Correction des exercices sur le calcul différentiel

1 Produit extérieur

Sur $\mathbb{R}^3$ on définit la 2-forme différentielle α et la 1-forme différentielle β par : pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha_{(x,y,z)} := xydx \wedge dy + z^2 dx \wedge dz + xdy \wedge dz \quad \text{et} \quad \beta_{(x,y,z)} := xdx + y^2 dz.$$

Calculer $\alpha \wedge \beta$, $d\alpha$, $d\beta$ et $\beta(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z})$.
Réponse — On a

$$\alpha \wedge \beta = (xy^3 + x^2) dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz \quad \text{(seul le dernier terme contribue)}, \quad d\alpha = 2dy \wedge dz$$

et

$$\beta(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}) = x \cdot x + y^2 \cdot z = x^2 + y^2 z.$$

2 Produit intérieur

Pour toute p-forme $\alpha \in \Lambda^p V^*$ *et pour tout vecteur* $X \in V$*, on note* $X \lrcorner \alpha \in \Lambda^{(p-1)} V^*$ *et on appelle* produit intérieur de α par X *la* $(p-1)$*-forme définie par*

$$\forall X_2, \cdots, X_p \in V, \quad X \lrcorner \alpha(X_2, \cdots, X_p) = \alpha(X, X_2, \cdots, X_p).$$

1 *— On suppose que* V *est de dimension* n*. On se donne* $\omega \in \Lambda^n V^*$ *non nulle. Démontrer (sans calcul) que l'application*

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & V & \longrightarrow & \Lambda^{n-1} V^* \\ & X & \longmapsto & X \lrcorner \omega \end{array}$$

est un isomorphisme. Question : à quoi revient le choix d'une telle forme ω *?*
Réponse — On remarque d'abord que λ est linéaire. De plus les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont égales toutes les deux à n. Il suffit donc de vérifier que le noyau de λ est réduit à 0 pour conclure. Soit $X \in \mathrm{Ker}\lambda$ et supposons que $X \neq 0$. Alors, grâce au théorème de la base incomplète, on peut trouver $n-1$ vecteurs $X_2, \cdots, X_n \in V$ tels que $(X, X_2, \cdots, X_n)$ soit une base de V. Alors

$$\omega(X, X_2, \cdots, X_n) = X \lrcorner \omega(X_2, \cdots, X_n) = 0,$$

ce qui entraînerait, puisque ω est proportionnel à un déterminant que $\omega = 0$: cela est contradictoire. Noter que le choix de ω revient à se donner une mesure et une orientation sur V.
2 — *On suppose que* V *est muni d'un produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*. Démontrer que*

$$\begin{array}{rccc} \ell : & V & \longrightarrow & \Lambda^1 V^* \\ & X & \longmapsto & \langle X, \cdot \rangle \end{array}$$

est un isomorphisme.
Réponse — A nouveau ℓ est linéaire et la dimension de l'espace de départ est égale à celle de l'espace d'arrivée. Comme précédemment il suffit donc de montrer que ℓ est injectif : soit $X \in V$ tel que $\ell(X) = 0$. Alors $\forall Y \in V$, $\langle X, Y \rangle = 0$ et donc $X = 0$.
3 — *On suppose que* V *est de dimension 3, est muni d'un produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *et est orienté. On considère une base orthonormée directe* (e_1, e_2, e_3) *de* V *et* $\omega \in \Lambda^3 V^*$ *telle que* $\omega(e_1, e_2, e_3) = 1$*. Exprimer l'application*

$$\begin{array}{ccc} V^2 & \longrightarrow & V \\ (X, Y) & \longmapsto & \lambda^{-1}(\ell(X) \wedge \ell(Y)) \end{array}$$

dans les coordonnées données par (e_1, e_2, e_3). *Conclure.*
Réponse — Si $X = \sum_{i=1}^3 X^i e_i$ et $Y = \sum_{i=1}^3 Y^i e_i$ sont les décompositions de X et Y dans la base (e_1, e_2, e_3), on a :

$$\ell(X) = \sum_{i=1}^{3} X^i dx^i \quad \text{et} \quad \ell(Y) = \sum_{i=1}^{3} Y^i dx^i.$$

