Université Paris 7 – Denis Diderot Année 2017/2018

Master 2 de Mathématiques
Calcul des variations et géométries symplectiques et multisymplectiques
Correction des exercices

1 Le brachistrochrone

Dans un plan vertical, on considère une courbe Γ que l'on représente comme le graphe d'une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = H > 0$ et $f(1) = 0$. On note $A = (0,H)$ et $B = (1,0)$ les extrémités de Γ. Un corps ponctuel de masse m et soumis à la force d'attraction gravitationnelle constante et uniforme $F = mg(0,-1)$ (où g est la constante d'accélération gravitationnelle à la surface de la terre) est laché avec une vitesse initiale nulle depuis le point A à l'instant 0 et glisse sans frottement sur Γ (à la force gravitationnelle s'ajoute donc la force de réaction de Γ sur le corps). On note $t \longmapsto u(t) = (x(t), y(t))$ la trajectoire de ce corps, pour $t \geq 0$.
1) Par des considérations d'énergie, exprimer (au signe près) le vecteur vitesse $\dot{u}(t)$ en fonction de $u(t)$, pour tout temps $t \geq 0$.
Réponse — D'une part $\dot{u}(t)$ doit être tangent à Γ en $u(t)$, c'est à dire être parallèle au vecteur $(1, f'(x(t)))$, donc il existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tel que $\dot{u}(t) = \lambda(t)(1, f'(x(t)))$. D'autre part, l'énergie totale $E(t)$ est la somme de l'énergie cinétique $E_c(t) = \frac{1}{2}m|\dot{u}|^2$ et de l'énergie potentielle associée à la force de gravitation $E_p(t) = mgy(t)$. Cette énergie est conservée car il n'y a pas de frottement. Donc

$$mgH = mgy(0) = \frac{1}{2}m|\dot{u}(t)|^2 + mgy(t),$$

ce qui entraîne que $|\dot{u}(t)| = \sqrt{2g(H - y(t))}$. Donc $|\lambda(t)|\sqrt{1 + f'(x(t))^2} = \sqrt{2g(H - y(t))}$ et

$$\dot{u}(t) = \pm\sqrt{\frac{2g(H - y(t))}{1 + f'(x(t))^2}}(1, f'(x(t))) = \pm\sqrt{\frac{2g(H - f(x(t)))}{1 + f'(x(t))^2}}(1, f'(x(t))) \qquad (1)$$

2) Démontrer que si $f'(0) < 0$ et si $f < H$ sur $]0,1]$, alors le corps se déplace toujours « vers la droite » (i.e. $\dot{x} > 0$) et atteint le point B en un temps T.
Réponse — La condition $f'(0) < 0$ garantit que le point A n'est pas un point d'équilibre et que donc le corps ne peut pas rester au point A. En effet à l'instant 0, le corps est soumis à la force de gravitation $mg(0,-1)$ et à une force de réaction de Γ qui est orthogonale à Γ (car il n'y a pas de frottement), donc de la forme $\lambda(-f'(0), 1)$. Comme la somme $mg(0,-1) + \lambda(-f'(0), 1)$ doit être tangente à Γ, elle doit être de la forme $\mu(1, f'(0))$. En identifiant, on obtient d'abord que $\mu = -\lambda f'(0)$, puis que $\lambda = mg/f'(0)^2$ et donc enfin que la première composante de la force vaut $-mg/f'(0) > 0$. Donc $\ddot{x}^1(0) > 0$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\dot{x}(t) > 0$ sur $]0, \varepsilon]$.

Deuxièmement comme $f < H$ sur $]0,1]$, on a en particulier $f(x(\varepsilon)) < H$ (puisque $x(\varepsilon) > 0$) et donc $\overline{f} := \sup_{[x(\varepsilon),1]} f < H$. Vu (1), cela entraîne que $\dot{x}$ ne change pas de signe et donc, par continuité, reste positif pour tout temps. En particulier le signe $\pm$ dans (1) est $+$. De plus $\dot{x}(t)$ est minoré par un nombre strictement positif et donc il existe un temps $T > 0$ tel que $x(T) = 1$.
3) On suppose dorénavant que $f'(0) < 0$ et $f < H$ sur $]0,1]$ et on note $\tau : [0,1] \longrightarrow [0,T]$ l'application inverse de $x : [0,T] \longrightarrow [0,1]$, c'est à dire telle que $\forall s \in [0,1]$, $x(\tau(s)) = s$. Exprimer T en fonction de τ, puis de f uniquement.
Réponse — D'abord on déduit de (1) que :

$$\dot{x} \circ \tau(s) = \sqrt{\frac{2g(H - f(s))}{1 + f'(s)^2}}$$

et donc
$$T=\int_0^1 \frac{d\tau}{ds}(s)ds=\int_0^1 \frac{ds}{\dot{x}\circ\tau(s)}=\int_0^1 \sqrt{\frac{1+f'(s)^2}{2g(H-f(s))}}ds.$$
4) On pose $h(x)=H-f(x)$ et on cherche les points critiques de l'action obtenue précédemment (qui donne T en fonction de τ). Observer que cette action possède une symétrie et, par conséquent, une quantité conservée que l'on exprimera.
Réponse — On obtient l'action
$$\mathcal{A}[h]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \sqrt{\frac{1+h'(s)^2}{h(s)}}ds.$$
Le lagrangien de cette action ne dépent pas de s et est donc invariant par translation dans cette variable. Cela est analogue en mécanique aux problèmes variationnels indépendants du temps : l'énergie ou hamiltonien est alors conservée. Il s'agit ici de la quantité
$$\frac{\partial L}{\partial h'}h'-L=-\frac{1}{\sqrt{2gh(1+h'^2)}}.$$
5) Intégrer l'équation obtenue à la question précédente (on pourra poser $h'(s)=\cot\frac{\theta}{2}$) et montrer que le graphe de f est une cycloïde.
Réponse — Les points critiques de l'action $\mathcal{A}$ satisfont l'équation
$$h(1+h'^2)=C,$$
oú C est une constante strictement positive. En posant $h'(s)=\cot\frac{\theta}{2}$ dans l'équation, on obtient $h=C\sin^2\frac{\theta}{2}$. Donc $dh=C\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$. Comme par ailleurs $dh=h'ds=\cot\frac{\theta}{2}ds$, on en déduit que
$$ds=\tan\frac{\theta}{2}C\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=C\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta=Cd(\theta-\sin\theta).$$
En conclusion
$$(s,h)(\theta)=C(\theta-\sin\theta,1-\cos\theta)+(s_0,0),$$
qui est la paramétrisation d'une cycloïde.

2 Lagrangiens nuls

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère une densité lagrangiennne de classe $\mathcal{C}^2$
$$\begin{array}{rccc}\Lambda: & I\times\Omega\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (t,x,v) & \longmapsto & \Lambda(t,x,v)\end{array}$$
et on lui associe l'action
$$\mathcal{L}[u]:=\int_I \Lambda(t,u(t),\dot{u}(t))dt,$$
définie pour toute application $u:I\longrightarrow\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que Λ est un *lagrangien nul* si toute application $u:I\longrightarrow\Omega$ est point critique de $\mathcal{L}$. Montrer que Λ est un lagrangien nul ssi il existe une fonction $S:I\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que
$$\forall(t,x,v)\in I\times\Omega\times\mathbb{R}^n,\quad \Lambda(t,x,v)=\frac{\partial S}{\partial t}(t,x)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x)v^i. \tag{2}$$

Indication : on commencera par identifier l'application

$$E = (E_1, \cdots, E_n) : \quad \begin{array}{rcl} I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ (t, x, v, w) & \longmapsto & E(t, x, v, w) \end{array}$$

telle que l'équation d'Euler–Lagrange satisfaite par les points critiques de $\mathcal{L}$ s'écrive $E(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)) = 0$, $\forall t \in I$ et par justifier le fait que Λ est un lagrangien nul ssi $E = 0$.
Réponse — L'équation d'Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial v^i}(t, u(t), \dot{u}(t))\right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad \forall i,$$

se développe en :

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial v^j}(t, u(t), \dot{u}(t))\ddot{u}^j(t) + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial x^j}(t, u(t), \dot{u}(t))\dot{u}^j(t) + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial t}(t, u(t), \dot{u}(t)) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}(t, u(t), \dot{u}(t)) = 0, \quad \forall i,$$

où il est sous-entendu que l'on somme sur j, à chaque fois que cet indice apparaît deux fois. Cette relation s'écrit $E_i(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)) = 0$, $\forall i$, où :

$$E_i(t, x, v, w) := \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial v^j}(t, x, v)w^j + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial x^j}(t, x, v)v^j + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial t}(t, x, v) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}(t, x, v).$$

A présent nous remarquons que, pour tout $(t, x, v, w) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe une application régulière $u : I \longrightarrow \Omega$ telle que $(t, x, v, w) = (t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t))$. Donc l'hypothèse faite sur le lagrangien Λ revient à supposer que les fonctions E_i sont nulles. Notons que E_i est de la forme $A_i(t, x, v) + B_{ij}(t, x, v)w^j = 0$. En particulier, il faut que les coefficients B_{ij} s'annulent, c'est à dire :

$$\forall i, \quad \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial v^j}(t, x, v) = 0,$$

ce qui entraîne que Λ est une fonction affine de v dont les coefficients sont des fonctions de (t, x), i.e. $\Lambda(t, x, v) = a(t, x) + b_j(t, x)v^j$. En reportant cette expression dans :

$$\forall i, \quad A_i(t, x, v) = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial x^j}(t, x, v)v^j + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial t}(t, x, v) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}(t, x, v) = 0,$$

on obtient :

$$\forall i, \quad \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(t, x)v^j + \frac{\partial b_i}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial a}{\partial x^i}(t, x) - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}(t, x)v^j = 0.$$

Cette relation n'est satisfaite pour tout v que si :

$$\forall i, \quad \frac{\partial b_i}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial a}{\partial x^i}(t, x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall i, j, \quad \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(t, x) - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}(t, x) = 0,$$

ou encore $d(adt + b_i dx^i) = 0$, ce qui entraîne qu'il existe une fonction $S : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $adt + b_i dx^i = dS$ et donc (2).

