

CORRECTION DES EXERCICES SUR LE CALCUL DES VARIATIONS

1 Le brachistochrone

Dans un plan vertical, on considère une courbe Γ que l'on représente comme le graphe d'une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(0) = H > 0$ et $f(1) = 0$. On note $A = (0, H)$ et $B = (1, 0)$ les extrémités de Γ . Un corps ponctuel de masse m et soumis à la force d'attraction gravitationnelle constante et uniforme $F = mg(0, -1)$ (où g est la constante d'accélération gravitationnelle à la surface de la terre) est lâché avec une vitesse initiale nulle depuis le point A à l'instant 0 et glisse sans frottement sur Γ (à la force gravitationnelle s'ajoute donc la force de réaction de Γ sur le corps). On note $t \mapsto u(t) = (x(t), y(t))$ la trajectoire de ce corps, pour $t \geq 0$.

1) Par des considérations d'énergie, exprimer (au signe près) le vecteur vitesse $\dot{u}(t)$ en fonction de $u(t)$, pour tout temps $t \geq 0$.

Réponse — D'une part $\dot{u}(t)$ doit être tangent à Γ en $u(t)$, c'est à dire être parallèle au vecteur $(1, f'(x(t)))$, donc il existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tel que $\dot{u}(t) = \lambda(t)(1, f'(x(t)))$. D'autre part, l'énergie totale $E(t)$ est la somme de l'énergie cinétique $E_c(t) = \frac{1}{2}m|\dot{u}|^2$ et de l'énergie potentielle associée à la force de gravitation $E_p(t) = mgy(t)$. Cette énergie est conservée car il n'y a pas de frottement. Donc

$$mgH = mgy(0) = \frac{1}{2}m|\dot{u}(t)|^2 + mgy(t),$$

ce qui entraîne que $|\dot{u}(t)| = \sqrt{2g(H - y(t))}$. Donc $|\lambda(t)|\sqrt{1 + f'(x(t))^2} = \sqrt{2g(H - y(t))}$ et

$$\dot{u}(t) = \pm \sqrt{\frac{2g(H - y(t))}{1 + f'(x(t))^2}}(1, f'(x(t))) = \pm \sqrt{\frac{2g(H - f(x(t)))}{1 + f'(x(t))^2}}(1, f'(x(t))) \quad (1)$$

2) Démontrer que si $f'(0) < 0$ et si $f < H$ sur $]0, 1]$, alors le corps se déplace toujours « vers la droite » (i.e. $\dot{x} > 0$) et atteint le point B en un temps T .

Réponse — La condition $f'(0) < 0$ garantit que le point A n'est pas un point d'équilibre et que donc le corps ne peut pas rester au point A . En effet à l'instant 0, le corps est soumis à la force de gravitation $mg(0, -1)$ et à une force de réaction de Γ qui est orthogonale à Γ (car il n'y a pas de frottement), donc de la forme $\lambda(-f'(0), 1)$. Comme la somme $mg(0, -1) + \lambda(-f'(0), 1)$ doit être tangente à Γ , elle doit être de la forme $\mu(1, f'(0))$. En identifiant, on obtient d'abord que $\mu = -\lambda f'(0)$, puis que $\lambda = mg/f'(0)^2$ et donc enfin que la première composante de la force vaut $-mg/f'(0) > 0$. Donc $\ddot{x}^1(0) > 0$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\dot{x}(t) > 0$ sur $]0, \varepsilon]$.

Deuxièmement comme $f < H$ sur $]0, 1]$, on a en particulier $f(x(\varepsilon)) < H$ (puisque $x(\varepsilon) > 0$) et donc $\bar{f} := \sup_{[x(\varepsilon), 1]} f < H$. Vu (1), cela entraîne que \dot{x} ne change pas de signe et donc, par continuité, reste positif pour tout temps. En particulier le signe \pm dans (1) est $+$. De plus $\dot{x}(t)$ est minoré par un nombre strictement positif et donc il existe un temps $T > 0$ tel que $x(T) = 1$.

