

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 2 NOVEMBRE 2010

1 Mécanique

Un point matériel de masse m glisse sans frottement à la surface d'une demi-sphère de rayon $R > 0$: $S_+ := \{(x = (x^1, x^2, x^3) \mid |x|^2 = R^2 \text{ et } x^3 \geq 0)\}$ et est soumis à la force de gravitation $F = mg(0, 0, -1)$ et à la force de réaction de la surface. On notera $u(t) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t), \sqrt{R^2 - r(t)^2})$ la position de ce point à un instant $t \in I \subset \mathbb{R}$.

1) La force de réaction de la surface est normale à la surface : pourquoi ? De quel potentiel dérive la force F ?

Réponse — Le fait que la force de réaction de la surface sur le point matériel soit normal est la traduction de l'hypothèse que le point glisse sans frottement. Enfin il est immédiat que $F = -\nabla(mgx^3)$, donc la force dérive du potentiel $V(x) = mgx^3$.

2) Donner les expressions de l'énergie cinétique $E_c(t)$, de l'énergie potentielle $E_p(t)$ et de l'énergie mécanique totale $E(t)$ du point à l'instant t .

Réponse — Pour calculer l'énergie cinétique, nous calculons d'abord $\dot{u} := \frac{du}{dt}$:

$$\dot{u} = \dot{r} \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) + r\dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

et nous en déduisons que $|\dot{u}|^2 = \frac{R^2 \dot{r}^2}{R^2 - r^2} + r^2 \dot{\theta}^2$ et donc que

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2 \dot{r}^2}{R^2 - r^2} + r^2 \dot{\theta}^2 \right).$$

L'énergie potentielle vaut $E_p(t) = mg\sqrt{R^2 - r(t)^2}$ et l'énergie mécanique est la somme $E_c(t) + E_p(t)$.

3) Construire un lagrangien $L : [0, R] \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que les trajectoires décrites plus haut soient obtenues en prenant les points critiques $t \mapsto (r(t), \theta(t))$ de l'action $\mathcal{L}[r, \theta] := \int_I L(r(t), \theta(t), \dot{r}(t), \dot{\theta}(t)) dt$.

Réponse — Nous prenons le lagrangien de Maupertuis :

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2 \dot{r}^2}{R^2 - r^2} + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - mg\sqrt{R^2 - r^2}.$$

4) Ecrire les équations d'Euler-Lagrange de l'action \mathcal{L} . Observer s'il existe des quantités conservées au cours du temps pour ces solutions. Interpréter. (On ne cherchera pas à résoudre les équations).

Réponse — Nous calculons $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{mR^2 \dot{r}}{R^2 - r^2}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$, $\frac{\partial L}{\partial r} = mr \left(\frac{R^2 \dot{r}^2}{(R^2 - r^2)^2} + \dot{\theta}^2 + \frac{g}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right)$ et $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$. Nous en déduisons que les équations d'Euler-Lagrange sont :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{R^2 \dot{r}}{R^2 - r^2} \right) = r \left(\frac{R^2 \dot{r}^2}{(R^2 - r^2)^2} + \dot{\theta}^2 + \frac{g}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right)$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \iff \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0.$$

Nous observons que la quantité $r^2 \dot{\theta}$ est conservée au cours du temps. C'est une conséquence du théorème de Noether et du fait que le problème est invariant par rotation autour de l'axe des x^3 .

2 Calcul des variations et champ magnétique

On considère un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et on se donne un lagrangien régulier

$$\begin{aligned} L : \Omega \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longmapsto L(x, v) \end{aligned}$$

et l'action

$$\mathcal{L}[u] := \int_I L(u(t), \dot{u}(t)) dt$$

définie sur l'espace des chemins $\{u : I \longrightarrow \Omega\}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . On considère une 1-forme régulière $A = A_i dx^i$ sur Ω et on considère le lagrangien

$$\begin{aligned} \tilde{L} : \Omega \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longmapsto \tilde{L}(x, v) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{L}(x, v) = L(x, v) + A_i(x)v^i.$$

Enfin on définit l'action

$$\tilde{\mathcal{L}}[u] := \int_I \tilde{L}(u(t), \dot{u}(t)) dt.$$

1) Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange des points critiques de $\tilde{\mathcal{L}}$ en fonction de L et de A . On pourra poser $F = \sum_{1 \leq i < j \leq n} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j := dA$.

