérivée de Lie d'un champ de vecteur par un autre est reliée à une autre notion, celle de crochet de Lie.

Proposition 3.7 *Soit $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ deux champs de vecteur. Alors le commutateur des opérateurs $L_X : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ et $L_Y : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ est un opérateur du même type, autrement dit il existe un champ de vecteur , noté $[X, Y]$ et appelé* crochet de Lie de X et de Y *tel que $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,*

$$L_X\left(L_Y f\right) - L_Y\left(L_X f\right) = L_{[X,Y]}f. \tag{42}$$

Dans des coordonnées locales $(x^1, \cdots, x^m)$, si $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ (le signe $\sum_{i=1}^m$ est ici sous-entendu), alors

$$[X, Y] = \left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Théorème 3.4 *Soit $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ deux champs de vecteur, alors leur crochet de Lie coïncide avec la dérivée de lie de Y par rapport à X :*

$$[X, Y] = L_X Y. \tag{43}$$

Pour la preuve, voir le Théorème **??**.

Un résultat fondamental à propos du crochet de Lie sur les champs de vecteur est le suivant.

Théorème 3.5 *Soient $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ deux champs de vecteur sur une variété $\mathcal{M}$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $[X, Y] = 0$ *;*

(ii) pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ et $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $e^{tX}\left(e^{sY}(\mathrm{M})\right)$ et $e^{sY}\left(e^{tX}(\mathrm{M})\right)$ existent, on a :

$$e^{tX}\left(e^{sY}(\mathrm{M})\right) = e^{sY}\left(e^{tX}(\mathrm{M})\right). \tag{44}$$

Autrement dit, en particulier, si $[X,Y]=0$, alors les flots de X et de Y commutent et on peut noter

$$e^{tX+sY}(\mathrm{M}) := e^{tX}\left(e^{sY}(\mathrm{M})\right) = e^{sY}\left(e^{tX}(\mathrm{M})\right)$$

sans ambiguité.

Preuve — Nous ne présentons que l'ébauche de la preuve. Des détails supplémentaires sont donnés au Théorème **??**. Le fait que (ii) entraîne (i) est la partie la plus facile : cela s'obtient en calculant la dérivée par rapport à s de (44) en $(t,s)=(t,0)$, puis en dérivant une deuxième fois par rapport à t en $t=0$. La réciproque demande un peu plus de travail. Elle repose sur deux résultats :

— montrer que, si $\Psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ est difféomorphisme, alors, pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $e^{tX}(\mathrm{M})$ existe, alors $e^{t\Psi_*X}(\Psi(\mathrm{M}))$ existe et on a :

$$\Psi\left(e^{tX}(\mathrm{M})\right) = e^{t\Psi_*X}(\Psi(\mathrm{M})). \tag{45}$$

Cela s'obtient en vérifiant que les deux membres de (45) sont solutions de la même équation différentielle $\frac{d\gamma}{dt}(t) = (\Psi_*X)(\gamma(t))$, avec la même condition initiale $\gamma(0) = \Psi(\mathrm{M})$.

— puis montrer que, si $[X,Y]=0$, alors

$$\left(e^{tY}\right)_* X = X, \tag{46}$$

qui s'obtient en vérifiant que, si $[X,Y]=0$, $\left(e^{tY}\right)_* X$ ne dépend pas de t.

En appliquant (45) avec $\Psi = e^{sY}$, on trouve alors :

$$e^{sY}\left(e^{tX}(\mathrm{M})\right) = e^{t\left(e^{sY}\right)_*X}(e^{sY}(\mathrm{M})).$$

Mais comme, à cause de (46), $[X,Y]=0$ entraîne $\left(e^{sY}\right)_* X = X$, on en déduit (44). □

3.5.3 Autres propriétés de la dérivée de Lie

La dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteur satisfait toutes les formes de règle de Leibniz.

Proposition 3.8 (règles de Leibniz) *Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur. Alors*

$$\text{si } f,g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \quad L_X(fg) = (L_Xf)g + fL_Xg; \tag{47}$$

$$\text{si } \alpha,\beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{M}), \quad L_X(\alpha\wedge\beta) = L_X(\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge L_X\beta; \tag{48}$$

$$\text{si } \alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{M}) \text{ et si } Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), \quad L_X(Y \lrcorner \alpha) = (L_XY) \lrcorner \alpha + Y \lrcorner L_X\alpha; \tag{49}$$

$$\text{si } Y,Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), \quad L_X[Y,Z] = [L_XY,Z] + [Y,L_XZ]. \tag{50}$$

Démonstration — Ces propriétés se démontrent de la même façon. Nous montrons d'abord (48) ((47) en étant une conséquence). Il suffit d'écrire

$$(e^{tX})^*(\alpha\wedge\beta)-\alpha\wedge\beta=\big((e^{tX})^*\alpha-\alpha\big)\wedge(e^{tX})^*\beta+\alpha\wedge\big((e^{tX})^*\beta-\beta\big)$$

pour en déduire

$$L_X(\alpha\wedge\beta)=\lim_{t\to 0}\frac{(e^{tX})^*(\alpha\wedge\beta)-\alpha\wedge\beta}{t}=(L_X\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge L_X\beta.$$