3 Lagrangiens invariants par difféomorphismes

Exercice un peu difficile : il est recommandé de faire l'exercice précédent d'abord.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère une densité lagrangienne

$$L : \quad \begin{array}{rcl} I \times \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x, v) & \longmapsto & L(t, x, v). \end{array}$$

On suppose que L est continue sur $I \times \Omega \times \mathbb{R}^n$, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et que $I \times \Omega \ni (t,x) \longmapsto L(t,x,0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$, on note $\mathcal{L}[u] := \int_I L(t,u(t),\dot{u}(t))dt$. On suppose que $\mathcal{L}$ est invariant sous l'action du groupe des difféomorphismes de I dans lui-même, c'est à dire : pour tout difféomorphisme $\varphi : I \longrightarrow I$ qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact de I, on a :

$$\mathcal{L}[u \circ \varphi] = \mathcal{L}[u]. \tag{3}$$

1) (Question préliminaire) Soit n un entier strictement positif et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est *positivement homogène* de degré α, si

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall s \in]0,+\infty[, \quad f(sv) = s^\alpha f(v).$$

Démontrer qu'une fonction continue positivement homogène de degré α qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfait la relation d'Euler :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \alpha f(v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial v^i}(v).$$

Réponse — Il suffit de dériver par rapport à s la relation $f(sv) = s^\alpha f(v)$ et de prendre $s = 1$.
2) Montrer que la condition (3) est équivalente à une condition locale au même sens que la question précédente, c'est à dire à une condition de la forme

$$\forall (t,x,v,w) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n, \quad E(t,x,v,w) = 0.$$

Réponse — Tout difféomorphisme φ de I dans lui-même qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact peut être connecté à l'identité par une homotopie[1] $\Phi : [0,1] \times I \longrightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall s \in [0,1]$, $\Phi(s,\cdot)$ est un difféomorphisme de I dans I qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact. La relation (3) est alors équivalente à prouver la relation

$$\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[u \circ \Phi(s,\cdot)]\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{L}[u \circ \Phi(s+\varepsilon,\cdot)] - \mathcal{L}[u \circ \Phi(s,\cdot)]}{\varepsilon} = 0, \quad \text{pour tout } u : I \longrightarrow \Omega.$$

Or, pour tout $s \in [0,1]$ fixé, on peut toujours écrire :

$$\forall t \in I, \quad u(\Phi(s+\varepsilon,t)) = u\left(\Phi(s) + \varepsilon\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,t) + o(\varepsilon)\right) = u\left(\Phi(s,t)\right) + \varepsilon \dot{u}(\Phi(s,t))\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,t) + o(\varepsilon)$$

ou, si on note $u_s(t) := u\left(\Phi(s,t)\right)$ [de sorte que $\dot{u}_s(t) = \dot{u}(\Phi(s,t))\frac{\partial \Phi}{\partial t}(s,t)$] et $X(t) := \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,t)/\frac{\partial \Phi}{\partial t}(s,t)$:

$$\forall t \in I, \quad u(\Phi(s+\varepsilon,t)) = u_s(t) + \varepsilon \dot{u}_s(t)X(t) + o(\varepsilon) \quad \text{et} \quad u(\Phi(s,t)) = u_s(t).$$

Ainsi, quitte à rebaptiser $u = u_s$, la propriété (3) est équivalente à prouver que, pour toute application $u : I \longrightarrow \Omega$ et pour toute fonction régulière $X : I \longrightarrow \mathbb{R}$ à support compact,

$$\mathcal{L}[u + \varepsilon \dot{u} X] = \mathcal{L}[u] + o(\varepsilon^2).$$

En développant :

$$\mathcal{L}[u + \varepsilon \dot{u}X] = \mathcal{L}[u] + \varepsilon \int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,u(t),\dot{u}(t))\dot{u}^i(t)X(t) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,u(t),\dot{u}(t))\frac{d}{dt}\left(\dot{u}^i(t)X(t)\right)\right] dt + o(\varepsilon),$$

nous voyons que (3) équivaut à : $\forall X \in \mathcal{C}^1_c(I,\mathbb{R})$, $\forall u \in \mathcal{C}^2(I,\Omega)$,

$$\int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,u,\dot{u})\dot{u}^i X + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,u,\dot{u})\frac{d}{dt}\left(\dot{u}^i X\right)\right] dt = 0.$$

1. $\Phi : [0,1] \times I \longrightarrow I$ est une homotopie si $\forall s \in [0,1]$, $\Phi(s,\cdot)$ coïncide avec l'identité en dehors d'un compact de I, $\Phi(0,\cdot)$ est l'application identité de I dans I et $\Phi(1,\cdot) = \varphi$. Ici il suffit de prendre $\Phi(s,t) = (1-s)t + s\varphi(t)$.

En intégrant par partie et en utilisant le fait que X est à support compact, cela donne :

$$\int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,u,\dot u)\dot u^i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,u,\dot u) \right) \dot u^i \right] X dt = 0.$$

Comme X est quelconque, on obtient donc en développant, que $\forall t \in I$:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,u,\dot u)\dot u^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t,u,\dot u)\dot u^i - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i}(t,u,\dot u)\dot u^j \dot u^i - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}(t,u,\dot u)\ddot u^j \dot u^i = 0.$$

Et comme cette identité doit être vraie pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^2(I,\Omega)$, on en déduit comme à l'exercice 2 que : $\forall (t,x,v,w) \in I \times \Omega \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $E(t,x,v,w) = 0$, où

$$E(t,x,v,w) := \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,v)v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t,x,v)v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i}(t,x,v)v^j v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}(t,x,v)w^j v^i.$$

3) Déduire de la question précédente que, $\forall j = 1, \cdots, n$, $\forall (t,x) \in I \times \Omega$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni v \longmapsto \frac{\partial L}{\partial v^j}(t,x,v)$ est positivement homogène de degré 0. Montrer que

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad L(t,x,v) = L(t,x,0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)v^i. \tag{4}$$

Réponse — L'expression $E(t,x,v,w)$ est une fonction affine de w. Le fait que E soit identiquement nul entraîne donc en particulier que, pour tout j, le coefficient de w^j s'annule, c'est à dire :

$$\forall j = 1, \cdots, n, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}(t,x,v)v^i = 0.$$

Cela implique que, $\forall (t,x) \in I \times \Omega$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall s \in]0,+\infty[$, $\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial v^j}(t,x,sv) \right) = 0$ et donc que $s \longmapsto \frac{\partial L}{\partial v^j}(t,x,sv)$ est une fonction constante. De l'identité :

$$L(t,x,v) - L(t,x,0) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(L(t,x,sv)\right) ds = \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,sv)v^i ds$$

on déduit alors (4).

4) Montrer que L satisfait la relation

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall i = 1, \cdots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,0) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t,x,v). \tag{5}$$

Réponse — Nous allons utiliser la relation $E(t,x,v,0) = 0$ et une conséquence de la relation (4) : en dérivant la relation (4) par rapport à x^i et en multipliant par v^i et en sommant sur i, on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,v)v^i = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,0)v^i + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j}(t,x,v)v^j v^i$$

Nous en déduisons la simplification suivante

$$E(t,x,v,0) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,0)v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t,x,v)v^i.$$

Cette expression doit être identiquement nulle. En la dérivant par rapport à v^j, on obtient :

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^j}(t,x,0) - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^j}(t,x,v) - \frac{\partial^3 L}{\partial t \partial v^i \partial v^j}(t,x,v)v^i.$$

Or, d'après la question 3),

$$\frac{\partial^3 L}{\partial t \partial v^i \partial v^j}(t,x,v)v^i = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}(t,x,v)v^i\right) = \frac{\partial}{\partial t}(0) = 0,$$

donc on obtient la relation demandée.

5) Déduire des questions précédentes qu'il existe une fonction continue $F_0 : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et positivement homogène de degré 1 par rapport à v et des fonctions $a, b_1, \cdots, b_n : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t,x,v) = F_0(x,v) + a(t,x) + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)v^i.$$

Réponse — Nous commençons par écrire un développement de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial t}(t,x,v) &= \frac{\partial L}{\partial t}(t,x,0) + \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial t}(t,x,sv)\right) ds \\ &= \frac{\partial L}{\partial t}(t,x,0) + \int_0^1 \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial t}(t,x,sv)v^i ds \\ &= \frac{\partial L}{\partial t}(t,x,0) + \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,0)v^i ds,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (5) pour obtenir la dernière ligne. Le terme dans l'intégrale s'avérant être indépendant de s, on en déduit que :

$$\frac{\partial L}{\partial t}(t,x,v) = \frac{\partial L}{\partial t}(t,x,0) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,0)v^i.$$

En supposant que $0 \in I$ et en intégrant l'identité précédente entre 0 et t, on obtient :

$$L(t,x,v) = L(0,x,v) + \int_0^t \left(\frac{\partial L}{\partial t}(\tau,x,0) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(\tau,x,0)v^i\right) d\tau,$$

ce qui nous donne la relation demandée avec :

$$F_0(x,v) := L(0,x,v) - L(0,x,0), \quad a(t,x) := L(0,x,0) + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial t}(\tau,x,0)d\tau \quad \text{et} \quad b_i(t,x) := \int_0^t \frac{\partial L}{\partial v^i}(\tau,x,0)d\tau.$$

6) En réutilisant la question 2), montrer [2] que

$$\forall (t,x) \in I \times \Omega, \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}(t,x) - \frac{\partial b_i}{\partial t}(t,x)\right) v^i = 0.$$

En déduire que l'on peut écrire :

$$\forall (t,x,v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t,x,v) = F(x,v) + \Lambda(t,x,v), \tag{6}$$

où Λ est un lagrangien nul de la forme (2) et F est positivement homogène de degré 1 par rapport à v. (Indication : poser $S(t,x) = \int_0^t a(\tau,x)d\tau$.)