Réponse — Il s'agit d'expliciter l'équation $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v^i}(x, \dot{x}) \right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i}(x, \dot{x})$. Pour cela nous commençons par calculer

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v^i}(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v) + A_i(x) \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v^i}(x, \dot{x}) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(x, \dot{x}) \right) + \frac{\partial A_i}{\partial x^j}(x) \dot{x}^j$$

et

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i}(x, v) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(x, v) + \frac{\partial A_j}{\partial x^i}(x)v^j \implies \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i}(x, \dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(x, \dot{x}) + \frac{\partial A_j}{\partial x^i}(x) \dot{x}^j.$$

Nous obtenons ainsi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(x, \dot{x}) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(x, \dot{x}) + \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right) \dot{x}^j = \frac{\partial L}{\partial x^i}(x, \dot{x}) + F_{ij}(x) \dot{x}^j.$$

2) (Etude d'un exemple.) On suppose que $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $L(x, v) = \frac{1}{2}m|v|^2$ et on pose $B = F_{12}$. Ecrire les équations d'Euler-Lagrange pour les points critiques de $\tilde{\mathcal{L}}$ dans ce cas et expliciter les solutions de ces équations.

Réponse — Dans ce cas $\frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v) = mv^i$ et $\frac{\partial L}{\partial x^i}(x, v) = 0$. Nous obtenons comme système d'équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{x}^1) = F_{1j}\dot{x}^j = F_{12}\dot{x}^2 = B\dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{x}^2) = F_{2j}\dot{x}^j = F_{21}\dot{x}^1 = -B\dot{x}^1 \end{cases}$$

soit encore

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}^1 \\ \ddot{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont (en notant a^1, a^2, φ et V des constantes d'intégration) :

$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + \frac{mV}{B} \begin{pmatrix} -\cos(\frac{B}{m}t - \varphi) \\ \sin(\frac{B}{m}t - \varphi) \end{pmatrix},$$

(solutions circulaires), si $B \neq 0$ et

$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 + tv^1 \\ a^2 + tv^2 \end{pmatrix},$$

(droites) si $B = 0$.

3) On suppose dans cette question et les suivantes que la transformée de Legendre pour L est *non dégénérée*, c'est à dire que :

$$\begin{aligned} \Omega \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \Omega \times (\mathbb{R}^n)^* \\ (x, v) &\longmapsto \left(x, \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v) dx^i\right) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme. On définit $H : \Omega \times (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$H(x, p) = p_i v^i - L(x, v) \quad \text{pour tout } (x, v, p) \text{ tel que } p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v).$$

Démontrer que la transformée de Legendre pour \tilde{L} est également non dégénérée. On notera \tilde{p}_i les coordonnées de l'impulsion pour la transformée de Legendre de \tilde{L} et \tilde{H} l'hamiltonien qui est image de \tilde{L} . Exprimer \tilde{p} en fonction de p et A et \tilde{H} en fonction de H et A .

Réponse — La coordonnée \tilde{p}_i est définie par la relation :

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v^i}(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v) + A_i(x)$$

et \tilde{H} est la fonction définie par :

$$\tilde{H}(x, \tilde{p}) = \tilde{p}_i v^i - \tilde{L}(x, v) \quad \text{pour tout } (x, v, \tilde{p}) \text{ tel que } \tilde{p}_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v^i}(x, v).$$

Nous remarquons que, en posant $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v)$, la condition $\tilde{p}_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v^i}(x, v)$ est équivalente à $\tilde{p}_i = p_i + A_i(x)$ et l'équation qui définit \tilde{H} s'écrit alors :

$$\tilde{H}(x, p + A_x) = (p_i + A_i(x))v^i - \tilde{L}(x, v) \quad \text{pour tout } (x, v, p) \text{ tel que } p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v).$$