3) On suppose dorénavant que $f'(0) < 0$ et $f < H$ sur $]0, 1]$ et on note $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, T]$ l'application inverse de $x : [0, T] \rightarrow [0, 1]$, c'est à dire telle que $\forall s \in [0, 1], x(\tau(s)) = s$. Exprimer T en fonction de τ , puis de f uniquement.

Réponse — D'abord on déduit de (1) que :

$$\dot{x} \circ \tau(s) = \sqrt{\frac{2g(H - f(s))}{1 + f'(s)^2}}$$

et donc

$$T = \int_0^1 \frac{d\tau}{ds}(s) ds = \int_0^1 \frac{ds}{\dot{x} \circ \tau(s)} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + f'(s)^2}{2g(H - f(s))}} ds.$$

4) On pose $h(x) = H - f(x)$ et on cherche les points critiques de l'action obtenue précédemment (qui donne T en fonction de τ). Observer que cette action possède une symétrie et, par conséquent, une quantité conservée que l'on exprimera.

Réponse — On obtient l'action

$$\mathcal{A}[h] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+h'(s)^2}{h(s)}} ds.$$

Le lagrangien de cette action ne dépend pas de s et est donc invariant par translation dans cette variable. Cela est analogue en mécanique aux problèmes variationnels indépendants du temps : l'énergie ou hamiltonien est alors conservée. Il s'agit ici de la quantité

$$\frac{\partial L}{\partial h'} h' - L = -\frac{1}{\sqrt{2gh(1+h'^2)}}.$$

5) Intégrer l'équation obtenue à la question précédente (on pourra poser $h'(s) = \cot \frac{\theta}{2}$) et montrer que le graphe de f est une cycloïde.

Réponse — Les points critiques de l'action \mathcal{A} satisfont l'équation

$$h(1+h'^2) = C,$$

où C est une constante strictement positive. En posant $h'(s) = \cot \frac{\theta}{2}$ dans l'équation, on obtient $h = C \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Donc $dh = C \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$. Comme par ailleurs $dh = h' ds = \cot \frac{\theta}{2} ds$, on en déduit que

$$ds = \tan \frac{\theta}{2} C \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = C \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = C d(\theta - \sin \theta).$$

En conclusion

$$(s, h)(\theta) = C(\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta) + (s_0, 0),$$

qui est la paramétrisation d'une cycloïde.

2 Lagrangiens nuls

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On considère une densité lagrangienne de classe \mathcal{C}^2

$$\begin{aligned} \Lambda : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, v) &\longmapsto \Lambda(t, x, v) \end{aligned}$$

et on lui associe l'action

$$\mathcal{L}[u] := \int_I \Lambda(t, u(t), \dot{u}(t)) dt,$$

définie pour toute application $u : I \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^2 . On dit que Λ est un *lagrangien nul* si toute application $u : I \rightarrow \Omega$ est point critique de \mathcal{L} . Montrer que Λ est un lagrangien nul ssi il existe une fonction $S : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad \Lambda(t, x, v) = \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x^i}(t, x) v^i. \quad (2)$$

Indication : on commencera par identifier l'application

$$\begin{aligned} E = (E_1, \dots, E_n) : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ (t, x, v, w) &\longmapsto E(t, x, v, w) \end{aligned}$$

telle que l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par les points critiques de \mathcal{L} s'écrive $E(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)) = 0, \forall t \in I$ et par justifier le fait que Λ est un lagrangien nul ssi $E = 0$.

Réponse — L'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial v^i}(t, u(t), \dot{u}(t)) \right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad \forall i,$$

se développe en :

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial v^j}(t, u(t), \dot{u}(t)) \ddot{u}^j(t) + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial x^j}(t, u(t), \dot{u}(t)) \dot{u}^j(t) + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial t}(t, u(t), \dot{u}(t)) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}(t, u(t), \dot{u}(t)) = 0, \quad \forall i,$$

où il est sous-entendu que l'on somme sur j , à chaque fois que cet indice apparaît deux fois. Cette relation s'écrit $E_i(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)) = 0$, $\forall i$, où :

$$E_i(t, x, v, w) := \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial v^j}(t, x, v) w^j + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial x^j}(t, x, v) v^j + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial t}(t, x, v) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}(t, x, v).$$