Réponse — Nous repartons du résultat de la question précédente : $L(t,x,v) = F_0(x,v) + a(t,x) + b_i(t,x)v^i$ et substituons cette expression dans la relation $E(t,x,v,w) = 0$. Cela nous donne :

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}(t,x) - \frac{\partial b_i}{\partial t}(t,x)\right) v^i = 0.$$

2. Toutes mes excuses, il y avait une erreur dans l'énoncé, cette erreur est corrigée ici.

Posons $S(t,x) = \int_0^t a(\tau,x)d\tau$, de sorte que $\frac{\partial S}{\partial t} = a$, et $\Lambda(t,x,v) = \frac{\partial S}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x)v^i$. Alors $a(t,x) + b_i(t,x)v^i - \Lambda(t,x,v) = \left(b_i(t,x) - \frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x)\right) v^i$. Donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a + b_i v^i - \Lambda\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(b_i - \frac{\partial S}{\partial x^i}\right) v^i = \left(\frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x^i}\right) v^i = \left(\frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial x^i}\right) v^i = 0.$$

Cela signifie que $a + b_i v^i - \Lambda$ est une fonction de (t,x,v) qui est indépendante de t et linéaire en v, i.e.

$$a(t,x) + b_i(t,x)v^i - \Lambda(t,x,v) = c_i(x)v^i,$$

où les c_i sont des fonctions sur Ω. On conclut en posant $F(x,v) := F_0(x,v) + c_i(x)v^i$, qui reste une fonction positivement homogène de degré un en v.

4 Transformation de Legendre

Ecrire les transformations de Legendre pour le lagrangien nul Λ obtenu à la question 2 et pour le lagrangien L obtenu à la question 3. Montrer que, dans ces deux cas, la transformation de Legendre est dégénérée, c'est à dire que, pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ v & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)dx^i \end{array}$$

n'est pas une bijection. Caractériser l'image de cette transformation (pour le lagrangien L de la question 3, on se placera dans un cas générique) et calculer l'hamiltonien.

Réponse — a) Pour le « lagrangien nul » Λ obtenu à l'exercice deux, on a d'après (2) :

$$p_i = \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i}(t,x,v) = b_i(t,x) = \frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x).$$

Donc si on fixe (t,x) alors l'application $v \longmapsto p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i}(t,x,v)dx^i$ est constante, est donc de rang zéro et en particulier dégénérée. [Remarque : l'image totale de la transformée de Legendre, c'est à dire l'image de l'application

$$\begin{array}{ccc} I \times \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & T^*(I \times \Omega) \\ (t,x,v) & \longmapsto & \left(t, x, \frac{\partial S}{\partial t}(t,x), \frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x)\right) \end{array}$$

est une sous-variété de dimension $n+1$ de $T^*(I \times \Omega)$ sur laquelle la forme symplectique $\omega = dp_0 \wedge dt + dp_i \wedge dx^i$ s'annule. Une telle sous-variété est appelée *sous-variété lagrangienne*.]

b) Pour le lagrangien invariant par difféomorphisme obtenu à la question trois, on a, en vertu de (6),

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v) = \frac{\partial S}{\partial x^i}(t,x) + \frac{\partial F}{\partial v^i}(x,v).$$

Comme la fonction F est homogène de degré 1 par rapport à v, $\frac{\partial F}{\partial v^i}$ est homogène de degré 0 par rapport à v, ce qui signifie que $\frac{\partial F}{\partial v^i}(x,\lambda v) = \lambda \frac{\partial F}{\partial v^i}(x,v)$. Donc, pour x fixé, l'image de $v \longmapsto \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)$ est, dans une situation générique, une hypersurface de $(\mathbb{R}^n)^*$. La transformation de Legendre est donc encore dégénérée. [Remarque : Dans une situation générique, l'image totale de la transformée de Legendre est une hypersurface de $T^*(I \times \Omega)$. La restriction de la forme symplectique à cette hypersurface n'est pas nulle, mais est dégénérée, au sens où elle admet en chaque point un noyau de dimension 1. L'intégration de cette distribution de droites tangentes à l'hypersurface donne les trajectoires hamiltoniennes.]

5 Calcul des variations et champ magnétique

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et on se donne un lagrangien régulier

$$\begin{array}{rccc} L: & \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,v) & \longmapsto & L(x,v) \end{array}$$

et l'action
$$\mathcal{L}[u] := \int_I L(u(t), \dot{u}(t))dt$$
définie sur l'espace des chemins $\{u : I \longrightarrow \Omega\}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une 1-forme régulière $A = A_i dx^i$ sur Ω et on considère le lagrangien
$$\begin{array}{cccc} \widetilde{L}: & \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,v) & \longmapsto & \widetilde{L}(x,v) \end{array}$$
où
$$\widetilde{L}(x,v) = L(x,v) + A_i(x)v^i.$$
Enfin on définit l'action
$$\widetilde{\mathcal{L}}[u] := \int_I \widetilde{L}(u(t), \dot{u}(t))dt.$$

1) Ecrire l'équation d'Euler–Lagrange des points critiques de $\widetilde{\mathcal{L}}$ en fonction de L et de A. On pourra poser $F = \sum_{1\leq i<j\leq n} F_{ij}dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j := dA$.

Réponse — Il s'agit d'expliciter l'équation $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial v^i}(x,\dot{x})\right) = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial x^i}(x,\dot{x})$. Pour cela nous commençons par calculer
$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial v^i}(x,v) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v) + A_i(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial v^i}(x,\dot{x})\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(x,\dot{x})\right) + \frac{\partial A_i}{\partial x^j}(x)\dot{x}^j$$
et
$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial x^i}(x,v) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(x,v) + \frac{\partial A_j}{\partial x^i}(x)v^j \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial x^i}(x,\dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(x,\dot{x}) + \frac{\partial A_j}{\partial x^i}(x)\dot{x}^j.$$
Nous obtenons ainsi
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(x,\dot{x})\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(x,\dot{x}) + \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\right)\dot{x}^j = \frac{\partial L}{\partial x^i}(x,\dot{x}) + F_{ij}(x)\dot{x}^j.$$

2) (Etude d'un exemple.) On suppose que $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $L(x,v) = \frac{1}{2}m|v|^2$ et on pose $B = F_{12}$. Ecrire les équations d'Euler–Lagrange pour les points critiques de $\widetilde{\mathcal{L}}$ dans ce cas et expliciter les solutions de ces équations.

Réponse — Dans ce cas $\frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v) = mv^i$ et $\frac{\partial L}{\partial x^i}(x,v) = 0$. Nous obtenons comme système d'équations d'Euler–Lagrange :
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(m\dot{x}^1) = F_{1j}\dot{x}^j = F_{12}\dot{x}^2 = B\dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{x}^2) = F_{2j}\dot{x}^j = F_{21}\dot{x}^1 = -B\dot{x}^1 \end{array} \right.$$
soit encore
$$m\begin{pmatrix} \ddot{x}^1 \\ \ddot{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix}.$$
Les solutions sont (en notant a^1, a^2, φ et V des constantes d'intégration) :
$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + \frac{mV}{B}\begin{pmatrix} -\cos(\frac{B}{m}t - \varphi) \\ \sin(\frac{B}{m}t - \varphi) \end{pmatrix},$$
(solutions circulaires), si $B \neq 0$ et
$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 + tv^1 \\ a^2 + tv^2 \end{pmatrix},$$

(droites) si $B = 0$.
3) On suppose dans cette question et les suivantes que la transformée de Legendre pour L est *non dégénérée*, c'est à dire que :

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \Omega \times (\mathbb{R}^n)^* \\ (x,v) & \longmapsto & \left(x, \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v)dx^i\right) \end{array}$$

est un difféomorphisme. On définit $H : \Omega \times (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$H(x,p) = p_i v^i - L(x,v) \quad \text{pour tout } (x,v,p) \text{ tel que } p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v).$$

Démontrer que la transformée de Legendre pour $\widetilde{L}$ est également non dégénérée. On notera $\widetilde{p}_i$ les coordonnées de l'impulsion pour la transformée de Legendre de $\widetilde{L}$ et $\widetilde{H}$ l'hamiltonien qui est image de $\widetilde{L}$. Exprimer $\widetilde{p}$ en fonction de p et A et $\widetilde{H}$ en fonction de H et A.
Réponse — La coordonnée $\widetilde{p}_i$ est définie par la relation :

$$\widetilde{p}_i = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial v^i}(x,v) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v) + A_i(x)$$

et $\widetilde{H}$ est la fonction définie par :

$$\widetilde{H}(x,\widetilde{p}) = \widetilde{p}_i v^i - \widetilde{L}(x,v) \quad \text{pour tout } (x,v,\widetilde{p}) \text{ tel que } \widetilde{p}_i = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial v^i}(x,v).$$

Nous remarquons que, en posant $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v)$, la condition $\widetilde{p}_i = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial v^i}(x,v)$ est équivalente à $\widetilde{p}_i = p_i + A_i(x)$ et l'équation qui définit $\widetilde{H}$ s'écrit alors :

$$\widetilde{H}(x, p + A_x) = (p_i + A_i(x))v^i - \widetilde{L}(x,v) \quad \text{pour tout } (x,v,p) \text{ tel que } p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v).$$

