Exercices corrigés sur la mécanique

1 Problème à deux corps (solutions circulaires)

On étudie le mouvement de deux particules ponctuelles A et B : on note respectivement m_A et m_B les masses de A et B et respectivement x_A et x_B les fonctions du temps t qui donnent les positions de A et B. L'évolution du système est décrite par les points critiques de

$$\int_{\mathbb{R}} \left(m_A \frac{|\dot{x_A}|^2}{2} + m_B \frac{|\dot{x_B}|^2}{2} + \frac{G m_A m_B}{|x_A - x_B|} \right) dt.$$

On pose

$$C := \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, \quad x := x_B - x_A, \quad m := \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \quad \text{et} \quad e^2 := G m_A m_B$$

1) Démontrer que l'action se réécrit :

$$\int_{\mathbb{R}} (m_A + m_B) \frac{|\dot{C}|^2}{2} dt + \int_{\mathbb{R}} \left(m \frac{|\dot{x}|^2}{2} + \frac{e^2}{|x|} \right) dt.$$

On notera $\mathcal{A}[x]$ la deuxième intégrale.
Réponse — Simple calcul.
2) Démontrer que l'équation d'Euler–Lagrange de $\mathcal{A}$ est :

$$m\ddot{x} = -\frac{e^2}{|x|^3} x. \tag{1}$$

Expliquer pourquoi on peut se ramener à l'étude de x (et laisser de côté C).
Réponse — On obtient que les équations du mouvement sont (1) et $\ddot{C} = 0$: elles se découplent et, en particulier, le centre de masse C a un trajectoire rectiligne uniforme.
3) On recherche les solutions circulaires, de la forme $x(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, 0)$. Démontrer qu'une telle expression est solution des équations du mouvement si et seulement si :

$$m\omega^2 r = \frac{e^2}{r^2}. \tag{2}$$

Réponse — Simple calcul.
4) L'énergie cinétique est $E_c = m\frac{|\dot{x}|^2}{2}$, l'énergie potentielle est $E_p = -\frac{e^2}{|x|}$ et l'énergie totale $E = E_c + E_p$. Calculer la valeur de E_c pour une solution circulaire en fonction de e^2 et r. En déduire que $E = -e^2/2r$.
Réponse — On a $\dot{x} = r\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0)$, donc $|\dot{x}|^2 = r^2\omega^2$ et $E_c = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$. On remarque que, d'après (2) on peut aussi écrire $E_c = \frac{1}{2} \cdot m\omega^2 r \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{r^2} \cdot r = \frac{e^2}{2r}$, donc $E = \frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}$.
5) L'intensité du moment angulaire ($\vec{J} := mx \times \dot{x}$) pour une trajectoire circulaire est $J = m\omega r^2$. Exprimer J en fonction de m, e^2 et r pour une solution circulaire (on pourra utiliser (2)). En déduire la relation suivante entre l'énergie totale et J :

$$E = -\frac{me^4}{2J^2}. \tag{3}$$

Réponse — De (2) on déduit $\omega^2 = \frac{e^2}{mr^3}$ et donc

$$J = m\omega r^2 = m\sqrt{\frac{e^2}{mr^3}} r^2 = \sqrt{mr} e.$$

Donc $2J^2 E = 2mre^2 \left(-\frac{e^2}{2r}\right) = -me^4$, d'où le résultat.

2 Problème à deux corps (suite)

On étudie les points critiques de

$$\mathcal{A}[x] := \int_{\mathbb{R}} \left(m\frac{|\dot{x}|^2}{2} + \frac{e^2}{|x|} \right) dt \tag{4}$$

en utilisant les variables de position $x = (x^1, x^2, x^3)$ et de moment $p = (p_1, p_2, p_3)$.
1) Au moyen de la transformée de Legendre, calculer l'hamiltonien $H(x, p)$ et écrire les équations de Hamilton.
Réponse —

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}|p|^2 - \frac{e^2}{|x|}$$

2) On note

$$X_1 := x^2\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_2 := x^3\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_3 := x^1\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^1}$$

et, pour $a = 1, 2, 3$, $J_a := \langle p, X_a\rangle = p_i X_a^i$. Calculer les crochets de Poisson des fonctions H, J_1, J_2 et J_3 entre elles. Quelles conclusions peut-on en tirer sur les solutions des équations de la dynamique ?
Réponse — On trouve $\{J_1, J_2\} = -J_3$, $\{J_2, J_3\} = -J_1$, $\{J_3, J_1\} = -J_2$ et $\{H, J_1\} = \{H, J_2\} = \{H, J_3\} = 0$. Donc les trois composantes du vecteur $J = (J_1, J_2, J_3) = x \times p$ sont conservées le long des solutions du mouvement.
3) Retrouver la loi des aires de Kepler : *les surfaces balayées par le segment joignant les deux points durant deux intervalles de temps de même longueur sont égales.*
Réponse — C'est une conséquence de la conservation de $J = x \times p$, qui équivaut à la conservation de $\frac{1}{2}x \times \dot{x}$, qui est la vitesse aréolaire balayée par ce segment.
4) Démontrer que, pour toute solution des équations d'Euler–Lagrange de (4), il existe un plan passant par l'origine qui contient la trajectoire de cette solution.
Réponse — Encore une conséquence de la même propriété : le vecteur J garde une direction fixe et x reste donc dans le plan orthogonal à J.