À présent nous remarquons que, pour tout $(t, x, v, w) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe une application régulière $u : I \rightarrow \Omega$ telle que $(t, x, v, w) = (t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t))$. Donc l'hypothèse faite sur le lagrangien Λ revient à supposer que les fonctions E_i sont nulles. Notons que E_i est de la forme $A_i(t, x, v) + B_{ij}(t, x, v) w^j = 0$. En particulier, il faut que les coefficients B_{ij} s'annulent, c'est à dire :

$$\forall i, \quad \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial v^j}(t, x, v) = 0,$$

ce qui entraîne que Λ est une fonction affine de v dont les coefficients sont des fonctions de (t, x) , i.e. $\Lambda(t, x, v) = a(t, x) + b_j(t, x) v^j$. En reportant cette expression dans :

$$\forall i, \quad A_i(t, x, v) = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial x^j}(t, x, v) v^j + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^i \partial t}(t, x, v) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}(t, x, v) = 0,$$

on obtient :

$$\forall i, \quad \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(t, x) v^j + \frac{\partial b_i}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial a}{\partial x^i}(t, x) - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}(t, x) v^j = 0.$$

Cette relation n'est satisfaite pour tout v que si :

$$\forall i, \quad \frac{\partial b_i}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial a}{\partial x^i}(t, x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall i, j, \quad \frac{\partial b_i}{\partial x^j}(t, x) - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}(t, x) = 0,$$

ou encore $d(ad t + b_i dx^i) = 0$, ce qui entraîne qu'il existe une fonction $S : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $ad t + b_i dx^i = dS$ et donc (2).

3 Lagrangiens invariants par difféomorphismes

Exercice un peu difficile : il est recommandé de faire l'exercice précédent d'abord.

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On considère une densité lagrangienne

$$L : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, v) \mapsto L(t, x, v).$$

On suppose que L est continue sur $I \times \Omega \times \mathbb{R}^n$, est de classe \mathcal{C}^2 sur $I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et que $I \times \Omega \ni (t, x) \mapsto L(t, x, 0)$ est de classe \mathcal{C}^2 . Pour toute application $u : I \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^2 , on note $\mathcal{L}[u] := \int_I L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$. On suppose que \mathcal{L} est invariant sous l'action du groupe des difféomorphismes de I dans lui-même, c'est à dire : pour tout difféomorphisme $\varphi : I \rightarrow I$ qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact de I , on a :

$$\mathcal{L}[u \circ \varphi] = \mathcal{L}[u]. \quad (3)$$

1) (Question préliminaire) Soit n un entier strictement positif et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit d'une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est *positivement homogène* de degré α , si

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall s \in]0, +\infty[, \quad f(sv) = s^\alpha f(v).$$

Démontrer qu'une fonction continue positivement homogène de degré α qui est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ satisfait la relation d'Euler :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \alpha f(v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial v^i}(v).$$

Réponse — Il suffit de dériver par rapport à s la relation $f(sv) = s^\alpha f(v)$ et de prendre $s = 1$.

2) Montrer que la condition (3) est équivalente à une condition locale au même sens que la question précédente, c'est à dire à une condition de la forme

$$\forall(t, x, v, w) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n, \quad E(t, x, v, w) = 0.$$

Réponse — Tout difféomorphisme φ de I dans lui-même qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact peut être connecté à l'identité par une homotopie¹ $\Phi : [0, 1] \times I \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^1 , telle que $\forall s \in [0, 1]$, $\Phi(s, \cdot)$ est un difféomorphisme de I dans I qui coïncide avec l'identité en dehors d'un compact. La relation (3) est alors équivalente à prouver la relation

$$\frac{d}{ds} (\mathcal{L}[u \circ \Phi(s, \cdot)]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}[u \circ \Phi(s + \varepsilon, \cdot)] - \mathcal{L}[u \circ \Phi(s, \cdot)]}{\varepsilon} = 0, \quad \text{pour tout } u : I \rightarrow \Omega.$$