Cela nous donne :

$$\widetilde{H}(x, p + A(x)) = (p_i + A_i(x))v^i - (L(x,v) + A_i(x)v^i) = p_i v^i - L(x,v) = H(x,p).$$

Donc

$$\widetilde{H}(x,\widetilde{p}) = H(x, \widetilde{p} - A_x).$$

4) On note $\widetilde{\omega} = d\widetilde{p}_i \wedge dx^i$ la forme symplectique sur $T^*\Omega = \Omega \times (\mathbb{R}^n)^*$. Expliciter les coordonnées du champ de vecteur hamiltonien $\xi_{\widetilde{H}}$ associé à $\widetilde{H}$ en fonction de H et de A.
Réponse — Notons

$$\xi_{\widetilde{H}} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial}{\partial \widetilde{p}_i}$$

et cherchons les valeurs que doivent prendre les fonctions a^i et b_i de façon à avoir $\xi_{\widetilde{H}} \lrcorner \widetilde{\omega} + d\widetilde{H} = 0$. Nous avons d'une part

$$\xi_{\widetilde{H}} \lrcorner \widetilde{\omega} = b_i dx^i - a^i d\widetilde{p}_i$$

et, d'autre part, en utilisant le résultat de la question précédente,

$$d\widetilde{H} = \left(\frac{\partial H}{\partial x^i}(x, \widetilde{p} - A_x) - \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, \widetilde{p} - A_x)\frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) dx^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}(x, \widetilde{p} - A_x) d\widetilde{p}_i.$$

On en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^i(x,\widetilde{p}) & = & \frac{\partial H}{\partial p_i}(x, \widetilde{p} - A_x) \\ b_i(x,\widetilde{p}) & = & -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x, \widetilde{p} - A_x) + \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, \widetilde{p} - A_x)\frac{\partial A_j}{\partial x^i}. \end{array} \right.$$

Donc

$$\xi_{\widetilde{H}} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x, \widetilde{p} - A_x)\frac{\partial}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial H}{\partial x^i}(x, \widetilde{p} - A_x) - \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, \widetilde{p} - A_x)\frac{\partial A_j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

5) On note

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & T^*\Omega & \longrightarrow & T^*\Omega \\ & (x,p) & \longmapsto & (x, p + A_x). \end{array}$$

Calculer $\varphi^*\widetilde{H} = \widetilde{H} \circ \varphi$ et $\varphi^*\widetilde{\omega}$ en fonction de H, A et $\omega := dp_i \wedge dx^i$. Ecrire les équations de Hamilton pour $\varphi^*\widetilde{H}$ et $\varphi^*\widetilde{\omega}$, c'est à dire les équations du flot du champ de vecteur ζ sur $T^*\Omega$ défini par $\zeta \lrcorner \varphi^*\widetilde{\omega} + d\varphi^*\widetilde{H} = 0$. Interpréter.

Réponse — On obtient $(\varphi^*\widetilde{H})(x,p) = H(x,p)$ et $\varphi^*\widetilde{\omega} = \omega + F$. Pour écrire les équations de Hamilton correspondant à ce hamiltonien et avec cette forme symplectique, on recherche d'abord les composantes du champ de vecteur hamiltonien ζ tel que $\zeta \lrcorner \varphi^*\widetilde{\omega} + d\varphi^*\widetilde{H} = 0$. Notant $\zeta = a^i\frac{\partial}{\partial x^i} + b_i\frac{\partial}{\partial p_i}$, on obtient en écrivant l'équation précédente que :

$$\zeta = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x,p)\frac{\partial}{\partial x^i} + \left(-\frac{\partial H}{\partial x^i}(x,p) + F_{ij}(x)\frac{\partial H}{\partial p_j}(x,p)\right)\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Les équations de la dynamique sont donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx^i}{dt} & = & \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(x,p) \\ \dfrac{dp_i}{dt} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}(x,p) + F_{ij}(x)\dfrac{\partial H}{\partial p_j}(x,p). \end{array}\right.$$

On reconnaît alors facilement que ces équations sont équivalentes aux équations d'Euler–Lagrange obtenues à la question 1). On conclut de tout cela que, pour tenir compte du passage du lagrangien L au lagrangien $\widetilde{L}$ dans la formulation hamiltonienne, il suffit

— soit de remplacer H par $\widetilde{H}$ défini par $\widetilde{H}(x, \widetilde{p}) = H(x, \widetilde{p} - A_x)$ et ω par $\widetilde{\omega} = d\widetilde{p}_i \wedge dx^i$ (c'est le résultat de la question 3) ;

— soit de ne pas changer l'hamiltonien, mais de remplacer la forme symplectique ω par $\omega + F = d(p_i + A_i(x)) \wedge dx^i$.

Dans tous les cas, cela repose sur la substitution $p \longmapsto \widetilde{p} = p + A_x$.

6) Que peut-on dire dans les questions précédentes lorsque $A = dV$, où $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$?

Réponse — Si $A = dV$, alors $F = dA = 0$. Les équations d'Euler–Lagrange ne changent pas. Cependant il est remarquable que l'hamiltonien $\widetilde{H}$ correspondant au lagrangien $L(x,v) + A_i(x)v^i$ est différent de H, bien que la dynamique soit identique. Cela montre que, dans la formulation hamiltoniennne, l'impulsion p n'est définie que modulo l'addition d'une forme exacte en la variable x.

(Remarque : *au niveau quantique cette propriété sera transposée sous la forme suivante : la fonction d'onde n'est pas réellement une fonction définie sur l'espace et à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais une section d'un fibré en droites vectorielles complexes.*)

6 Théorème de Noether

Soit $\mathcal{M}$ une variété et $T\mathcal{M}$ son fibré tangent. On note $x = (x^i)$ les coordonnées locales sur $\mathcal{M}$ et $(x,v) = (x^i, v^i)$ des coordonnées locales sur $T^*\mathcal{M}$. On se donne une densité lagrangienne $L : \mathbb{R} \times T\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$ et pour tous temps $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $t_1 < t_2$, on note

$$\mathcal{F}_{t_1}^{t_2}[\gamma] := \int_{t_1}^{t_2} L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt.$$

On considère un champ de vecteur tangent à $\mathcal{M}$ et dépendant du temps $X = X^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ (donc défini sur $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$) et une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit

γ_s par $\gamma_s(t) := e^{sX(t,\cdot)}(\gamma(t))$. On dit que X *est une symétrie infinitésimale de L modulo df* si, pour tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$ et pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $t_1 < t_2$,

$$\frac{d}{ds}\left(\mathcal{F}_{t_1}^{t_2}[\gamma_s]\right)\Big|_{s=0} = f(t_2, \gamma(t_2)) - f(t_1, \gamma(t_1)).$$

1) Démontrer que X est une symétrie infinitésimale de L modulo df ssi $\forall (t,x,v) \in \mathbb{R} \times T\mathcal{M}$,

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,v)X^i(t,x) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)\left(\frac{\partial X^i}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial X^i}{\partial x^i}(t,x)v^i\right) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,x)v^i.$$

Réponse — Pour tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$, nous avons

$$\gamma_s(t) = \gamma(t) + s\delta\gamma(t) + o(s),$$

où $\delta\gamma^i(t) := X^i(t, \gamma(t))$. Pour tout $t_1 < t_2$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\mathcal{F}_{t_1}^{t_2}[\gamma_s]\right)|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\delta\dot\gamma^i\right)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma)X^i(t,\gamma) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\left(\frac{\partial X^i}{\partial t}(t,\gamma) + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(t,\gamma)\dot\gamma^j\right)\right]dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\delta_X L(t,\gamma,\dot\gamma)dt,
\end{aligned}$$

où l'on a introduit la notation

$$\delta_X L(t,\gamma,\dot\gamma) := \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma)X^i(t,\gamma) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\left(\frac{\partial X^i}{\partial t}(t,\gamma) + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(t,\gamma)\dot\gamma^j\right).$$

On voit que cette quantité est égale à la valeur prise en $(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))$ par la fonction

$$\begin{array}{rccl}
\delta_X L: & \mathbb{R}\times T\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (t,x,v) & \longmapsto & \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,v)X^i(t,x) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)\left(\frac{\partial X^i}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(t,x)v^j\right).
\end{array}$$

La condition que X est une symétrie modulo df s'écrit : $\forall t_1 < t_2$,

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta_X L(t,\gamma,\dot\gamma)dt = f(t_2,\gamma(t_2)) - f(t_1,\gamma(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(f(t,\gamma(t))\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\gamma) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,\gamma)\dot\gamma^i\right)dt.$$

Comme elle est satisfaite pour tout t_1 et t_2, elle équivant à : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\delta_X L(t,\gamma,\dot\gamma) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,\gamma) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(t,\gamma)\dot\gamma^i.$$

Comme γ est quelconque, cela entraîne le résultat.

2) Démontrer que, si l'hypothèse précédente est vérifiée et si γ est point critique de $\mathcal{L}$, alors la quantité

$$Q(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))X^i(t,\gamma(t)) - f(t,\gamma(t))$$

est conservée.