La preuve de (49) est similaire en partant de l'identité suivante, conséquence de (36) :

$$(e^{tX})^*(Y\lrcorner\,\alpha)=\big((e^{-tX})_*Y-Y\big)\lrcorner\,(e^{tX})^*\alpha+Y\lrcorner\,\big((e^{tX})^*\alpha-\alpha\big).$$

Pour montrer (50), nous commençons par établir le résultat suivant : pour toute paire de champ de vecteur $Y,Z\in\mathcal{X}(\mathcal{M})$ et pour tout difféomorphisme $\Phi:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$,

$$[\Phi_*Y,\Phi_*Z]=\Phi_*[Y,Z]. \tag{51}$$

Pour cela, soit $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ et $\mathrm{M}\in\mathcal{M}$, alors, en utilisant (45)

$$\begin{aligned}(L_{\Phi_*Y}f)(\Phi(\mathrm{M}))&=\lim_{t\to 0}\frac{\big(f\circ e^{t\Phi_*Y}\big)(\Phi(\mathrm{M}))-f(\Phi(\mathrm{M}))}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{(f\circ\Phi)\big(e^{tY}\big)(\mathrm{M})-(f\circ\Phi)(\mathrm{M})}{t}=L_X(f\circ\Phi)(\mathrm{M}).\end{aligned}$$

Donc

$$(L_{\Phi_*Y}f)\circ\Phi=L_Y(f\circ\Phi). \tag{52}$$

En utilisant deux fois cette dernière identité nous avons alors

$$[L_{\Phi_*Y}(L_{\Phi_*Z}f)]\circ\Phi=L_Y[(L_{\Phi_*Z}f)\circ\Phi]=L_Y[L_Z(f\circ\Phi)].$$

Nous en déduisons, en utilisant une troisième fois (52)

$$([L_{\Phi_*Y},L_{\Phi_*Z}]f)\circ\Phi=L_{[Y,Z]}(f\circ\Phi)=\big(L_{\Phi_*[Y,Z]}f\big)\circ\Phi.$$

Donc $[L_{\Phi_*Y},L_{\Phi_*Z}]=L_{\Phi_*[Y,Z]}$, si bien que nous obtenons (51). Appliquant cette identité avec $\Phi=e^{-sX}$, nous avons $(e^{-sX})_*[Y,Z]=\big[(e^{-sX})_*Y,(e^{-sX})_*Z\big]$. Nous en déduisons en dérivant par rapport à s en $s=0$ que $L_X[Y,Z]=[L_XY,Z]+[Y,L_XZ]$, en suivant la même méthode que précédemment. □

Remarquons qu'à cause de (43) et puisque le crochet de Lie est antisymétrique, la dernière identité (50) peut également s'écrire

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0, \tag{53}$$

qui est l'*identité de Jacobi* pour les champs de vecteur.

Une autre propriété est que la dérivée de Lie commute avec la différentielle extérieure.

Proposition 3.9 *Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ et soit $\alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{M})$, alors*

$$L_X(d\alpha) = d(L_X\alpha). \tag{54}$$

Démonstration — Cela provient de : $\left(e^{tX}\right)^* d\alpha = d\left(e^{tX}\right)^* \alpha$, identité qui est elle-même une une conséquence de (31). On obtient ainsi (en observant que $\left[\left(e^{tX}\right)^* \alpha - \alpha\right]/t$ converge vers $L_X\alpha$ uniformément dans $\mathcal{C}^1(\mathcal{K})$, pour tout compact $K \subset \mathcal{M}$) :

$$d(L_X\alpha) = d\left(\lim_{t\to 0} \frac{\left(e^{tX}\right)^* \alpha - \alpha}{t}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\left(e^{tX}\right)^* d\alpha - d\alpha}{t} = L_X d\alpha.$$

□

3.5.4 Les belles formules de Cartan

Et voici, pour terminer, deux magnifiques et fort utiles formules dues à Elie Cartan :

Théorème 3.6 (formule magique de Cartan) *Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur et $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ une p-forme. Alors*

$$L_X\alpha = X \lrcorner\, d\alpha + d(X \lrcorner\, \alpha), \tag{55}$$

autrement dit, sur $\Omega^*(\mathcal{M})$, on a l'identité $L_X = (X \lrcorner\ ) \circ d + d \circ (X \lrcorner\ )$.

Démonstration — Notons provisoirement $D_X := (X \lrcorner\ ) \circ d + d \circ (X \lrcorner\ )$. Nous allons montrer que $D_X = \mathrm{L}_X$. Pour cela, il suffit de montrer que :

(i) D_X et L_X satisfont tous les deux la règle de Leibniz ;

(ii) l'action de D_X sur les fonctions et sur les différentielles de fonction coïncide avec celle de L_X.