Or, pour tout $s \in [0, 1]$ fixé, on peut toujours écrire :

$$\forall t \in I, \quad u(\Phi(s + \varepsilon, t)) = u \left(\Phi(s) + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, t) + o(\varepsilon) \right) = u(\Phi(s, t)) + \varepsilon \dot{u}(\Phi(s, t)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, t) + o(\varepsilon)$$

ou, si on note $u_s(t) := u(\Phi(s, t))$ [de sorte que $\dot{u}_s(t) = \dot{u}(\Phi(s, t)) \frac{\partial \Phi}{\partial t}(s, t)$] et $X(t) := \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, t) / \frac{\partial \Phi}{\partial t}(s, t)$:

$$\forall t \in I, \quad u(\Phi(s + \varepsilon, t)) = u_s(t) + \varepsilon \dot{u}_s(t) X(t) + o(\varepsilon) \quad \text{et} \quad u(\Phi(s, t)) = u_s(t).$$

Ainsi, quitte à rebaptiser $u = u_s$, la propriété (3) est équivalente à prouver que, pour toute application $u : I \rightarrow \Omega$ et pour toute fonction régulière $X : I \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact,

$$\mathcal{L}[u + \varepsilon \dot{u}X] = \mathcal{L}[u] + o(\varepsilon^2).$$

En développant :

$$\mathcal{L}[u + \varepsilon \dot{u}X] = \mathcal{L}[u] + \varepsilon \int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, u(t), \dot{u}(t)) \dot{u}^i(t) X(t) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, u(t), \dot{u}(t)) \frac{d}{dt} (\dot{u}^i(t) X(t)) \right] dt + o(\varepsilon),$$

nous voyons que (3) équivaut à : $\forall X \in \mathcal{C}_c^1(I, \mathbb{R}), \forall u \in \mathcal{C}^2(I, \Omega)$,

$$\int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, u, \dot{u}) \dot{u}^i X + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, u, \dot{u}) \frac{d}{dt} (\dot{u}^i X) \right] dt = 0.$$

En intégrant par partie et en utilisant le fait que X est à support compact, cela donne :

$$\int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, u, \dot{u}) \dot{u}^i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, u, \dot{u}) \right) \dot{u}^i \right] X dt = 0.$$

Comme X est quelconque, on obtient donc en développant, que $\forall t \in I$:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, u, \dot{u}) \dot{u}^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t, u, \dot{u}) \dot{u}^i - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i}(t, u, \dot{u}) \dot{u}^j \dot{u}^i - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}(t, u, \dot{u}) \dot{u}^j \dot{u}^i = 0.$$

Et comme cette identité doit être vraie pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^2(I, \Omega)$, on en déduit comme à l'exercice 2 que : $\forall(t, x, v, w) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, E(t, x, v, w) = 0$, où

$$E(t, x, v, w) := \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x, v) v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t, x, v) v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i}(t, x, v) v^j v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}(t, x, v) v^j v^i.$$

3) Dédire de la question précédente que, $\forall j = 1, \dots, n, \forall(t, x) \in I \times \Omega, \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni v \mapsto \frac{\partial L}{\partial v^j}(t, x, v)$ est positivement homogène de degré 0. Montrer que

$$\forall(t, x, v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad L(t, x, v) = L(t, x, 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v) v^i. \quad (4)$$

1. $\Phi : [0, 1] \times I \rightarrow I$ est une homotopie si $\forall s \in [0, 1]$, $\Phi(s, \cdot)$ coïncide avec l'identité en dehors d'un compact de I , $\Phi(0, \cdot)$ est l'application identité de I dans I et $\Phi(1, \cdot) = \varphi$. Ici il suffit de prendre $\Phi(s, t) = (1 - s)t + s\varphi(t)$.