Cela nous donne :

$$\tilde{H}(x, p + A(x)) = (p_i + A_i(x))v^i - (L(x, v) + A_i(x)v^i) = p_i v^i - L(x, v) = H(x, p).$$

Donc

$$\tilde{H}(x, \tilde{p}) = H(x, \tilde{p} - A_x).$$

4) On note $\tilde{\omega} = d\tilde{p}_i \wedge dx^i$ la forme symplectique sur $T^*\Omega = \Omega \times (\mathbb{R}^n)^*$. Expliciter les coordonnées du champ de vecteur hamiltonien $\xi_{\tilde{H}}$ associé à \tilde{H} en fonction de H et de A .

Réponse — Notons

$$\xi_{\tilde{H}} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_i}$$

et cherchons les valeurs que doivent prendre les fonctions a^i et b_i de façon à avoir $\xi_{\tilde{H}} \lrcorner \tilde{\omega} + d\tilde{H} = 0$. Nous avons d'une part

$$\xi_{\tilde{H}} \lrcorner \tilde{\omega} = b_i dx^i - a^i d\tilde{p}_i$$

et, d'autre part, en utilisant le résultat de la question précédente,

$$d\tilde{H} = \left(\frac{\partial H}{\partial x^i}(x, \tilde{p} - A_x) - \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, \tilde{p} - A_x) \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) dx^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}(x, \tilde{p} - A_x) d\tilde{p}_i.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a^i(x, \tilde{p}) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(x, \tilde{p} - A_x) \\ b_i(x, \tilde{p}) &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x, \tilde{p} - A_x) + \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, \tilde{p} - A_x) \frac{\partial A_j}{\partial x^i}. \end{cases}$$

Donc

$$\xi_{\tilde{H}} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x, \tilde{p} - A_x) \frac{\partial}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial H}{\partial x^i}(x, \tilde{p} - A_x) - \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, \tilde{p} - A_x) \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

5) On note

$$\begin{aligned} \varphi : T^*\Omega &\longrightarrow T^*\Omega \\ (x, p) &\longmapsto (x, p + A_x). \end{aligned}$$

Calculer $\varphi^*\tilde{H} = \tilde{H} \circ \varphi$ et $\varphi^*\tilde{\omega}$ en fonction de H , A et $\omega := dp_i \wedge dx^i$. Ecrire les équations de Hamilton pour $\varphi^*\tilde{H}$ et $\varphi^*\tilde{\omega}$, c'est à dire les équations du flot du champ de vecteur ζ sur $T^*\Omega$ défini par $\zeta \lrcorner \varphi^*\tilde{\omega} + d\varphi^*\tilde{H} = 0$. Interpréter.

Réponse — On obtient $(\varphi^*\tilde{H})(x, p) = H(x, p)$ et $\varphi^*\tilde{\omega} = \omega + F$. Pour écrire les équations de Hamilton correspondant à ce hamiltonien et avec cette forme symplectique, on recherche d'abord les composantes du champ de vecteur hamiltonien ζ tel que $\zeta \lrcorner \varphi^*\tilde{\omega} + d\varphi^*\tilde{H} = 0$. Notant $\zeta = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$, on obtient en écrivant l'équation précédente que :

$$\zeta = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x, p) \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(-\frac{\partial H}{\partial x^i}(x, p) + F_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, p) \right) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Les équations de la dynamique sont donc

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x, p) \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x, p) + F_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, p). \end{cases}$$

On reconnaît alors facilement que ces équations sont équivalentes aux équations d'Euler–Lagrange obtenues à la question 1). On conclut de tout cela que, pour tenir compte du passage du lagrangien L au lagrangien \tilde{L} dans la formulation hamiltonienne, il suffit

- soit de remplacer H par \tilde{H} défini par $\tilde{H}(x, \tilde{p}) = H(x, \tilde{p} - A_x)$ et ω par $\tilde{\omega} = d\tilde{p}_i \wedge dx^i$ (c'est le résultat de la question 3) ;
- soit de ne pas changer l'hamiltonien, mais de remplacer la forme symplectique ω par $\omega + F = d(p_i + A_i(x)) \wedge dx^i$.