Donc

$$\ell(X) \wedge \ell(Y) = (X^2Y^3 - X^3Y^2)dx^2 \wedge dx^3 + (X^3Y^1 - X^1Y^3)dx^3 \wedge dx^1 + (X^1Y^2 - X^2Y^1)dx^1 \wedge dx^2.$$

Par ailleurs un calcul direct donne :

$$\lambda(Z) = Z^1 dx^2 \wedge dx^3 + Z^2 dx^3 \wedge dx^1 + Z^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Donc

$$\lambda^{-1}(\ell(X) \wedge \ell(Y)) = (X^2Y^3 - X^3Y^2)e_1 + (X^3Y^1 - X^1Y^3)e_2 + (X^1Y^2 - X^2Y^1)e_3 = X \times Y.$$

On reconnaît le produit vectoriel, que l'on note ici $\times$ pour éviter une confusion avec le produit extérieur. Et l'on retrouve le fait que, pour définir un produit vectoriel, il faut se donner une orientation (grâce ici à ω) et un produit scalaire.

3 Produit extérieur

On pose $V = \mathbb{R}^n$. *Soit* $\alpha, \beta \in \Lambda^2 V^*$. *Etudier dans les cas suivants si* $\alpha \wedge \beta$ *est nul ou non :*
1 — $n = 3$.
Réponse — Ici $\alpha \wedge \beta$ est dans $\Lambda^4(\mathbb{R}^3)^* = \{0\}$, donc $\alpha \wedge \beta = 0$.
2 — $n = 4$.
Réponse — Nous utilisons une base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ sur V et les coordonnées associées $(x^1, x^2, x^3 x^4)$. Il peut arriver bien sûr que $\alpha \wedge \beta = 0$, par exemple pour $\alpha = \beta = dx^1 \wedge dx^2$. Mais en général ce produit est non nul : par exemple, si $\alpha = dx^1 \wedge dx^2$ et $\beta = dx^3 \wedge dx^4$, alors $\alpha \wedge \beta = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \neq 0$. On peut même avoir $\alpha \wedge \alpha \neq 0$: c'est le cas pour $\alpha = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4$. Enfin en général en utilisant les isomorphismes d'espaces vectoriels : $R : \Lambda^2 V^* \longrightarrow \mathbb{R}^6$ défini par

$$R\left(\sum_{1 \le i < j \le 4} \alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j\right) = (\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{34}),$$

et $T : \Lambda^4 V^* \longrightarrow \mathbb{R}$, défini par $T(\omega) = \omega(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$, alors $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \wedge \beta$ s'identifie à la forme bilinéaire

$$(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) \longmapsto \alpha_{12}\beta_{34} + \alpha_{13}\beta_{42} + \alpha_{14}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{14} + \alpha_{24}\beta_{31} + \alpha_{34}\beta_{12},$$

qui est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature $(3, 3)$.

4 Produit extérieur et produit intérieur

Dans ce problème $\alpha \in V^*$ *est une 1-forme et* $\gamma \in \Lambda^2 V^*$ *est une 2-forme.*
a) *Montrer que* $\forall u, v, w \in V$ *l'expression* $\alpha \wedge \gamma(u, v, w)$ *peut se simplifier comme la somme de trois termes.*
Une application directe de la formule rappelée en (i) plus haut donne

$$\alpha \wedge \gamma(u, v, w) = \frac{1}{2}\alpha(u)\left(\gamma(v, w) - \gamma(w, v)\right) + \frac{1}{2}\alpha(v)\left(\gamma(w, u) - \gamma(u, w)\right) + \frac{1}{2}\alpha(w)\left(\gamma(u, v) - \gamma(v, u)\right).$$

Puis en tenant compte du fait que γ est antisymétrique on obtient

$$\alpha \wedge \gamma(u, v, w) = \alpha(u)\gamma(v, w) + \alpha(v)\gamma(w, u) + \alpha(w)\gamma(u, v).$$

b) *Soit* $\alpha \in V^*$ *une 1-forme* non nulle. *On note* H *le noyau de* α. *Montrer qu'il existe* $u \in V$ *tel que* $\alpha(u) = 1$. *Ce vecteur* u *est-il unique ?*