3 Problème à deux corps (solutions de Kepler)

On considère une solution $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de (1). On suppose que l'image est contenue dans le plan d'équation $x^3 = 0$, de sorte que l'on peut poser

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t), 0) = r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t), 0).$$

On notera $J_3 := mr^2\dot{\theta}$, où $\dot{\theta} := \frac{d\theta}{dt}$.
1) Ecrire les équations de Newton (1) sous la forme de deux équations différentielles ayant les fonctions r et θ comme inconnues. Retrouver le fait que J_3 est une quantité conservée.
Réponse — On note $x = re^{i\theta}$ pour plus de concision. On a :

$$\dot{x} = \dot{r}e^{i\theta} + ir\dot{\theta}e^{i\theta}$$

puis

$$\ddot{x} = \ddot{r}e^{i\theta} + i(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e^{i\theta} - r\dot{\theta}^2e^{i\theta}.$$

Alors l'équation (1), qui s'écrit $m\ddot{x} = -\frac{e^2}{r^2}e^{i\theta}$ se décompose en

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{r^2}$$

suivant $e^{i\theta}$ et

$$2m\dot{r}\dot{\theta} + mr\ddot{\theta} = 0$$

suivant $ie^{i\theta}$. En multipliant par r le membre de gauche de cette dernière équation, on retrouve que J_3 est une quantité conservée.
2) On pose $r(t) = \rho \circ \theta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et

$$u(\theta) = \frac{J_3}{m\rho(\theta)}.$$

Exprimer $\dot{r} := \frac{dr}{dt}$ en fonction de ρ et de sa dérivée, puis de u et de sa dérivée.
Réponse — On utilise la relation $\dot{\theta} = J_3/mr^2$ pour calculer :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{J_3}{m\rho^2} = -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{J_3}{m\rho}\right) = -\frac{du}{d\theta},$$

où il est sous-entendu que $\rho = \rho(\theta(t))$.
3) De même, exprimer $\ddot{r} := \frac{d^2r}{dt^2}$ en fonction de u et de ses dérivées.
Réponse — En remarquant que

$$\dot{\theta} = \frac{u}{r},$$

on a :

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{du}{d\theta}(\theta)\right) = -\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{u}{r}.$$

4) Déduire des questions précédentes que u est solution de :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{e^2}{J_3}. \tag{5}$$

Réponse — On utilise l'expression obtenue à la question précédente et le fait que $\dot{\theta}^2 = u^2/r^2$ dans la première équation obtenue à la question 1). Cela donne :

$$-m\frac{u}{r}\frac{d^2u}{d\theta^2} - mr\frac{u^2}{r^2} = -\frac{e^2}{r^2}$$

qui, en simplifiant, puis en utilisant $r = J_3/mu$, donne

$$m\left(u\frac{d^2u}{d\theta^2} + u^2\right) = \frac{e^2}{r} = \frac{me^2}{J_3}u,$$

qui donne la relation demandée en simplifiant encore par mu.
5) Retrouver la solution circulaire obtenue à la question 3) du premier problème.
Réponse — Celle-ci correspond à la solution constante $u = e^2/J_3$ de (5) : on trouve que cette relation équivaut à $mr^3\dot{\theta}^3 = e^2$, qui correspond bien à la solution proposée à la question 3) du 1.
6) Déterminer toutes le solutions de (5). En déduire que les trajectoires de x sont toutes des coniques.
Réponse — Les autres solutions s'obtiennent en ajoutant à la solution $u = e^2/J_3$ de (5) les solutions de l'équation homogène $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$. On obtient donc que :

$$u(\theta) = \frac{e^2}{J_3} + a\cos(\theta - \varphi)$$

où a et φ sont des constantes, et donc :

$$r(e^2 + aJ_3\cos(\theta - \varphi)) = J_3^2,$$

qui est l'équation d'une conique.

4 Gaz parfait

On rappelle la relation d'état d'un gaz parfait :

$$pV = NkT$$

et on note $\mathcal{N}$ la sous-variété de $\{(N, V, T, p)\}$ définie par cette relation. Son énergie interne est : $U = \frac{3}{2}NkT$ et la relation de bilan des échanges d'énergie est : $dU = q + w$. On définit la capacité calorique à volume constant C_V et la capacité calorique à pression constante C_p comme étant des fonctions définies sur $\mathcal{N}$ telles que

$$q = C_V dT + adV = C_p dT + bdp,$$

où a et b sont des fonctions sur $\mathcal{N}$. Déterminer C_V et C_p.
Réponse — On trouve $C_V = \frac{3}{2}kN$, $C_p = \frac{5}{2}kN$ et, par la même occasion, $a = kNT/V$ et $b = -V$.