Alors puisque toute forme peut s'écrire comme une combinaison linéaire de produits extérieurs de fonctions et de différentielles de fonctions, le résultat s'en suivra. Nous avons déjà vérifié (i) pour L_X à la Proposition 3.8, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que D_X vérifie également

$$\forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M}), \forall \beta \in \Omega^q(\mathcal{M}), \quad D_X(\alpha \wedge \beta) = (D_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (D_X\beta).$$

en utilisant (29) et (35).

Vérfions (ii). Soit $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$. Alors

$$D_x f = X \lrcorner\, df + d(X \lrcorner\, f) = df(X) + 0 = L_X f.$$

D'autre part,

$$D_X(df) = X \lrcorner\, d(df) + d(X \lrcorner\, df) = 0 + dL_X f = L_X df,$$

en vertu de (54). □

Théorème 3.7 (formule de Cartan) *Soit $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ deux champs de vecteur et $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$ une 1-forme. Alors on a :*

$$d\alpha(X,Y) = L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]). \tag{56}$$

Démonstration — Plusieurs démonstrations sont possibles. La première consiste à tout écrire dans un système de coordonnées. Nous encourageons le lecteur à le faire, ce n'est pas si méchant. La deuxième méthode revient plus ou moins au même : nous montrons le résultat pour une 1-forme α de la forme fdg, où $f, g \in \Omega^0(\mathcal{M})$. Nous partons de :

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_X(fdg(Y)) &= df(X)\, dg(Y) + fL_X(L_Y g) \\ \mathrm{L}_Y(fdg(X)) &= df(Y)\, dg(X) + fL_Y(L_X g) \end{aligned}$$

Par soustraction, nous obtenons $\mathrm{L}_X(fdg(Y)) - \mathrm{L}_Y(fdg(X)) = (df \wedge dg)(X,Y) + fL_{[X,Y]}g = d(fdg)(X,Y) + fdg([X,Y])$, qui est (56) pour $\alpha = fdg$. Le cas général se déduit par linéarité.

Une troisième méthode consiste à partir de la règle de Leibniz (49) et à utiliser la formule magique (55) :

$$\begin{aligned} L_X(\alpha(Y)) = L_X(Y \lrcorner\, \alpha) &= (L_X Y) \lrcorner\, \alpha + Y \lrcorner\, L_X \alpha \\ &= \alpha(L_X Y) + Y \lrcorner\, [X \lrcorner\, d\alpha + d(X \lrcorner\, \alpha)] \\ &= \alpha([X,Y]) + d\alpha(X,Y) + L_Y(\alpha(Y)), \end{aligned}$$

et nous retrouvons ainsi (56). □

3.6 Intégrale d'une forme différentielle

3.6.1 Compléments préliminaires sur les variétés : l'orientation et le bord

Définition 3.10 *Une variété $\mathcal{M}$ est* ***orientée*** *si on peut choisir un système de cartes dans lequel toutes les fonctions de recollement φ_{ij} ont un jacobien positif.*

Noter que cette définition est équivalente à définir une orientation de chaque espace tangent $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$ qui dépend continûment de M : celle telle que, pour chaque carte locale $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ et pour tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, $dx_{\mathrm{M}} : T_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme qui préserve l'orientation.

Pour la suite, nous avons besoin aussi d'étendre la définition 2.1 d'une variété différentielle au cas des variétés *avec bord*. Pour cela notons :

$$\mathbb{R}^m_- := \{t = (t^1, \cdots, t^m) \in \mathbb{R}^m |\ t^1 \leq 0\} =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}.$$

Définition 3.11 (Variété différentielle avec bord) *Une variété différentielle à bord $\mathcal{M}$ de dimension m est un espace topologique équipé d'un* ***atlas****, c'est à dire un système de* ***cartes locales*** *$x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}^m_-$, où $i \in I$ et*

— *chaque $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathcal{M}$ et la réunion $\cup_{i\in I}\mathcal{O}_i$ est égale à $\mathcal{M}$;*

— *chaque $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m_-$, c'est à dire l'intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ avec $\mathbb{R}^m_-$;*
— *chaque application x_i est un homéomorphisme ;*
— *si $\mathcal{O}_{ij} := \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ est non vide, alors l'homéomorphisme $\varphi_{ij} := x_j \circ (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})}$ est un difféomorphisme de $x_i(\mathcal{O}_{ij})$ vers $x_j(\mathcal{O}_{ij})$.*

On dit que la variété est de classe $\mathcal{C}^k$ si les applications de recollement $\varphi_{ij} : (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})} \longrightarrow x_i(\mathcal{O}_{ij})$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^k$.

La différence avec la définition 2.1 est que, pour certaines valeurs de $i \in I$, $x_i(\mathcal{O}_i)$ peut rencontrer le bord $\partial\mathbb{R}^m_- := \{(0, t^2, \cdots, t^m)|\ (t^2, \cdots, t^m) \in \mathbb{R}^{m-1}\} \simeq \mathbb{R}^{m-1}$. On définit alors le **bord de la variété** $\mathcal{M}$, noté $\partial\mathcal{M}$, comme étant l'ensemble des points M tels que, pour toute carte $x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}^m_-$, on ait $x_i(\mathrm{M}) \in \partial\mathbb{R}^m_-$. Bien entendu, pour que cette définition ait un sens, il faut vérifier que cette propriété est indépendante de la carte utilisée[7]. On montre alors que $\partial\mathcal{M}$ est également une variété différentielle, de dimension $m-1$. Plus précisément, si nous notons $x_i|_{\partial\mathcal{M}} : \partial\mathcal{M} \cap \mathcal{O}_i \longrightarrow \partial\mathbb{R}^m_-$ la restriction de x_i à $\partial\mathcal{M} \cap \mathcal{O}_i$, $(x_i|_{\partial\mathcal{M}})_{i\in I}$ est un atlas sur $\partial\mathcal{M}$.