Réponse — Remarquons en préliminaire que la relation précédente peut s'écrire : $\forall \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$,

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma)X^i(t,\gamma) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\frac{d}{dt}\left(X^i(t,\gamma)\right) = \frac{d}{dt}\left(f(t,\gamma(t))\right). \tag{7}$$

Supposons que γ est point critique de $\mathcal{L}$. Alors γ est solution de l'équation d'Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma). \tag{8}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\right)X^i(t,\gamma) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\frac{d}{dt}\left(X^i(t,\gamma)\right) - \frac{d}{dt}\left(f(t,\gamma(t))\right) \\
&=^{(8)} \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma)X^i(t,\gamma) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\frac{d}{dt}\left(X^i(t,\gamma)\right) - \frac{d}{dt}\left(f(t,\gamma(t))\right) \\
&=^{(7)} 0.
\end{aligned}$$

3) Appliquer le résultat précédent au cas suivant : $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$, $L(t,x,v) = \frac{1}{2}m|v|^2$, $X(t,x) := (t-t_0)V^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, où $V = (V^1,V^2,V^3) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à déterminer. Interpréter le sens de cette symétrie et de la quantité conservée.
Réponse — Pour $L(t,x,v) = \frac{1}{2}m|v|^2$ et $X(t,x) = (t-t_0)V$,

$$\begin{aligned}
\delta_X L(t,x,v) &= \frac{\partial L}{\partial x^i}(t,x,v)X^i(t,x) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)\left(\frac{\partial X^i}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(t,x)v^j\right) \\
&= 0 + \sum_i mv^i(V^i+0) = \sum_i mv^iV^i = m\langle v,V\rangle.
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\frac{\partial(m\langle x,V\rangle)}{\partial t} + \frac{\partial(m\langle x,V\rangle)}{\partial x^i}v^i = 0 + m\langle v,V\rangle = m\langle v,V\rangle.$$

Donc X est une symétrie de L modulo df, où

$$f(t,x) := m\langle x,V\rangle.$$

La quantité conservée est

$$Q(t) = \sum_i m\dot\gamma^i(t-t_0)V^i - m\langle\gamma,V\rangle = -m\langle\gamma-(t-t_0)\dot\gamma,V\rangle.$$

On peut d'ailleur vérifier immédiatement que $\frac{d}{dt}\left(\gamma(t)-(t-t_0)\dot\gamma(t)\right) = 0$ si γ est point critique de $\mathcal{L}$, c'est à dire solution de $\ddot\gamma = 0$. La quantité $\gamma(t)-(t-t_0)\dot\gamma(t)$ vaut $\gamma(t_0)$: c'est la position de la particule à l'instant t_0.

7 Transformations canoniques

Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension n et $T\mathcal{M}$ son fibré cotangent. On note $x = (x^i)$ des coordonnées locales sur $\mathcal{M}$ et $(x,p) = (x^i,p^i)$ des coordonnées locales sur $T^*\mathcal{M}$. On munit $T^*\mathcal{M}$ de la forme symplectique $\omega := d\theta$, où $\theta := p_idx^i$. On se donne une fonction régulière $H : T^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ et on définit le champ de vecteur hamiltonien associé ξ_H par $\xi_H \lrcorner\, \omega + dH = 0$. On note $e^{s\xi_H}$ le flot de ξ_H (on pourra supposer qu'il est défini pour toute valeur de $s \in \mathbb{R}$). On se donne deux valeurs $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ telles que $t_1 < t_2$ et on pose $\mathcal{C}_{t_1}^{t_2} := \{(\gamma,\pi) \in \mathcal{C}^2([t_1,t_2],T^*\mathcal{M})\}$ et on définit sur $\mathcal{C}_{t_1}^{t_2}$ la fonctionnelle

$$\mathcal{P}[\gamma,\pi] := \int_{t_1}^{t_2}\left(\pi_i(t)\dot\gamma^i(t) - H(\pi(t),\gamma(t))\right)dt.$$

1) Déterminer l'équation d'Euler–Lagrange de $\mathcal{P}$ (pour des variations laissant $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ fixes et $\pi(t_1)$ et $\pi(t_2)$ libres).
Réponse — Nous calculons la variation première de $\mathcal{P}$. Soit $(\pi^{(s)},\gamma_{(s)}) := (\pi,\gamma) + s(\delta\pi,\delta\gamma) + o(s)$ une déformation de (π,γ) telle que $\delta\gamma(t_2) = \delta\gamma(t_1) = 0$. Nous calculons alors que

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{P}_{[\gamma,\pi]}[\delta\gamma,\delta\pi] &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\pi_i\dot\gamma^i + \pi_i\dot{\delta\gamma}^i - \frac{\partial H}{\partial x^i}(\pi,\gamma)\delta\gamma^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}(\pi,\gamma)\delta\pi_i\right)dt \\
&= \left[\pi_i\delta\gamma^i\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\left(-\dot\pi_i - \frac{\partial H}{\partial x^i}(\pi,\gamma)\right)\delta\gamma^i + \left(\dot\gamma^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}(\pi,\gamma)\right)\delta\pi_i\right)dt.
\end{aligned}$$

Le terme $\left[\pi_i\delta\gamma^i\right]_{t_1}^{t_2}$ s'annule à cause des conditions au bord imposées à $\delta\gamma$. On en déduit donc le système d'équations d'Euler–Lagrange :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\pi_i}{dt} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}(\pi,\gamma) \\ \dfrac{d\gamma^i}{dt} & = & \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(\pi,\gamma), \end{array}\right.$$

qui n'est pas autre chose que le système des équations de Hamilton.
2) On suppose que, pour tout $(x_1,x_2)\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}$, il existe une unique application $\left(\gamma_{(x_1,x_2)},\pi_{(x_1,x_2)}\right)\in\mathcal{C}_{t_1}^{t_2}$ telle que $\gamma_{(x_1,x_2)}(t_1)=x_1$, $\gamma_{(x_1,x_2)}(t_2)=x_2$ et qui est solution des équations d'Euler–Lagrange de $\mathcal{P}$. On suppose que $(x_1,x_2)\longmapsto(\gamma_{(x_1,x_2)},\pi_{(x_1,x_2)})$ est $\mathcal{C}^1$ et on définit $W:\mathcal{M}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathbb{R}$ par

$$W(x_1,x_2):=\mathcal{P}[\gamma_{(x_1,x_2)},\pi_{(x_1,x_2)}].$$

Calculer dW.
Réponse — Soient deux vecteurs $y_1\in T_{x_1}\mathcal{M}$ et $y_2\in T_{x_2}\mathcal{M}$. Alors il est possible d'étendre ces vecteurs en des champs de vecteur sur $\mathcal{M}$ que l'on continue à noter y_1 et y_2 respectivement (il suffit pour cela de prendre les champs de vecteurs qui ont les coordonnées constantes dans le système de coordonnées utilisées sur $\mathcal{M}$). On note alors $e^{sy_1}(x_1)=x_1+sy_1$ et $e^{sy_2}(x_2)=x_2+sy_2$, pour $s\in\mathbb{R}$ suffisamment petit. Notons alors

$$(\gamma_s,\pi_s):=\left(\gamma_{(x_1+sy_1,x_2+sy_2)},\pi_{(x_1+sy_1,x_2+sy_2)}\right)=:(\gamma,\pi)+s(\delta\gamma,\delta\pi)+o(s).$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial W}{\partial x_1^i}(x_1,x_2)y_1^i+\dfrac{\partial W}{\partial x_2^i}(x_1,x_2)y_2^i & = & \dfrac{d}{ds}\left(W(x_1+sy_1,x_2+sy_2)\right)|_{s=0} \\ & = & \dfrac{d}{ds}\left(\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left(\pi_{s,i}\dot{\gamma}_s^i-H(\pi_s,\gamma_s)\right)dt\right)|_{s=0} \\ & = & \displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\pi_i\dot{\gamma}^i+\pi_i\dot{\delta\gamma}^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}(\pi,\gamma)\delta\pi_i-\frac{\partial H}{\partial x^i}(\pi,\gamma)\delta\gamma^i\right]dt \\ & = & \left[\pi_i\delta\gamma^i\right]_{t_1}^{t_2}+\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left[-\left(\dot{\pi}_i+\frac{\partial H}{\partial x^i}(\pi,\gamma)\right)\delta\gamma^i+\left(\dot{\gamma}^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}(\pi,\gamma)\right)\delta\pi_i\right]dt. \end{array}$$

La dernière intégrale s'annule car (γ,π) est solution des équations d'Euler–Lagrange (i.e. les équations de Hamilton). Il reste donc le terme de bord :

$$dW_{(x_1,x_2)}(y_1,y_2)=\pi_i(t_2)\delta\gamma^i(t_2)-\pi_i(t_1)\delta\gamma^i(t_1).$$

Utilisant les identités $\pi=\pi_{(x_1,x_2)}$, $\delta\gamma(t_1)=y_1$ et $\delta\gamma(t_2)=y_2$, nous avons $dW_{(x_1,x_2)}(y_1,y_2)=\pi_{(x_1,x_2),i}(t_2)y_2^i-\pi_{(x_1,x_2),i}(t_1)y_1^i$, soit donc

$$dW_{(x_1,x_2)}=\pi_{(x_1,x_2),i}(t_2)dx_2^i-\pi_{(x_1,x_2),i}(t_1)dx_1^i.$$

3) On pose $\Phi:=e^{(t_2-t_1)\xi_H}:T^*\mathcal{M}\longrightarrow T^*\mathcal{M}$ et on note $G:=\{(x,p,\Phi(x,p));(x,p)\in T^*\mathcal{M}\}$ son graphe. Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \psi: & G & \longrightarrow & \mathcal{M}\times\mathcal{M} \\ & (x_1,p_1,x_2,p_2) & \longmapsto & (x_1,x_2) \end{array}$$

est un difféomorphisme.
Réponse — G est une sous-variété lisse de dimension $2n$ de $T^*\mathcal{M}\times T^*\mathcal{M}$ et l'application

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathcal{M}\times T^*\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}\times\mathcal{M} \\ (x_1,p_1,x_2,p_2) & \longmapsto & (x_1,x_2) \end{array}$$

est régulière. Donc la restriction de cette application à G, c'est à dire ψ, est régulière.