Puisque α est non nulle, il existe $x \in V$ tel que $\alpha(x) \neq 0$. On prend alors $u = x/\alpha(x)$. Si $\dim V > 1$ alors u n'est pas unique puisque $\forall v \in H$, $\alpha(u+v) = \alpha(u) = 1$.
c) *On suppose dans cette question et dans la suite que $\alpha \wedge \gamma = 0$. Montrer que la restriction de γ à H est nulle (i.e. $\forall v, w \in H$, $\gamma(v,w) = 0$).*
Pour tout $v, w \in H$, on a

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha \wedge \gamma(u,v,w) \\ & =^{a)} & \alpha(u)\gamma(v,w) + \alpha(v)\gamma(w,u) + \alpha(w)\gamma(u,v) \\ & = & 1 \cdot \gamma(v,w) + 0 \cdot \gamma(w,u) + 0 \cdot \gamma(u,v) = \gamma(v,w). \end{array}$$

d) *On note $\beta = u \lrcorner \gamma$, où u a été introduit à la question b). Montrer que $\gamma = \alpha \wedge \beta$.*
Pour tout $v, w \in V$ on a

$$\begin{array}{rcl} \alpha \wedge \beta(v,w) & = & \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) \\ & = & \alpha(v)\gamma(u,w) - \alpha(w)\gamma(u,v) \\ & = & -\alpha(v)\gamma(w,u) - \alpha(w)\gamma(u,v) \\ & =^{\alpha\wedge\gamma=0}_{et\,a)} & \alpha(u)\gamma(v,w) \\ & = & \gamma(v,w). \end{array}$$

5 Le lemme de Cartan : première version

Démontrer, en utilisant des coordonnées locales, que, sur une variété $\mathcal{M}$, pour tout champ de vecteur X et Y sur $\mathcal{M}$ et pour toute 1-forme différentielle α sur $\mathcal{M}$,

$$d\alpha(X,Y) = L_X\alpha(Y) - L_Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]). \tag{1}$$

Nous travaillons dans un système de coordonnées locales $\left(x^i\right)$:

$$\alpha = \alpha_i dx^i,$$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Le terme de gauche est :

$$\begin{array}{rcl} d\alpha(X,Y) & = & \displaystyle\sum_{i<j} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j(X,Y) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) \left(X^i Y^j - Y^i X^j \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i,j} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) X^i Y^j. \end{array}$$

Le terme de droite est :

$$\begin{array}{rcl} L_X\alpha(Y) - L_Y\alpha(Y) - \alpha([X,Y]) & = & \displaystyle X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\alpha_j Y^j \right) - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\alpha_j X^j \right) - \alpha_j \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \\ & = & \displaystyle X^i \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} Y^j + \alpha_j \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) - Y^i \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} X^j + \alpha_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \\ & & \displaystyle - \alpha_j \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \\ & = & \displaystyle X^i Y^j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - X^i Y^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \\ & = & \displaystyle X^i Y^j \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right). \end{array}$$

D'où le résultat.

6 Le lemme de Cartan : deuxième version

On se propose de redémontrer la formule (1) de l'exercice précédent de façon intrinsèque.
1) *Démontrer (1) dans le cas où $\alpha = df$, avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \Omega^0(\mathcal{M})$.*
Réponse — Si $\alpha = df$, le membre de droite de (1) s'annule puisque $dd\alpha = 0$, tandis que le membre de droite est égal à $L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) - L_{[X,Y]}f$, quantité qui s'annule par définition de $[X, Y]$.
2) *On suppose que $\beta \in \Omega^1(\mathcal{M})$ satisfait (1). Montrer que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $\alpha := g\beta$ satisfait aussi (1).*
Réponse — On a $d\alpha = dg \wedge \beta + gd\beta$, donc α satisfait (1) ssi

$$(dg \wedge \beta)(X, Y) + gd\beta(X, Y) = (L_X g)\beta(Y) + gL_X(\beta(Y)) - (L_Y g)\beta(X) - gL_Y(\beta(X)) - g\beta([X, Y]).$$

Or on a, par définition du produit extérieur : $(dg \wedge \beta)(X, Y) = (L_X g)\beta(Y) - (L_Y g)\beta(X)$, ce qui permet de réduire l'équation précédente à $gd\beta(X, Y) = gL_X(\beta(Y)) - gL_Y(\beta(X)) - g\beta([X, Y])$, qui est vraie puisque β satisfait (1).
3) Montrer (1) dans le cas général.
Réponse — Localement toute 1-forme α peut se décomposer selon $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$, où les x^i sont des fonctions coordonnées et les α_i sont aussi des fonctions. D'après le a), toutes les 1-formes dx^i satisfont (1) et, d'après le b), on en déduit que c'est aussi le cas pour toutes les formes $\alpha_i dx^i$. Le résultat pour α se déduit donc par additivité.