Supposons que nous puissions **orienter** la variété $\mathcal{M}$. Alors son bord $\partial\mathcal{M}$ est aussi naturellement muni d'une orientation, que l'on définit comme suit : d'abord nous orientons $\partial\mathbb{R}^m_-$ en décidant que, pour tout $t \in \partial\mathbb{R}^m_-$, $(\epsilon_2, \cdots, \epsilon_m)$ (où $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m)$ est la base canonique directe de $\mathbb{R}^m$) est une base directe de $T_t\partial\mathbb{R}^m_- \simeq \mathbb{R}^{m-1}$. Puis, pour chaque point $\mathrm{M} \in \partial\mathcal{M}$, l'espace tangent $T_\mathrm{M}\partial\mathcal{M}$ est muni de l'orientation induite par celle de $\partial\mathbb{R}^m_-$ par une carte $x|_{\partial\mathcal{M}} : \partial\mathcal{M} \cap \mathcal{O} \longrightarrow \partial\mathbb{R}^m_-$. En d'autres termes, $\left(\frac{\partial}{\partial x^2} \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$ est une base directe de $T_\mathrm{M}\partial\mathcal{M}$.

3.6.2 Intégrale d'une forme différentielle

Les p-formes différentielles α sur une variété $\mathcal{M}$ sont, d'une certaine façon, duales des *sous-variétés orientées $\mathcal{S}$ de dimension p de $\mathcal{M}$* (avec ou sans bord) : le produit de dualité en question sera noté $\int_\mathcal{S} \alpha$ et sera appelé *intégrale de α sur $\mathcal{S}$*. On peut illustrer cette construction en considérant d'abord le cas où $\mathcal{S}$ est un parallélépipède orienté plongé dans un espace affine E. Un tel parallélépipède peut être décrit par une application affine $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$: $\mathcal{S}$ est alors l'image du cube $[0,1]^p$ par u et le sous-espace affine $u(\mathbb{R}^p)$ qui le contient est orienté en postulant que du envoie une base directe de $\mathbb{R}^p$ en une base directe. Si $\alpha \in \Lambda^p E^*$, on peut alors poser :

$$\int_{u([0,1]^p)} \alpha := \alpha(\vec{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}, \cdots, \vec{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_p}) = (u^*\alpha)(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_p),$$

où, si on note $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, $\mathrm{M}_0 := u(0)$ et $\mathrm{M}_i := u(\epsilon_i)$, pour $1 \leq i \leq p$. Autrement dit, nous mesurons le volume algébrique (c'est à dire avec un signe tenant compte de l'orientation) de $u([0,1]^p)$. Nous pouvons aussi adapter cette définition à

7. Exercice : montrez-le ! Indication : caractériser les points du bord comme étant les points $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ tels qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de M et une fonction $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui atteint son minimum en M, mais telle que $df_\mathrm{M} \neq 0$.

un simplexe de E, c'est à dire l'image par une application affine $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$ du simplexe $\Delta^p := \{t = (t^1, \cdots, t^p) \in \mathbb{R}^p | \ 0 \leq t^1 < \cdots < t^p \leq 1\}$ en posant

$$\int_{u(\Delta^p)} \alpha := \frac{1}{p!}(u^*\alpha)(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_p),$$

le facteur $1/p!$ représentant le volume du simplexe Δ^p. Pour une sous-variété $\mathcal{S}$ d'une variété quelconque, nous pouvons imaginer que nous l'approchons par une surface polyèdrale $\mathcal{S}_A = \cup_{a\in A}\Delta^p_a$ constituée par la réunion de simplexes[8] orientés $(\Delta^p_a)_{a\in A}$, que l'on peut supposer aussi petits que l'on veut et définir

$$\int_{\mathcal{S}_A} \alpha := \sum_{a\in A} \int_{\Delta^p_a} \alpha_{\mathrm{M}_a}, \tag{57}$$

où, pour tout $a \in A$, M_a est le point origine du simplexe Δ^p_a. Enfin, comme dans la définition de l'intégrale de Riemann, nous considérons une suite de sous-variétés polyédrales $\mathcal{S}_A$ de plus en plus fines, qui approche $\mathcal{S}$ et pourrions définir $\int_{\mathcal{S}} \alpha$ comme étant la limite de l'intégrale (57). Une telle construction est envisageable (nous ne la décrirons pas ici) et fait déjà pressentir une propriété remarquable de cette notion d'intégrale : elle ne nécessite pas de se donner une mesure sur $\mathcal{M}$ ou sur $\mathcal{S}$ (on a juste besoin d'une structure différentiable et d'une orientation).