Le fait que ψ est inversible est une conséquence directe de l'hypothèse faite à la question précédente : pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, il existe toujours une unique trajectoire hamiltonienne $(\gamma_{(x_1,x_2)}, \pi_{(x_1,x_2)})$ qui joint x_1 à l'instant t_1 à x_2 à l'instant t_2. Cette trajectoire est, d'après le résultat de la question 1), la solution de

$$\frac{d(\gamma, \pi)}{dt} = \xi_H(\gamma, \pi) \quad \text{sur } [t_1, t_2].$$

Notons que les conditions aux extrémités peuvent s'écrire

$$\left(x_1, \pi_{(x_1,x_2)}(t_1)\right) = (\gamma(t_1), \pi(t_1)) \quad \text{et} \quad \left(x_2, \pi_{(x_1,x_2)}(t_2)\right) = (\gamma(t_2), \pi(t_2)).$$

Autrement dit, $\left(x_2, \pi_{(x_1,x_2)}(t_2)\right) = \Phi\left(x_1, \pi_{(x_1,x_2)}(t_1)\right)$, soit encore $\left(x_1, \pi_{(x_1,x_2)}(t_1), x_2, \pi_{(x_1,x_2)}(t_2)\right) \in G$. Nous en déduisons que $\psi^{-1}(x_1, x_2) = \left(x_1, \pi_{(x_1,x_2)}(t_1), x_2, \pi_{(x_1,x_2)}(t_2)\right)$.
Remarque — Comme de plus on a supposé que l'application $(x_1, x_2) \longmapsto (\gamma_{(x_1,x_2)}, \pi_{(x_1,x_2)})$ est régulière, on en déduit que ψ^{-1} est régulière, donc (admettant que la différentielle de ψ est partout de rang maximal), ψ est un difféomorphisme.
4) On considère les applications

$$\begin{array}{rccc} \Pi_1 : & G & \longrightarrow & T^*\mathcal{M} \\ & (x_1, p_1, x_2, p_2) & \longmapsto & (x_1, p_1) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \Pi_2 : & G & \longrightarrow & T^*\mathcal{M} \\ & (x_1, p_1, x_2, p_2) & \longmapsto & (x_2, p_2) \end{array}$$

Montrer que $\Pi_2^*\theta - \Pi_1^*\theta$ est une 1-forme exacte (indication : considérer $W \circ \psi$).
Réponse — Remarquons que $\pi_2^*\theta - \pi_1^*\theta$ est la rectriction à G de la 1-forme $p_{2,i}dx_2^i - p_{1,i}dx_1^i$. Sa valeur en un point $\psi^{-1}(x_1, x_2) \in G$ est :

$$\pi_{(x_1,x_2),i}(t_2)dx_2^i - \pi_{(x_1,x_2),i}(t_1)dx_1^i = (\pi_2^*\theta - \pi_1^*\theta)_{\psi^{-1}(x_1,x_2)}.$$

On voit d'après le résultat de la question 2) que cela coïncide avec $dW_{x_1,x_2)} \circ d\psi_{\psi^{-1}(x_1,x_2)} = d(W \circ \psi)_{\psi^{-1}(x_1,x_2)}$. Donc

$$\pi_2^*\theta - \pi_1^*\theta = d(W \circ \psi).$$

En particulier $\pi_2^*\theta - \pi_1^*\theta$ est exacte.
5) Déduire de ce qui précède que $\Phi^*\omega = \omega$ (indication : utiliser le fait que Π_1 est un difféomorphisme).
Réponse — De la question précédente on déduit

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & d(d(W \circ \psi)) = d\left(\pi_2^*\theta - \pi_1^*\theta\right) \\ & = & \pi_2^*d\theta - \pi_1^*d\theta = \pi_2^*\omega - \pi_1^*\omega. \end{array}$$

Comme π_1 est un difféomorphisme (théorème de Cauchy–Lipschitz pour le flot de ξ_H) entre $T^*\mathcal{M}$ et G, cela entraîne que

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \left(\pi_1^{-1}\right)^*\left(\pi_2^*\omega - \pi_1^*\omega\right) = \left(\pi_1^{-1}\right)^*\pi_2^*\omega - \left(\pi_1^{-1}\right)^*\pi_1^*\omega \\ & = & \left(\pi_2 \circ \pi_1^{-1}\right)^*\omega - \omega = \Phi^*\omega - \omega. \end{array}$$

8 Usage de multiplicateurs de Lagrange

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\mathcal{M}$ une variété de dimension n. On notera $T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M}$ le fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}$ dont la fibre en le point $x \in \mathcal{M}$ est $T_x\mathcal{M} \oplus T_x^*\mathcal{M}$. Un point sur $T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M}$ est donc un triplet (x, v, p), où $x \in \mathcal{M}$, $v \in T_x\mathcal{M}$ et $p \in T_x^*\mathcal{M}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} L : & I \times T\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, v) & \longmapsto & L(t, x, v) \end{array}$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. À L est associée la fonctionnelle $\mathcal{L}$ définie sur $\mathcal{C}^\infty(I, \mathcal{M})$ par $\mathcal{L}[\gamma] = \int_I L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$, pour tout $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathcal{M})$. On suppose que la transformée de Legendre $I \times T\mathcal{M} \longrightarrow I \times T^*\mathcal{M}$ qui, à (t, x, v), associe $(t, x, \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v)dx^i)$ est un difféomorphisme (hypothèse de Legendre) et on note $(t, x, p) \longmapsto (t, x, V(t, x, p))$ l'application inverse.

(i) On considère sur $\mathcal{C}^\infty(I, T\mathcal{M})$ la fonctionnelle $\mathcal{L}^T$ définie par $\mathcal{L}^T[\gamma,\zeta] = \int_I L(t,\gamma(t),\zeta(t))dt$, pour tout $(\gamma,\zeta) \in \mathcal{C}^\infty(I,T\mathcal{M})$. Déterminer l'équation d'Euler–Lagrange de cette fonctionnelle. Est-ce vraiment intéressant ?
Réponse — Soit $(x^i,v^i)_{1\leq i\leq n}$ des coordonnées locales sur $T\mathcal{M}$, et notons $\gamma^i = x^i\circ\gamma$ et $\zeta^i = v^i\circ(\gamma,\zeta)$. Sous l'effet d'une déformation de (γ^i,ζ^i) de la forme $(\gamma^i+\varepsilon\delta\gamma^i, \zeta^i+\varepsilon\delta\zeta^i)+o(\varepsilon)$, où $(\delta\gamma^i,\delta\zeta^i)$ est à support compact dans l'intérieur de I, la variation de $\mathcal{L}^T$ sous cette déformation est :
$$\int_I\left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\zeta)\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\zeta)\delta\zeta^i\right]dt.$$
Elle s'annule pour tout $(\delta\gamma,\delta\zeta)$ ssi $\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\zeta) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\zeta) = 0$. Ces deux conditions ne conduisent donc pas à des équations différentielles. Leur intérêt est donc très limité.

(ii) Sur $T\mathcal{M}\oplus_\mathcal{M} T^*\mathcal{M}$ on considère la fonctionnelle $\mathcal{L}^{TT^*}$ qui, à $(\gamma,\zeta,\pi)\in\mathcal{C}^\infty(I,T\mathcal{M}\oplus_\mathcal{M}T^*\mathcal{M})$, associe
$$\mathcal{L}^{TT^*}[\gamma,\zeta,\pi] = \int_I\left[L(t,\gamma(t),\zeta(t)) + \pi_i(t)(\dot\gamma^i(t)-\zeta^i(t))\right]dt.$$
Déterminer les équations d'Euler–Lagrange satisfaites par une application (γ,ζ,π) qui est point critique pour des variations $(\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi)$ (sections de $(\gamma,\zeta,\pi)^*T\mathcal{M}\oplus_\mathcal{M}T^*\mathcal{M}$) à support compact.
Réponse — On suit la même démarche qu'à la question précédente. Partant d'une déformation qui s'exprime en coordonnées locales $(\gamma^i+\varepsilon\delta\gamma^i,\zeta^i+\varepsilon\delta\zeta^i,\pi_i+\varepsilon\delta\pi_i)+o(\varepsilon)$, on obtient
$$\begin{aligned}&\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi)\\ &\quad= \int_I\left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\zeta)\delta\gamma^i + \pi_i\frac{d(\delta\gamma^i)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\zeta)\delta\zeta^i - \pi_i\delta\zeta^i + \left(\frac{d\gamma^i}{dt}-\zeta^i\right)\delta\pi_i\right]dt\\ &= \int_I\left[\frac{d(\pi_i\delta\gamma^i)}{dt} + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\zeta)-\frac{d\pi_i}{dt}\right)\delta\gamma^i + \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\zeta)-\pi_i\right)\delta\zeta^i + \left(\frac{d\gamma^i}{dt}-\zeta^i\right)\delta\pi_i\right]dt.\end{aligned}$$
Ainsi l'équation d'Euler–Lagrange est le système
$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\zeta) = \frac{d\pi_i}{dt},\quad \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\zeta) = \pi_i \quad\text{et}\quad \frac{d\gamma^i}{dt} = \zeta^i.$$

Pour toute variation $(\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi)$, on pose $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi) = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\mathcal{L}^{TT^*}(\gamma_\varepsilon,\zeta_\varepsilon,\pi_\varepsilon)\right)|_{\varepsilon=0}$, où $\frac{d(\gamma_\varepsilon,\zeta_\varepsilon,\pi_\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = (\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi)$.

(iii) Montrer que les solutions des équations obtenues à la question précédente correspondent aux points critiques de $\mathcal{L}$.
Réponse — En remplaçant la ζ^i par la valeur donnée par la dernière équation dans les deux premières équations, on obtient :
$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma) = \frac{d\pi_i}{dt} \quad\text{et}\quad \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma) = \pi_i.$$
En remplaçant la valeur π_i par celle donnée par la dernière équation dans la première, on obtient alors : $\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\right)$, qui est précisément l'équation d'Euler–Lagrange satisfaite par les points critiques de $\mathcal{L}$.