7 Transport par un difféomorphisme d'un produit intérieur et d'une dérivée de Lie

Soit $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un difféomorphisme, $\xi \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteur sur $\mathcal{M}$ et $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$ une p-forme sur $\mathcal{N}$. On note $X := \varphi_*\xi$.
1) Démontrer que $\varphi^*(X \lrcorner \alpha) = \xi \lrcorner (\varphi^*\alpha)$.
Réponse — Soit $x \in \mathcal{M}$ et $\xi_2, \cdots, \xi_p \in T_x\mathcal{M}$. Nous avons, en utilisant la définition de φ^* et de $X \lrcorner \alpha$:

$$\begin{array}{rcl}
\varphi^*(X \lrcorner \alpha)_x(\xi_2, \cdots, \xi_p) & = & (X \lrcorner \alpha)_{\varphi(x)}(d\varphi_x(\xi_2), \cdots, d\varphi_x(\xi_p)) \\
& = & \alpha_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)), d\varphi_x(\xi_2), \cdots, d\varphi_x(\xi_p)) \\
& = & \alpha_{\varphi(x)}(d\varphi_x(\xi(x)), d\varphi_x(\xi_2), \cdots, d\varphi_x(\xi_p)) \\
& = & (\varphi^*\alpha)_x(\xi(x), \xi_2, \cdots, \xi_p) \\
& = & (\xi \lrcorner \varphi^*\alpha)_x(\xi_2, \cdots, \xi_p).
\end{array}$$

D'oú le résultat.
2) Démontrer que $\varphi^*(L_X\alpha) = L_\xi(\varphi^*\alpha)$.
Réponse — Nous appliquons une formule de Cartan et le résultat de la question précédente :

$$\begin{array}{rcl}
\varphi^*(\mathrm{L}_X\alpha) & = & \varphi^*(X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha)) \\
& = & \xi \lrcorner \varphi^* d\alpha + d(\varphi^*(X \lrcorner \alpha)) \\
& = & \xi \lrcorner d(\varphi^*\alpha) + d(\xi \lrcorner \varphi^*\alpha) \\
& = & \mathrm{L}_\xi(\varphi^*\alpha).
\end{array}$$

8 Forme symplectique

L'espace $\mathbb{R}^{2n}$ est muni des coordonnées $(x, p) = (x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n) = (x^i, p_i)_i$ et on note

$$\omega := dp_1 \wedge dx^1 + \cdots + dp_n \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx^i.$$

1) *Montrer que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ il existe un unique champ de vecteur ξ su $\mathbb{R}^{2n}$ tel que*

$$\xi \lrcorner \omega + dh = 0.$$

Expliciter ce champ de vecteur.
Réponse — On pose $\xi = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ et on substitue dans la relation. On obtient

$$\left(b_i + \frac{\partial h}{\partial x^i}\right) dx^i + \left(-a_i + \frac{\partial h}{\partial p_i}\right) dp_i = 0,$$

donc

$$\xi_h = \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Dans la suite on notera ξ_h ce champ de vecteur.
2) *Montrer que si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est solution de :*

$$\frac{d\gamma}{dt} = \xi_h(\gamma) \quad alors \quad \frac{d(h\circ\gamma)}{dt} = 0.$$

Réponse — On a

$$\frac{d(h\circ\gamma)}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial p_i} = 0.$$