En fait, pour des raisons de commodité, on a plutôt l'habitude de construire l'intégrale d'une p-forme en utilisant la théorie de la mesure, bien que, répétons-le, la théorie de la mesure n'y joue pas un rôle essentiel. Pour cela, on peut commencer par définir l'intégrale d'une m-forme α sur une *variété* orientée $\mathcal{M}$ de dimension m (avec ou sans bord) en posant

$$\int_{\mathcal{M}} \alpha := \sum_{i\in I} \int_{\mathbb{R}^m_-} \psi_i^*(\chi_i\alpha),$$

où, étant donné un recouvrement de $\mathcal{M}$ par des ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ sur lesquels sont définies des cartes locale x_i à valeurs dans $\mathbb{R}^m_-$, $(\chi_i)_{i\in I}$ est une partition de l'unité (voir exercice 3.6 plus loin) sur $\mathcal{M}$ associée au recouvrement $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ et, pour tout $i \in I$, $\psi_i : x_i(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i$ est l'inverse de x_i. Chaque forme $\psi_i^*(\chi_i\alpha)$ est alors étendue sur $\mathbb{R}^m_-$ par la valeur 0 en dehors de $x_i(\mathcal{O}_i)$ et l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^m_-} \psi_i^*(\chi_i\alpha)$ est, par définition,

$$\int_{\mathbb{R}^m_-} \psi_i^*(\chi_i\alpha) := \int_{\mathbb{R}^m_-} f_i(t)dt^1 \cdots dt^m, \tag{58}$$

où $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m_-)$ est la densité telle que $\psi_i^*(\chi_i\alpha) = f_i dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^m$ et l'intégrale de droite dans (58) est une intégrale au sens de la théorie de la mesure (Riemann ou Lebesgue).

A nouveau le point capital dans cette démarche pour définir l'intégrale d'une forme est de vérifier que la définition (58) ne dépend pas du système de cartes, ni de la partition

8. Noter qu'il est en général impossible d'approcher une sous-variété par une réunion de parallélépipèdes. En revanche, cela est possible avec des simplexes.

de l'unité utilisée. Nous ne rentrerons pas dans ces détails ici. Mentionnons simplement que tout repose sur le fait la formule (26) qui permet d'exprimer l'image inverse d'une p-forme par une application est *presque* la même formule que celle du changement de variable dans une intégrale multiple. La différence essentielle est que, dans (26) interviennent des déterminants jacobiens avec leurs signe, alors que la formule de changement de variable ne fait intervenir que la valeur absolue du déterminant jacobien de la transformation.

L'intégrale que nous venons de définir satisfait le résultat suivant (qui à nouveau repose sur le fait que (26) est pratiquement la formule de changement de variable dans une intégrale) :

Théorème 3.8 *Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés différentielles* orientées *et de même dimension m (avec ou sans bord) et soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$. Soit $\alpha \in \Omega^m(\mathcal{M})$. Alors*

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi^* \alpha = \int_{\mathcal{N}} \alpha. \tag{59}$$

Cela nous permet d'étendre la définition de l'intégrale d'une p-forme au cas d'une **sous-variété orientée** $\mathcal{S}$ de dimension p, plongée dans une variété $\mathcal{N}$ de dimension quelconque. Pour cela soit $j : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{N}$ l'application « inclusion » : cette application est un exemple d'application régulière entre deux variétés diférentielles particulièrement simple (ça paraît même idiot), mais redoutablement efficace : nous en ferons un usage constant dans la suite. Nous définissons alors

$$\int_{\mathcal{S}} \alpha := \int_{\mathcal{S}} j^* \alpha. \tag{60}$$

Enfin énonçons le théorème de Stokes :

Théorème 3.9 *Soit $\mathcal{M}$ une variété à bord de dimension m et $\alpha \in \Omega^{m-1}(\mathcal{M})$. Alors*

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \alpha = \int_{\mathcal{M}} d\alpha. \tag{61}$$

Une des choses spectaculaires dans ce théorème, c'est que, grâce à (59) il s'étend instantanément à une sous-variété $\mathcal{S}$ de dimension p d'une variété $\mathcal{N}$: soit $j : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{N}$ l'application inclusion et soit $\alpha \in \Omega^{p-1}(\mathcal{N})$. Alors

$$\int_{\mathcal{S}} d\alpha \overset{(60)}{:=} \int_{\mathcal{S}} j^*(d\alpha) \overset{(31)}{=} \int_{\mathcal{S}} d(j^*\alpha) \overset{(61)}{=} \int_{\partial\mathcal{S}} (j^*\alpha) \overset{(60)}{=:} \int_{\partial\mathcal{S}} \alpha.$$

Exercice 3.6 (partition de l'unité) *Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle et $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une collection finie d'ouverts de $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Une* ***partition de l'unité sur $\mathcal{M}$ subordonnée à*** *$(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est une famille $(\theta_i)_{i\in I}$ de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty_c(\mathcal{M})$ (ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathcal{M}$) telle que :*
- *$\forall i \in I$, supp$\theta_i \subset \mathcal{O}_i$*
- *$\forall x \in \mathcal{M}$, $\sum_{i\in I} \theta_i(x) = 1$.*

Le but de cet exercice est de construire une partition de l'unité sur un compact de $\mathbb{R}^m$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^m$. On suppose qu'il existe une collection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^m$ $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$.