Réponse — L'expression $E(t, x, v, w)$ est une fonction affine de w . Le fait que E soit identiquement nul entraîne donc en particulier que, pour tout j , le coefficient de w^j s'annule, c'est à dire :

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}(t, x, v) v^i = 0.$$

Cela implique que, $\forall (t, x) \in I \times \Omega$, $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall s \in]0, +\infty[$, $\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial v^j}(t, x, sv) \right) = 0$ et donc que $s \mapsto \frac{\partial L}{\partial v^j}(t, x, sv)$ est une fonction constante. De l'identité :

$$L(t, x, v) - L(t, x, 0) = \int_0^1 \frac{d}{ds} (L(t, x, sv)) ds = \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, sv) v^i ds$$

on déduit alors (4).

4) Montrer que L satisfait la relation

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall i = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x, 0) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t, x, v). \quad (5)$$

Réponse — Nous allons utiliser la relation $E(t, x, v, 0) = 0$ et une conséquence de la relation (4) : en dérivant la relation (4) par rapport à x^i et en multipliant par v^i et en sommant sur i , on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x, v) v^i = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x, 0) v^i + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j}(t, x, v) v^j v^i$$

Nous en déduisons la simplification suivante

$$E(t, x, v, 0) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x, 0) v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i}(t, x, v) v^i.$$

Cette expression doit être identiquement nulle. En la dérivant par rapport à v^j , on obtient :

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^j}(t, x, 0) - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^j}(t, x, v) - \frac{\partial^3 L}{\partial t \partial v^i \partial v^j}(t, x, v) v^i.$$

Or, d'après la question 3),

$$\frac{\partial^3 L}{\partial t \partial v^i \partial v^j}(t, x, v) v^i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}(t, x, v) v^i \right) = \frac{\partial}{\partial t}(0) = 0,$$

donc on obtient la relation demandée.

5) Dédire des questions précédentes qu'il existe une fonction continue $F_0 : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est de classe \mathcal{C}^2 sur $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et positivement homogène de degré 1 par rapport à v et des fonctions $a, b_1, \dots, b_n : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t, x, v) = F_0(x, v) + a(t, x) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) v^i.$$

Réponse — Nous commençons par écrire un développement de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t}(t, x, v) &= \frac{\partial L}{\partial t}(t, x, 0) + \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial t}(t, x, sv) \right) ds \\ &= \frac{\partial L}{\partial t}(t, x, 0) + \int_0^1 \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial t}(t, x, sv) v^i ds \\ &= \frac{\partial L}{\partial t}(t, x, 0) + \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x, 0) v^i ds, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (5) pour obtenir la dernière ligne. Le terme dans l'intégrale s'avérant être indépendant de s , on en déduit que :

$$\frac{\partial L}{\partial t}(t, x, v) = \frac{\partial L}{\partial t}(t, x, 0) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, 0) v^i.$$

En supposant que $0 \in I$ et en intégrant l'identité précédente entre 0 et t , on obtient :

$$L(t, x, v) = L(0, x, v) + \int_0^t \left(\frac{\partial L}{\partial t}(\tau, x, 0) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(\tau, x, 0)v^i \right) d\tau,$$

ce qui nous donne la relation demandée avec :

$$F_0(x, v) := L(0, x, v) - L(0, x, 0), \quad a(t, x) := L(0, x, 0) + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial t}(\tau, x, 0) d\tau \quad \text{et} \quad b_i(t, x) := \int_0^t \frac{\partial L}{\partial v^i}(\tau, x, 0) d\tau.$$

6) En réutilisant la question 2), montrer² que

$$\forall (t, x) \in I \times \Omega, \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}(t, x) - \frac{\partial b_i}{\partial t}(t, x) \right) v^i = 0.$$

En déduire que l'on peut écrire :

$$\forall (t, x, v) \in I \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad L(t, x, v) = F(x, v) + \Lambda(t, x, v), \quad (6)$$

où Λ est un lagrangien nul de la forme (2) et F est positivement homogène de degré 1 par rapport à v . (Indication : poser $S(t, x) = \int_0^t a(\tau, x) d\tau$.)