3) *Pour toute paire de fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on note :*

$$\{f, g\} := \omega(\xi_f, \xi_g)$$

(crochet de Poisson). Montrer que si $\frac{d\gamma}{dt} = \xi_h(\gamma)$ alors

$$\frac{d(f\circ\gamma)}{dt} = \{h, f\}\circ\gamma$$

et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
Réponse — On a

$$\{h, f\} = \omega(\xi_h, \xi_f) = -\omega(\xi_f, \xi_h) = -(\xi_f \lrcorner\, \omega)(\xi_h) = df(\xi_h).$$

et donc

$$\{h, f\}\circ\gamma = df_\gamma(\xi_h(\gamma)) = df_\gamma\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}.$$

4) *Expliciter $\{f, g\}$.*
Réponse —Un calcul donne :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

On retrouve ainsi le résultat de la question 2) grâce à celui de la question 3), car $\{h, h\} = 0$.
5) *Montrer que*

$$L_{\xi_f}\omega = 0.$$

Réponse — On utilise la formule de Cartan :

$$L_{\xi_f}\omega = \xi_f \lrcorner\,(d\omega) + d(\xi_f \lrcorner\,\Omega) = 0 - ddf = 0.$$

6) *On rappelle que, pour deux champs de vecteur X_1 et X_2, $L_{X_1}X_2 = [X_1, X_2]$ et on admet que, pour une forme α, $L_X(Y \lrcorner\,\alpha) = (L_XY)\lrcorner\,\alpha + Y \lrcorner\,(L_X\alpha)$. Montrer que :*

$$\xi_{\{f,g\}} = [\xi_f, \xi_g].$$

Réponse — On a, en utilisant à la deuxième ligne le résultat de la question 5 :

$$\begin{aligned}
[\xi_g, \xi_g]\lrcorner\,\omega &= (L_{\xi_f}\xi_g)\lrcorner\,\omega = L_{\xi_f}(\xi_g \lrcorner\,\omega) - \xi_g \lrcorner\,(L_{\xi_f}\omega)\\
&= L_{\xi_f}(-dg) - \xi_g \lrcorner\,(0)\\
&= -\xi_f \lrcorner\, d(dg) - d(\xi_f \lrcorner\, dg) = 0 - d(-\xi_f \lrcorner\,\xi_g \lrcorner\,\omega)\\
&= -d\omega(\xi_f, \xi_G) = -d\{f, g\}.
\end{aligned}$$

Remarque : montrons la formule $L_X(Y \lrcorner\,\alpha) = (L_XY)\lrcorner\,\alpha + Y \lrcorner\,(L_X\alpha)$. Nous avons, en appliquant la définition de la dérivée de Lie d'une forme différentielle :

$$L_X(Y \lrcorner\,\alpha) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\left(e^{tX}\right)^*(Y \lrcorner\,\alpha) - Y \lrcorner\,\alpha\right].$$

or, en utilisant le résultat de l'exercice 7, question 1) avec $\varphi = e^{tX}$ et $\xi = \left(e^{-tX}\right)_* Y$, on a (en remarquant que $Y = \left(e^{tX}\right)_*\xi$) :

$$\left(e^{tX}\right)^*(Y \lrcorner\,\alpha) = \left(e^{-tX}\right)_* Y \lrcorner\,\left(e^{tX}\right)^*\alpha.$$

Donc

$$\begin{aligned} L_X(Y \lrcorner \alpha) &= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\left(e^{-tX}\right)_* Y - Y\right) \lrcorner \left(e^{tX}\right)^* \alpha}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{Y \lrcorner \left(\left(e^{tX}\right)^* \alpha - \alpha\right)}{t} \\ &= L_X Y \lrcorner \alpha + Y \lrcorner L_X \alpha. \end{aligned}$$

7) *Déduire de la question suivante l'identité de Jacbobi :*

$$\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0$$

(Indication : calculer de deux façons différentes $L_{\xi_{\{h,g\}}} f$).
Réponse — D'une part, on a :

$$L_{\xi_{\{h,g\}}} f = \{\{h,g\},f\} = \{f,\{g,h\}\},$$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} L_{\xi_{\{h,g\}}} f &= L_{[\xi_h,\xi_g]} f = L_{\xi_h} L_{\xi_g} f - L_{\xi_g} L_{\xi_h} f \\ &= L_{\xi_h}\{g,f\} - L_{\xi_g}\{h,f\} = \{h,\{g,f\}\} - \{g,\{h,f\}\}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.