Dans tous les cas, cela repose sur la substitution $p \longmapsto \tilde{p} = p + A_x$.

6) Que peut-on dire dans les questions précédentes lorsque $A = dV$, où $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$?

Réponse — Si $A = dV$, alors $F = dA = 0$. Les équations d'Euler–Lagrange ne changent pas. Cependant il est remarquable que l'hamiltonien \tilde{H} correspondant au lagrangien $L(x, v) + A_i(x)v^i$ est différent de H , bien que la dynamique soit identique. Cela montre que, dans la formulation hamiltonienne, l'impulsion p n'est définie que modulo l'addition d'une forme exacte en la variable x .

(Remarque : au niveau quantique cette propriété sera transposée sous la forme suivante : la fonction d'onde n'est pas réellement une fonction définie sur l'espace et à valeurs dans \mathbb{C} , mais une section d'un fibré en droites vectorielles complexes.)

3 Matériau paramagnétique

Un matériau paramagnétique¹ est modélisé par une assemblée de N moments magnétiques (numérotés par i , variant entre 1 et N). Pour tout i , la composante μ_i suivant la direction e_3 du moment magnétique numéro i ne peut prendre que deux valeurs : μ et $-\mu$. On notera $\mu_i = \mu\sigma_i$, où $\sigma_i = \pm 1$. On associera à l'état microscopique du matériau la collection $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1, 1\}^N =: \mathcal{P}$. On suppose que le matériau est soumis à un champ magnétique constant et uniforme, dirigé dans la direction e_3 et d'intensité B . L'énergie de l'ion numéro i est égale à $-B\mu_i = -B\mu\sigma_i$ et on néglige l'énergie d'interaction entre les différents ions (comme pour un gaz parfait), de sorte que l'on suppose que l'énergie totale du matériau dans l'état microscopique $\sigma \in \mathcal{P}$ est

$$H(\sigma) := \sum_{i=1}^N -B\mu_i = -\mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

Pour toute loi de probabilité p sur \mathcal{P} et pour toute observable $A : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$, on note

$$\langle A \rangle_p := \sum_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \mathcal{P}} p(\sigma) A(\sigma).$$

1. solide ionique isolant dont certains ions ont un moment magnétique non nul

1) On suppose uniquement dans cette question que $B = 0$, que le système est totalement désordonné et que chaque état microscopique est équiprobable : à quelle loi de probabilité ces hypothèses correspondent ? Quelle est la valeur de l'entropie correspondante ?

Réponse — Chaque probabilité $p(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ est égale à une même valeur q . Comme $1 = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} p(\sigma) = 2^N q$, on a $q = 2^{-N}$. La valeur de l'entropie pour cette état est $S = k \log W$, où W est le nombre d'état, c'est à dire $W = 2^N$. Donc $S = kN \log 2$.

2) On suppose désormais que le système est soumis à un champ magnétique B non nul (donc l'hamiltonien H est non nul). Pour $\beta > 0$, on pose

$$Z_N(\beta) := \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} e^{-\beta H(\sigma)}.$$

Montrer que la fonction $\beta \mapsto Z_N(\beta)$ peut se factoriser comme le produit de N fonctions identiques. [Indication : si on ne voit pas comment faire, on pourra commencer par considérer le cas $N = 1$, puis $N = 2$, etc.] En déduire quel est le nombre d'états microscopiques $\sigma \in \mathcal{P}$ tels que $H(\sigma) = -\mu B(N - 2q)$, où $q \in \mathbb{N}$ est compris entre 0 et N .