(iv) Déterminer les applications (γ,ζ,π) qui sont solutions de $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,0,\delta\pi) = 0$, $\forall\delta\pi$. Donner une expression simple de la valeur de $\mathcal{L}^{TT^*}(\gamma,\zeta,\pi)$ pour une telle solution.
Réponse — Au vu du calcul de la question (ii), il s'agit des applications telles que l'équation $\frac{d\gamma^i}{dt} = \zeta^i$ est satisfaite. On obtient donc $(\gamma,\zeta,\pi) = (\gamma,\dot\gamma,\pi)$. On a alors
$$\mathcal{L}^{TT^*}[\gamma,\dot\gamma,\pi] = \int_I\left[L(t,\gamma,\zeta)+\pi_i(\dot\gamma^i-\dot\gamma^i)\right]dt = \int_I L(t,\gamma,\zeta)dt = \mathcal{L}[\gamma].$$

(v) Déterminer les applications (γ,ζ,π) qui sont solutions de $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,\delta\zeta,0)=0$, $\forall\delta\zeta$. Donner une expression simple de la valeur de $\mathcal{L}^{TT^*}(\gamma,\zeta,\pi)$ pour une telle solution.
Réponse — Au vu du calcul de la question (ii), il s'agit des applications (γ,ζ,π) telles que $\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\zeta)=\pi_i$ et donc telles que ζ et π sont liés par la transformée de Legendre. On a alors

$$\mathcal{L}^{TT^*}[\gamma,\dot\gamma,\pi]=\int_I\left[\pi_i\dot\gamma^i-\pi_i\zeta^i+L(t,\gamma,\zeta)\right]dt=\int_I\left[\pi_i\dot\gamma^i-\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\zeta)\zeta^i+L(t,\gamma,\zeta)\right]dt.$$

On reconnaît l'hamiltonien H, défini implicitement par $H(t,x,p)=\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)v^i-L(t,x,v)$, si $p_i=\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)$. Ainsi

$$\mathcal{L}^{TT^*}[\gamma,\dot\gamma,\pi]=\int_I\left[\pi_i\dot\gamma^i-H(t,\gamma,\pi)\right]dt=\int_{(t,\gamma,\pi)(I)}p_idx^i-H(t,x,p)dt$$

et on retrouve l'action de Poincaré.

(vi) Justifier le fait que les conditions $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,0,\delta\pi)=0$, $\forall\delta\pi$ ou $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,\delta\zeta,0)=0$, $\forall\delta\zeta$ ont bien un sens (en particulier indépendant de tout système de coordonnées).
Réponse — Définissons les projections $\pi_1:T\mathcal{M}\oplus_{\mathcal{M}}T^*\mathcal{M}\longrightarrow T\mathcal{M}$ et $\pi_2:T\mathcal{M}\oplus_{\mathcal{M}}T^*\mathcal{M}\longrightarrow T^*\mathcal{M}$ par : $\pi_1(x,v,p)=(x,v)$ et $\pi_2(x,v,p)=(x,p)$. Ces applications sont bien définies, indépendamment de tout système de coordonnées. Nous remarquons que les variations $(0,0,\delta\pi)$ sont des variations $\delta=(\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi)$ telles que $(\pi_1)_*\delta=0$. De même les variations $(0,\delta\zeta,0)$ sont des variations δ telles que $(\pi_2)_*\delta=0$.

9 Assemblée d'oscillateurs harmoniques

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $L:T\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ défini par $L(x,v):=\frac12\sum_{j=1}^n(v^j)^2-\frac12\sum_{j=1}^n(x^j)^2$. Il sera commode d'identifier $T\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ et d'identifier x et v avec les matrices colonnes $x=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^n\end{pmatrix}$, de sorte que $L(x,v)=\frac12({}^tvv-{}^txx)$. Sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, on définit l'action $\mathcal{L}[\gamma]:=\int_{\mathbb{R}}L(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$.

(i) Déterminer les équations d'Euler–Lagrange satisfaites par les points critiques de cette action. Déterminer l'ensemble des solutions de ces équations, que l'on notera $\mathcal{E}$.
Réponse — On peut aussi écrire $\mathcal{L}[\gamma]=\int_{\mathbb{R}}\frac12\left(|\dot\gamma|^2-|\gamma|^2\right)dt$. La variation première de cette action est :

$$\delta\mathcal{L}_\gamma(\delta\gamma)=\int_{\mathbb{R}}\Big(\langle\dot\gamma,\dot{\delta\gamma}\rangle-\langle\gamma,\delta\gamma\rangle\Big)dt=\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{d\langle\dot\gamma,\delta\gamma\rangle}{dt}-\langle\ddot\gamma+\gamma,\delta\gamma\rangle\right]dt.$$

L'équation d'Euler–Lagrange est donc $\ddot\gamma+\gamma=0$. Ses solutions sont de la forme

$$\gamma(t)=\frac12\left(Ze^{it}+\overline{Z}e^{-it}\right)=\mathrm{Re}(Ze^{it}),\quad \text{où } Z\in\mathbb{C}^n.$$

(ii) Calculer la transformée de Legendre de cette action et l'hamiltonien $H\in\mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ correspondant. On pourra identifier un élément $p\in(\mathbb{R}^n)^*$ avec une matrice ligne $p=(p_1\cdots p_n)$. Ecrire le système des équations de Hamilton. On notera $\omega=dp_i\wedge dx^i$ la forme symplectique sur $T^*\mathbb{R}^n$.
Réponse — On a $\frac{\partial L}{\partial v^i}=v^i$ et donc $p_i=v_i$. Donc

$$H(x,p)=p_iv^i-\frac12\left(|v|^2-|x|^2\right)=\frac12\left(|p|^2+|x|^2\right)=\frac12\left(p\,{}^tp+{}^txx\right).$$

Les équations de Hamilton sont $\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}(x,p)=p_i$ et $\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x^i}(x,p)=-x^i$.

(iii) On note $\mathfrak{u}(n) := \{u = A + iB / A, B \in M(n, \mathbb{R}),\ {}^tA + A = 0,\ {}^tB = B\}$ [3]. On écrira :

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B^{11} & \cdots & B^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B^{n1} & \cdots & B^{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

ainsi que $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) := \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial p}\right) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_n} \end{pmatrix}$. À toute matrice $u = A + iB \in \mathfrak{u}(n)$, on associe le champ de vecteur

$$\xi_u := (A_j^i x^j + B^{ij} p_j)\frac{\partial}{\partial x^i} - (A_i^j p_j + B_{ij} x^j)\frac{\partial}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(Ax + B\,{}^tp) - (pA + {}^txB)\left(\frac{\partial}{\partial p}\right).$$

Montrer qu'il existe une unique fonction $f_u \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ telle que $\xi_u \lrcorner\, \omega + df_u = 0$ et $f_u(0,0) = 0$.
Réponse — On peut encore écrire $\xi_u = (Ax + B\,{}^tp)^i \frac{\partial}{\partial x^i} - (pA + {}^txB)_i \frac{\partial}{\partial p_i}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \xi_u \lrcorner\, \omega &= (Ax + B\,{}^tp)^i(-dp_i) - (pA + {}^txB)_i dx^i = -dp(Ax + B\,{}^tp) - (pA + {}^txB)dx \\ &= -dpAx - pAdx - dpB\,{}^tp - {}^txBdx = -d\left(pAx + \tfrac{1}{2}pB\,{}^tp + \tfrac{1}{2}\,{}^txBx\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que B est symétrique. Ainsi nous obtenons le résultat avec

$$f_u(x,p) = pAx + \frac{1}{2}pB\,{}^tp + \frac{1}{2}\,{}^txBx.$$

Attention ! Il était possible de montrer l'existence de f_u sans calculer son expression, à condition de **vérifier** que $d(\xi_u \lrcorner\, \omega) = 0$!

(iv) Calculer le crochet de Poisson $\{H, f_u\}$.
Réponse — On a

$$\begin{aligned} \{H, f_u\} &= \omega(\xi_H, \xi_u) = (\xi_H \lrcorner\, \omega)(\xi_u) = -dH(\xi_u) = -\sum_{i=1}^n \left(x^i(Ax + B\,{}^tp)^i - p_i(pA + {}^txB)_i\right) \\ &= -\,{}^tx(Ax + B\,{}^tp) + (pA + {}^txB)\,{}^tp = -\,{}^txAx + pA\,{}^tp - {}^txB\,{}^tp + {}^txB\,{}^tp = 0. \end{aligned}$$

Donc f_u est une quantité conservée le long des trajectoires des solutions des équations de Hamilton.

(v) Préciser (en justifiant) si la fonction f_u correspond à une quantité conservée telle que celles qui sont prévues par la version vue en cours du théorème de Noether pour un lagrangien. On pourra discuter en fonction des valeurs de A et B.
Réponse — La fonction f_u est en général un polynôme de degré 2 en la variable p, sauf si $B = 0$. Or les quantités conservées qui correspondent à celles données par la version du théorème de Noether vue en cours via la transformée de Legendre sont de la forme $\theta(X)$, où $\theta = p_i dx^i$ et X est un champ de vecteur de la forme $X = T(t,x)\frac{\partial}{\partial t} + X^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, s'il s'agit d'une symétrie exacte. Dans le cas où il s'agit d'une symétrie satisfaite module un terme exact, la quantité conservée sera de la forme $\theta(X) - f$, où f est une fonction de (t,x). Dans tous les cas, il s'agit d'un polynôme de degré 1 en p. Donc f_u ne correspond pas à ces cas, sauf si $B = 0$.

(vi) Calculer [4] le crochet de Poisson $\{f_u, f_{\tilde{u}}\}$, pour deux éléments $u = A + iB, \tilde{u} = \tilde{A} + i\tilde{B} \in \mathfrak{u}(n)$ en fonction du crochet $[u, \tilde{u}]$.