(i) Montrer qu'il existe des compacts $K_i \subset \mathcal{O}_i$ et $\rho > 0$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i \in I} K_i \quad et \quad dist(K_i, \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{O}_i) = \rho.$$

(Indication : pour tout $i \in I$ et pour tout $x \in K \cap \mathcal{O}_i$ on pourra considérer $r_{i,x} := \frac{1}{2} dist(x, \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{O}_i)$ et partir du fait que $K \subset \bigcup_{i \in I, x \in K} B(x, r_{i,x})$.)

(ii) On se donne une fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que $supp\chi \subset B(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^m} \chi = 1$. Pour tout $t > 0$, on pose $\chi_t(x) = \frac{1}{t^m}\chi(\frac{1}{t})$. Fabriquer des fonctions $(\varphi_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ telles que $supp\varphi_i \subset \mathcal{O}_i$ et $\varphi_i = 1$ sur K_i.

(iii) On pose $\theta_i := \varphi_i \left(\sum_{j \in I} \varphi_j \right)^{-1}$. Conclure que $(\theta_i)_{i \in I}$ est une partition de l'unité sur K subordonnée à $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$, c'est à dire : $\forall i \in I$, $\theta_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, $supp\theta_i \subset \mathcal{O}_i$ et $\forall x \in K$, $\sum_{i \in I} \theta_i(x) = 1$.

(iv) question supplémentaire : comment étendre ce résultat à une variété compacte ?

3.7 La formule d'homotopie et le lemme de Poincaré

Nous montrons ici une réciproque partielle au théorème 3.1, à savoir que, **sur certaines variétés**, une forme fermée est exacte. Noter qu'en général, une forme fermée n'est pas exacte. Un exemple est, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}^*$, la 1-forme :

$$\alpha := \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \mathrm{Im}\left(\frac{dz}{z}\right), \quad \text{où } z = x + iy.$$

On vérifie aisément que $d\alpha = 0$ sur $\mathbb{C}^*$. En revanche, il n'existe pas de 0-forme $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^*)$ telle que $df = \alpha$ sur $\mathbb{C}^*$ et cela résulte de l'identité suivante : soit $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^*)$ défini par $\gamma(t) = e^{it}$, alors

$$\int_{[0,2\pi]} \gamma^*\alpha = \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\frac{d(e^{it})}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} idt = i2\pi. \tag{62}$$

Or s'il existait une fonction f telle que $\alpha = df$, on devrait aussi avoir :

$$\int_{[0,2\pi]} \gamma^*\alpha = \int_{[0,2\pi]} \gamma^*(df) = \int_{[0,2\pi]} d(\gamma^* f) = \int_{\partial[0,2\pi]} f \circ \gamma = (f \circ \gamma)(2\pi) - (f \circ \gamma)(0) = 0,$$

ce qui contredit (62).

En revanche, le résultat serait vrai pour une 1-forme sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ ou, plus généralement, sur $\mathbb{R}^m$, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 3.7 *Soit $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^m)$ une 1-forme fermée, c'est à dire solution de $d\alpha = 0$. On note $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i dx^i$. Montrer que si on pose :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad f(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^m \alpha_i(tx)x^i dt, \tag{63}$$

alors, on a $\alpha = df$ sur $\mathbb{R}^m$.

En fait, dans notre premier exemple, α est la partie imaginaire de dz/z et on sait bien en analyse complexe que dz/z n'est fermée que « localement », puisqu'il s'agit de la dérivée de la fonction logarithme sur $\mathbb{C}^*$, qui est multivaluée. Cela est dû au fait que $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe (le lacet γ ne peut pas être contracté en un point tout en restant dans $\mathbb{C}^*$). Cela nous amène à la notion d'homotopie.

3.7.1 L'homotopie

Définition 3.12 (homotopie différentielle) *Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ deux variétés et soit $\varphi_0 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ et $\varphi_1 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ deux applications régulières. On dit que φ_0 **est régulièrement homotope à** φ_1 s'il existe une application régulière :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & [0,1] \times \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & (t,x) & \longmapsto & \Phi(t,x), \end{array}$$

*appelée **homotopie entre** φ_0 **et** φ_1, telle que :*

(i) $\forall x \in \mathcal{M}$, $\Phi(0,x) = \varphi_0(x)$;

(ii) $\forall x \in \mathcal{M}$, $\Phi(1,x) = \varphi_1(x)$.