Réponse — On a :

$$\begin{aligned} Z_N(\beta) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} e^{\beta \mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i} = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N = \pm 1} \prod_{i=1}^N e^{\beta \mu B \sigma_i} \\ &= \sum_{\sigma_1 = \pm 1} e^{\beta \mu B \sigma_1} \sum_{\sigma_2, \dots, \sigma_N = \pm 1} \prod_{i=2}^N e^{\beta \mu B \sigma_i} = (e^{\beta \mu B} + e^{-\beta \mu B}) \sum_{\sigma_2, \dots, \sigma_N = \pm 1} \prod_{i=2}^N e^{\beta \mu B \sigma_i}. \end{aligned}$$

Donc une récurrence immédiate donne :

$$Z_N(\beta) = (e^{\beta \mu B} + e^{-\beta \mu B}) Z_{N-1}(\beta) = (e^{\beta \mu B} + e^{-\beta \mu B})^N.$$

En développant cette expression, on trouve

$$Z_N(\beta) = \sum_{q=0}^N \frac{N!}{q!(N-q)!} e^{(N-q)\beta \mu B} e^{q\beta \mu B} = \sum_{q=0}^N \frac{N!}{q!(N-q)!} e^{-\beta E(q)},$$

où $E(q) := -\mu B(N - 2q)$. On en déduit que le nombre d'états microscopiques $\sigma \in \mathcal{P}$ tels que $H(\sigma) = -\mu B(N - 2q)$ est $\frac{N!}{q!(N-q)!}$.

3) On suppose que N est très grand et on se donne une valeur $U \in [-N\mu B, N\mu B]$, qui n'est pas proche² de $-N\mu B$ ou de $N\mu B$. On suppose que les ions peuvent échanger de l'énergie entre eux et que le système peut ainsi évoluer vers un état d'équilibre thermodynamique que l'on représente par une loi de probabilité p sur \mathcal{P} . On suppose que le système a été préparé de manière « microcanonique », c'est à dire de façon telle que son énergie totale soit dans l'intervalle $[U - \delta U, U + \delta U]$, où δU est une incertitude très petite (par exemple, du même ordre de grandeur que μB). Donner une estimation du nombre W d'états microscopiques autorisés au système (on rappelle la formule de Stirling $N! \simeq N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$). Estimer l'entropie $S = k \log W$ en fonction de U (on pourra aussi poser $U = N\mu B u$).

Réponse — D'après la question précédente et l'hypothèse sur δU , le nombre W est du même ordre de grandeur que $\frac{N!}{q!(N-q)!}$ (c'est à dire que $R := W \frac{q!(N-q)!}{N!}$ est un polynôme en N, q , où q est un entier tel que $|U + \mu B(N - 2q)| < \delta U$. Les hypothèses sur U (qui ne s'approche pas des bornes de $[-N\mu B, N\mu B]$) entraînent quant à elles que $N - q \gg 1$ et $q \gg 1$. On a donc en utilisant la formule de Stirling :

$$W = R \frac{N!}{q!(N-q)!} \simeq \frac{RN^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}}{q^q e^{-q} \sqrt{2\pi q} (N-q)^{n-q} e^{-N+q} \sqrt{2\pi(N-q)}} = \frac{R}{\left(\frac{q}{N}\right)^q \left(\frac{N-q}{N}\right)^{N-q} \sqrt{2\pi q(N-q)/N}}.$$

Donc, comme la constante de Boltzmann k est très petite, on peut négliger $k \log R / \sqrt{2\pi q(N-q)/N}$ dans $k \log W$ et écrire :

$$S = k \log W = -k \frac{q}{N} \log \frac{q}{N} - k \frac{N-q}{N} \log \frac{N-q}{N}.$$

2. par exemple au sens où $|U \pm N\mu B| > \alpha N\mu B$, où $0 < 1/N \ll \alpha < 1$