Réponse — Nous repartons du résultat de la question précédente : $L(t, x, v) = F_0(x, v) + a(t, x) + b_i(t, x)v^i$ et substituons cette expression dans la relation $E(t, x, v, w) = 0$. Cela nous donne :

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x^i}(t, x) - \frac{\partial b_i}{\partial t}(t, x) \right) v^i = 0.$$

Posons $S(t, x) = \int_0^t a(\tau, x) d\tau$, de sorte que $\frac{\partial S}{\partial t} = a$, et $\Lambda(t, x, v) = \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial S}{\partial x^i}(t, x)v^i$. Alors $a(t, x) + b_i(t, x)v^i - \Lambda(t, x, v) = (b_i(t, x) - \frac{\partial S}{\partial x^i}(t, x))v^i$. Donc

$$\frac{\partial}{\partial t} (a + b_i v^i - \Lambda) = \frac{\partial}{\partial t} \left(b_i - \frac{\partial S}{\partial x^i} \right) v^i = \left(\frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x^i} \right) v^i = \left(\frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial x^i} \right) v^i = 0.$$

Cela signifie que $a + b_i v^i - \Lambda$ est une fonction de (t, x, v) qui est indépendante de t et linéaire en v , i.e.

$$a(t, x) + b_i(t, x)v^i - \Lambda(t, x, v) = c_i(x)v^i,$$

où les c_i sont des fonctions sur Ω . On conclut en posant $F(x, v) := F_0(x, v) + c_i(x)v^i$, qui reste une fonction positivement homogène de degré un en v .

4 Transformation de Legendre

Ecrire les transformations de Legendre pour le lagrangien nul Λ obtenu à la question 2 et pour le lagrangien L obtenu à la question 3. Montrer que, dans ces deux cas, la transformation de Legendre est dégénérée, c'est à dire que, pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ v &\longmapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v) dx^i \end{aligned}$$

n'est pas une bijection. Caractériser l'image de cette transformation (pour le lagrangien L de la question 3, on se placera dans un cas générique) et calculer l'hamiltonien.

Réponse — a) Pour le « lagrangien nul » Λ obtenu à l'exercice deux, on a d'après (2) :

$$p_i = \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i}(t, x, v) = b_i(t, x) = \frac{\partial S}{\partial x^i}(t, x).$$

2. Toutes mes excuses, il y avait une erreur dans l'énoncé, cette erreur est corrigée ici.

Donc si on fixe (t, x) alors l'application $v \mapsto p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Lambda}{\partial v^i}(t, x, v) dx^i$ est constante, est donc de rang zéro et en particulier dégénérée. [Remarque : l'image totale de la transformée de Legendre, c'est à dire l'image de l'application

$$\begin{aligned} I \times \Omega \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow T^*(I \times \Omega) \\ (t, x, v) &\longmapsto \left(t, x, \frac{\partial S}{\partial t}(t, x), \frac{\partial S}{\partial x^i}(t, x)\right) \end{aligned}$$

est une sous-variété de dimension $n + 1$ de $T^*(I \times \Omega)$ sur laquelle la forme symplectique $\omega = dp_0 \wedge dt + dp_i \wedge dx^i$ s'annule. Une telle sous-variété est appelée *sous-variété lagrangienne*.]

b) Pour le lagrangien invariant par difféomorphisme obtenu à la question trois, on a, en vertu de (6),

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v) = \frac{\partial S}{\partial x^i}(t, x) + \frac{\partial F}{\partial v^i}(x, v).$$

Comme la fonction F est homogène de degré 1 par rapport à v , $\frac{\partial F}{\partial v^i}$ est homogène de degré 0 par rapport à v , ce qui signifie que $\frac{\partial F}{\partial v^i}(x, \lambda v) = \lambda \frac{\partial F}{\partial v^i}(x, v)$. Donc, pour x fixé, l'image de $v \mapsto \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v)$ est, dans une situation générique, une hypersurface de $(\mathbb{R}^n)^*$. La transformation de Legendre est donc encore dégénérée. [Remarque : Dans une situation générique, l'image totale de la transformée de Legendre est une hypersurface de $T^*(I \times \Omega)$. La restriction de la forme symplectique à cette hypersurface n'est pas nulle, mais est dégénérée, au sens où elle admet en chaque point un noyau de dimension 1. L'intégration de cette distribution de droites tangentes à l'hypersurface donne les trajectoires hamiltoniennes.]