3. autrement dit u est antihermitienne : $u^\dagger + u = 0$

4. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$, on aura avantage à introduire la matrice ligne $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$ et la matrice colonne $\frac{\partial f}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial p_n} \end{pmatrix}$.

Réponse — On a

$$\begin{aligned}\{f_u, f_{\tilde u}\} &= \frac{\partial f_u}{\partial p_i}\frac{\partial f_{\tilde u}}{\partial x^i} - \frac{\partial f_u}{\partial x^i}\frac{\partial f_{\tilde u}}{\partial p_i} = \frac{\partial f_{\tilde u}}{\partial x}\frac{\partial f_u}{\partial p} - \frac{\partial f_u}{\partial x}\frac{\partial f_{\tilde u}}{\partial p} \\ &= (p\tilde A + {}^t x\tilde B)(Ax + B\,{}^t p) - (pA + {}^t xB)(\tilde A x + \tilde B\,{}^t p) \\ &= p[\tilde A, A]x + {}^t x[\tilde B, B]\,{}^t p + p(\tilde A B - A\tilde B)\,{}^t p + {}^t x(\tilde B A - B\tilde A)x\end{aligned}$$

Noter qu'ici $[\tilde A, A]$ et $[\tilde B, B]$ sont antisymétriques, car A et $\tilde A$ sont toutes les deux antisymétriques et B et $\tilde B$ sont toutes les deux symétriques. De plus, nous pouvons remplacer $\tilde A B - A\tilde B$ par sa version symétrisée :

$$\frac{1}{2}\left[(\tilde A B - A\tilde B) + {}^t(\tilde A B - A\tilde B)\right] = \frac{1}{2}\Big([\tilde A, B] + [\tilde B, A]\Big)$$

et de même pour $\tilde B A - B\tilde A$:

$$\frac{1}{2}\left[(\tilde B A - B\tilde A) + {}^t(\tilde B A - B\tilde A)\right] = \frac{1}{2}\Big([\tilde B, A] + [\tilde A, B]\Big).$$

Ainsi

$$\{f_u, f_{\tilde u}\} = p[\tilde A, A]x + {}^t x[\tilde B, B]\,{}^t p + \frac{1}{2}p\Big([\tilde A, B] + [\tilde B, A]\Big)\,{}^t p + \frac{1}{2}\,{}^t x\Big([\tilde B, A] + [\tilde A, B]\Big)x.$$

On peut enfin remarquer que ${}^t x[\tilde B, B]\,{}^t p = {}^t\Big({}^t x[\tilde B, B]\,{}^t p\Big) = -p[\tilde B, B]x$, car $[\tilde B, B]$ est antisymétrique. Finalement

$$-\{f_u, f_{\tilde u}\} = p\Big([A, \tilde A] - [B, \tilde B]\Big)x + \frac{1}{2}p\Big([A, \tilde B] + [B, \tilde A]\Big)\,{}^t p + \frac{1}{2}\,{}^t x\Big([A, \tilde B] + [B, \tilde A]\Big)x.$$

En comparant avec $[u, \tilde u] = [A + iB, \tilde A + i\tilde B] = [A, \tilde A] - [B, \tilde B] + i\Big([A, \tilde B] + [B, \tilde A]\Big)$, on conclut que $\{f_u, f_{\tilde u}\} = -f_{[u,\tilde u]}$.

(vii) On revient au point de vue lagrangien. À $u = A + iB \in \mathfrak{u}(n)$, on associe l'opérateur linéaire $T_u : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ défini par $T_u\gamma = A\gamma + B\frac{d\gamma}{dt}$. Calculer $\delta\mathcal{L}_\gamma[T_u\gamma] = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\mathcal{L}[\gamma + \varepsilon T_u\gamma]\right)|_{\varepsilon=0}$ et montrer que cette quantité est égale l' intégrale d'une dérivée totale. Qu'en déduit-on ?
Réponse — En développant $\mathcal{L}[\gamma + \varepsilon T_u\gamma]$, on obtient

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_\gamma[T_u\gamma] &= \int_{\mathbb{R}}\left({}^t\dot\gamma\frac{dT_u\gamma}{dt} - {}^t\gamma T_u\gamma\right)dt = \int_{\mathbb{R}}\left({}^t\dot\gamma(A\dot\gamma + B\ddot\gamma) - {}^t\gamma(A\gamma + B\dot\gamma)\right)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left({}^t\dot\gamma A\dot\gamma + {}^t\dot\gamma B\ddot\gamma - {}^t\gamma A\gamma - {}^t\gamma B\dot\gamma\right)dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dt}\left({}^t\dot\gamma B\dot\gamma - {}^t\gamma B\gamma\right)dt,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que ${}^t\dot\gamma A\dot\gamma = {}^t\gamma A\gamma = 0$ car A est antisymétrique. On en déduit que $T_u\gamma$ ressemble à une symétrie modulo une forme exacte, sauf que $T_u\gamma$ et le terme supplémentaire dépendent de γ et aussi de $\dot\gamma$.

(viii) Est-on dans un cas d'application du théorème de Noether vu en cours ? Expliciter le résultat qui serait prévu par ce théorème. On notera Q_u la quantité censée être conservée.
Réponse — Comme vu précédemment, on n'est pas dans le cas d'application du théorème de Noether prévu par le cours. Si on supposait que la conclusion est toujours valable, on aurait alors que, pour toute solution γ des équations d'Euler–Lagrange, la quantité

$$Q_u(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma(t), \dot\gamma(t))(T_u\gamma)^i - \frac{1}{2}\left({}^t\dot\gamma B\dot\gamma - {}^t\gamma B\gamma\right)$$

serait conservée. Un calcul donne

$$\begin{aligned}Q_u(t) &= \sum_{i=1}^n \dot\gamma^i(A\gamma + B\dot\gamma)^i - \frac{1}{2}\,{}^t\dot\gamma B\dot\gamma + \frac{1}{2}\,{}^t\gamma B\gamma = {}^t\dot\gamma A\gamma + {}^t\dot\gamma B\dot\gamma - \frac{1}{2}\,{}^t\dot\gamma B\dot\gamma + \frac{1}{2}\,{}^t\gamma B\gamma \\ &= {}^t\dot\gamma A\gamma + \frac{1}{2}\left({}^t\dot\gamma B\dot\gamma + {}^t\gamma B\gamma\right).\end{aligned}$$

(ix) Vérifier que, pour toute solution γ des équations d'Euler–Lagrange, Q_u est conservée. Comparez avec le résultat de la question (iv).
Réponse — On a, pour tout γ, en utilisant le fait que B est symétrique,

$$\frac{dQ_u}{dt} = {}^t\dddot{\gamma} A\gamma + {}^t\ddot{\gamma} A\dot{\gamma} + {}^t\dddot{\gamma} B\dot{\gamma} + {}^t\gamma B\ddot{\gamma} = {}^t(\ddot{\gamma}+\gamma)A\gamma - {}^t\gamma A\gamma + {}^t\dot{\gamma} A\dot{\gamma} + {}^t(\ddot{\gamma}+\gamma)B\dot{\gamma}.$$

Et en utilisant le fait que A est antisymétrique, cela se simplifie en :

$$\frac{dQ_u}{dt} = {}^t(\ddot{\gamma}+\gamma)(A\gamma + B\dot{\gamma}) = ({}^t\ddot{\gamma}+\gamma)T_u\gamma.$$

On en déduit que Q_u est constant si γ est solution des équations d'Euler–Lagrange $\ddot{\gamma}+\gamma = 0$. On remarque que la quantité Q_u correspond à f_u via la transformée de Legendre.

(x) Calculer l'action du commutateur $[T_u, T_{\tilde{u}}]$ sur une application $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Que devient $[T_u, T_{\tilde{u}}]\gamma$ dans le cas où $\gamma \in \mathcal{E}$ (cf. question (i)).
Réponse — On a

$$\begin{aligned}
[T_u, T_{\tilde{u}}]\gamma &= A(\tilde{A}\gamma + \tilde{B}\dot{\gamma}) + B\frac{d}{dt}\left(\tilde{A}\gamma + \tilde{B}\dot{\gamma}\right) - \tilde{A}(A\gamma + B\dot{\gamma}) - \tilde{B}\frac{d}{dt}(A\gamma + B\dot{\gamma}) \\
&= [A, \tilde{A}]\gamma + (A\tilde{B} + B\tilde{A} - \tilde{A}B - \tilde{B}A)\dot{\gamma} + [B, \tilde{B}]\ddot{\gamma} \\
&= \left([A, \tilde{A}] - [B, \tilde{B}]\right)\gamma + \left([A, \tilde{B}] + [B, \tilde{A}]\right)\dot{\gamma} + [B, \tilde{B}]\left(\ddot{\gamma}+\gamma\right) = T_{[u,\tilde{u}]}\gamma + [B, \tilde{B}]\left(\ddot{\gamma}+\gamma\right).
\end{aligned}$$

On observe que $[T_u, T_{\tilde{u}}] - T_{[u,\tilde{u}]}$ s'annule sur $\mathcal{E}$.

(xi) Écrire l'équation de Hamilton–Jacobi associée au problème variationnel étudié dans cet exercice.
Réponse — Il s'agit de :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|x|^2}{2} + \frac{1}{2}|\nabla_x S|^2 = 0,$$

pour une fonction S des variables $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
Remarque : *A posteriori, le rédacteur du sujet et de son corrigé se rend compte qu'il aurait été mieux de prendre comme définition de ξ_u, et donc de f_u, les quantités opposées. Ainsi, à la question (vi), on aurait obtenu que $[f_u, f_{\tilde{u}}]$ aurait été égal à $f_{[u,\tilde{u}]}$.*