Noter que la relation « est régulièrement homotope à » est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence s'appellent les *classes d'homotopie.*

Définition 3.13 (variété homotopiquement équivalente à un point) *Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle. On dit que $\mathcal{M}$ est régulièrement homotopiquement équivalente à un point s'il existe un point $\mathrm{M}_0 \in \mathcal{M}$ tel que les applications $Id : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ (application identité) et $0 : \mathcal{M} \longrightarrow \{\mathrm{M}_0\}$ (application constante) soient régulièrement homotopes.*

Nous remarquons que, si la variété $\mathcal{M}$ est connexe (ce qui est le cas ici), le point M_0 peut être échangé avec n'importe quel autre point car, alors, deux applications constantes à valeurs dans $\mathcal{M}$ sont forcément homotopes. Le lemme de Poincaré peut s'énoncer ainsi :

Théorème 3.10 (lemme de Poincaré) *Soit $\mathcal{M}$ une variété homotopiquement équivalente à un point. Alors, toute forme différentielle sur $\mathcal{M}$ qui est fermée est exacte. C'est à dire : pour toute forme $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$, si $d\alpha = 0$, alors il existe une forme $\beta \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M})$ telle que $\alpha = d\beta$.*

Dans ce qui suit, nous allons établir ce résultat comme conséquence d'un résultat plus général.

3.7.2 La formule d'homotopie

Nous commençons par le résultat suivant qui concerne une p-forme ω définie sur le produit $[0,1] \times \mathcal{M}$: il donne une expression pour la différence entre la restriction de ω sur $\{1\} \times \mathcal{M}$ et sa restriction sur $\{0\} \times \mathcal{M}$.

Proposition 3.10 *Soit $\mathcal{M}$ une variété et soit*

$$j_0 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & [0,1]\times\mathcal{M} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & (0,\mathrm{M}) \end{array} \quad et \quad j_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & [0,1]\times\mathcal{M} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & (1,\mathrm{M}). \end{array}$$

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq m$, il existe un opérateur linéaire

$$I : \begin{array}{ccc} \Omega^p([0,1]\times\mathcal{M}) & \longrightarrow & \Omega^{p-1}(\mathcal{M}) \\ \omega & \longmapsto & I\omega \end{array}$$

tel que, pour toute p-forme $\omega \in \Omega^p([0,1]\times\mathcal{M})$, on ait

$$j_1^*\omega - j_0^*\omega = d(I\omega) + I(d\omega).$$

Preuve — Notons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_t : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathcal{M} \\ (s,\mathrm{M}) & \longmapsto & (s+t,\mathrm{M}). \end{array}$$

Remarquons que Φ_t est simplement l'expression du flot $e^{t\partial_t}$ du champ de vecteur $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$ à l'instant t. Nous avons alors [9] :

$$\begin{array}{rcl} j_1^*\omega - j_0^*\omega & = & (\Phi_1 \circ j_0)^*\omega - j_0^*\omega = j_0^*(\Phi_1^*\omega) - j_0^*\omega = \displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(j_0^*\Phi_t^*\omega\right)\mathbf{dt} \\ & = & j_0^* \displaystyle\int_0^1 L_{\partial_t}\left(\Phi_t^*\omega\right)\mathbf{dt} = j_0^* \displaystyle\int_0^1 \Phi_t^*\left(L_{\partial_t}\omega\right)\mathbf{dt} \\ & = & j_0^* \displaystyle\int_0^1 \Phi_t^*\left(d(\partial_t \lrcorner\, \omega) + \partial_t \lrcorner\, (d\omega)\right)\mathbf{dt} \\ & = & j_0^* \displaystyle\int_0^1 d\left(\Phi_t^*(\partial_t \lrcorner\, \omega)\right)\mathbf{dt} + j_0^* \displaystyle\int_0^1 \Phi_t^*\left(\partial_t \lrcorner\, (d\omega)\right)\mathbf{dt} \\ & = & d\left(j_0^* \displaystyle\int_0^1 \Phi_t^*(\partial_t \lrcorner\, \omega)\mathbf{dt}\right) + j_0^* \displaystyle\int_0^1 \Phi_t^*\left(\partial_t \lrcorner\, (d\omega)\right)\mathbf{dt} \\ & = & d(I\omega) + I(d\omega), \end{array}$$

où, pour $\alpha = \omega$ ou $d\omega$, on a posé :

$$I\alpha := j_0^* \int_0^1 \Phi_t^*(\partial_t \lrcorner\, \alpha)\mathbf{dt} = j_0^* \int_0^1 \partial_t \lrcorner\, (\Phi_t^*\alpha)\mathbf{dt}$$

(car $\partial_t \lrcorner\, \Phi_t^*\alpha = \Phi_t^*(\partial_t \lrcorner\, \alpha)$). □

Peut-être avez-vous trouvé le style de cette démonstration un peu trop abstrait. Si c'est le cas, il est possible d'en donner une présentation un peu différente. En effet toute forme $\alpha \in \Omega^p([0,1]\times\mathcal{M})$ peut se décomposer sous la forme

$$\alpha = \alpha + dt \wedge \beta, \quad \text{où } \alpha \in \Omega^p([0,1]\times\mathcal{M}), \beta \in \Omega^{p-1}([0,1]\times\mathcal{M}) \text{ et } \partial_t \lrcorner\, \alpha = \partial_t \lrcorner\, \beta = 0.$$

9. en notant $\mathbf{dt}$ la mesure de Lebesgue (ou de Riemann) dans toutes les intégrales, au lieu de la notation habituelle dt, pour la distinguer de la 1-forme sur $\mathbb{R}$.

Alors, on a aussi :

$$I\alpha = \int_0^1 \beta|_t \mathbf{dt},$$

et, en partant de la décomposition $\omega = \phi + dt \wedge \psi$, on parvient ainsi au même résultat.

Nous déduisons de la proposition 3.10 le résultat suivant :

Théorème 3.11 (formule d'homotopie) *Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés différentielles et soit $f_0, f_1 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ deux applications* régulièrement homotopes. *Soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$ une forme* fermée*, c'est à dire telle que $d\alpha = 0$. Alors il existe une forme $\beta \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M})$ telle que*

$$f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = d\beta. \tag{64}$$

Preuve — Soit $H : [0,1] \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ l'homotopie entre f_0 et f_1 : H est une application régulière telle que $H(0,\cdot) = f_0$ et $H(1,\cdot) = f_1$. Nous appliquons la proposition 3.10 avec $\omega = H^*\alpha$: cela nous donne :

$$j_1^*(H^*\alpha) - j_0^*(H^*\alpha) = d\left(I\left(H^*\alpha\right)\right) + I\left(d(H^*\alpha)\right).$$

Mais, comme $H \circ j_1 = f_1$ et $H \circ j_0 = f_0$, on a

$$f_1^*\alpha = (H \circ j_1)^*\alpha = j_1^*(H^*\alpha) \quad \text{et} \quad f_0^*\alpha = (H \circ j_0)^*\alpha = j_0^*(H^*\alpha)$$

et donc :

$$f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = d\left(I\left(H^*\alpha\right)\right) + I\left(d(H^*\alpha)\right).$$

C'est le moment d'utiliser l'hypothèse que α est fermée : cela entraîne que $d\left(H^*\alpha\right) = H^*(d\alpha) = H^*0 = 0$. Donc nous en déduisons (64) avec $\beta = I\left(H^*\alpha\right)$. □

3.7.3 La preuve du lemme de Poincaré

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme de Poincaré (théorème 3.10) : c'est une conséquence immédiate de la formule d'homotopie (64).

En effet soit $H : [0,1] \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ une homotopie entre l'application constante $f_0 : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}_0$ et l'application identité $f_1 : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}$, c'est à dire telle que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}, \quad H(0,\mathrm{M}) = \mathrm{M}_0 \quad \text{et} \quad H(1,\mathrm{M}) = \mathrm{M}.$$

Soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ une forme *fermée*. Alors, grâce au théorème 3.11, il existe $\beta \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M})$ tel que $f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = d\beta$. Or, comme f_0 est constante, on a $f_0^*\alpha = 0$ et comme, par ailleurs, f_1 est l'identité, $f_1^*\alpha = \alpha$. Donc on conclut que $\alpha = d\beta$. □

Exercice 3.8 *Soit α une 1-forme fermée sur $\mathbb{R}^m$ (i.e. $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^m)$ et $d\alpha = 0$). Appliquer la proposition 3.10 avec l'homotopie*

$$\begin{array}{rccc} H: & [0,1] \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (t,x) & \longmapsto & tx \end{array}$$

pour donner une expression explicite de β tel que $d\beta = \alpha$ et retrouver (63). Qu'obtient-on pour une p-forme fermée sur $\mathbb{R}^m$ en utilisant la même homotopie ?

3.7.4 Cohomologie de de Rham

Le fait que toute forme exacte soit fermée peut se reformuler en écrivant que l'espace vectoriel $d\Omega^{p-1}(\mathcal{M}) := \{d\beta |\ \beta \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M})\}$ est contenu dans l'espace vectoriel $Z^p(\mathcal{M}) := \{\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M}) |\ d\alpha = 0\}$. On démontre que, lorsque $\mathcal{M}$ est compacte et sans bord, l'espace quotient $Z^p(\mathcal{M})/d\Omega^{p-1}(\mathcal{M})$ est de dimension fini. On note $H^p(\mathcal{M}) := Z^p(\mathcal{M})/d\Omega^{p-1}(\mathcal{M})$ cet espace, appelé *classe de cohomologie de de Rham*. Cet espace mesure décrit le nombre de possibilités pour qu'une forme fermée ne soit pas exacte (au sens où, en particulier, $H^p(\mathcal{M}) = 0$ si et seulement si toute p-forme fermée sur $\mathcal{M}$ est exacte). La classe de cohomologie nous renseigne aussi sur des propriétés topologiques globales de la variété $\mathcal{M}$.

Références

[1] R. Bott, L.W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1982.

[2] Elie Cartan, *Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité*, Bulletin de la S.M.F., tome 59 (1931), p. 88–118.

[3] B. Doubrovine, A. T. Fomenko, S. P. Novikov,*Géométrie contemporaine, tome 1*, éditions MIR.

[4] T. Willmore, *Riemannian geometry*, Oxford

Table des matières