Il nous reste à estimer cette quantité en fonction de U ou de $u = U/(N\mu B)$. Comme $U = -\mu B(N - 2q)$, on a $q = \frac{1}{2}(N + \frac{U}{\mu B}) = \frac{N}{2}(1 + u)$ et $N - q = \frac{1}{2}(N - \frac{U}{\mu B}) = \frac{N}{2}(1 - u)$, donc

$$\begin{aligned} S(U) &= -kN \frac{1+u}{2} \log \frac{1+u}{2} - kN \frac{1-u}{2} \log \frac{1-u}{2} \\ &= kN \log 2 - \frac{kN}{2} ((1+u) \log(1+u) + (1-u) \log(1-u)) \\ &= kN \log 2 - \frac{kN}{2} \left(\left(1 + \frac{U}{N\mu B}\right) \log \left(1 + \frac{U}{N\mu B}\right) + \left(1 - \frac{U}{N\mu B}\right) \log \left(1 - \frac{U}{N\mu B}\right) \right). \end{aligned}$$

4) Dans la suite, on considérera u comme une variable continue : justifier ce point.

Réponse — En effet u est a priori une variable discrète (puisque $u = 2\frac{q}{N} - 1$ et q prend des valeurs entières), mais comme N est très grand, le pas de discrétisation est très petit et impossible à observer lors d'une mesure macroscopique. On peut donc considérer u comme une variable continue.

5) On considère deux morceaux de tailles différentes du matériau étudié jusqu'à présent : le premier système contient N_1 ions et est soumis à un champ magnétique constant égal à $B_1 e_3$, le deuxième système contient N_2 ions et est soumis à un champ magnétique constant égal à $B_2 e_3$ (où $N_1, N_2 \gg 1$). On suppose que le premier système a initialement une énergie \bar{U}_1 et le deuxième, une énergie \bar{U}_2 . Enfin les deux systèmes sont isolés adiabatiquement du reste du monde. On les met en contact thermique l'un avec l'autre (tout en restant chacun soumis aux champs magnétiques B_1 et B_2 respectivement) et on attend que l'équilibre thermodynamique s'établisse dans le système total. Montrer que la théorie de Boltzmann permet de calculer les énergies U_1 et U_2 des deux échantillons une fois que l'on est arrivé à l'équilibre (on se contentera de poser un système d'équations qu'on ne cherchera pas à résoudre). Justifier au passage pourquoi il est raisonnable de définir la température T d'un matériau paramagnétique par :

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{N\mu B} \frac{\partial S}{\partial u}.$$

Réponse — D'une part, la réunion des deux matériaux étant isolée adiabatiquement du reste du monde, on doit avoir conservation de l'énergie et donc (en posant $U_1 = N_1\mu B_1 u_1$ et $U_2 = N_2\mu B_2 u_2$) :

$$N_1\mu B_1 u_1 + N_2\mu B_2 u_2 = U_1 + U_2 = U,$$

où l'on a posé $U := \bar{U}_1 + \bar{U}_2$. D'autre part, l'équilibre s'établit entre les deux systèmes pour une entropie totale $S(U_1, U_2) := S_1(U_1) + S_2(U_2)$ maximale. On doit donc maximiser $S_1(U_1) + S_2(U_2)$ sous la contrainte $U_1 + U_2 = U$. On peut remarquer que le maximum existe car la fonction $S(U_1, U_2)$ est concave, car elle la somme de deux fonctions concaves d'une variable. Dans l'approximation où u_1 et u_2 sont des variables continues, le maximum de l'entropie est caractérisé par :

$$\frac{d}{du_1} (S_1(N_1\mu B_1 u_1) + S_2(U - N_1\mu B_1 u_1)) = 0.$$

Cette condition équivaut à $\frac{dS_1}{du_1}(U_1) = \frac{dS_2}{du_2}(U_2)$, elle permet de retrouver le premier principe de la thermodynamique. Il est donc naturel d'identifier $\frac{\partial S}{\partial U}(U)$ à une fonction de la température.

6) On considère à nouveau un seul morceau de matériau, comme dans les questions 2) à 4), soumis à un champ magnétique fixe B . On suppose que le matériau est à l'équilibre thermodynamique. Exprimer la température T en fonction de U et en déduire U en fonction de T .

Réponse — On utilise pour T la définition proposée à la dernière question :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{1}{N\mu B} \frac{\partial S}{\partial u} = \frac{1}{N\mu B} \frac{\partial}{\partial u} \left(\log 2 - \frac{kN}{2} ((1+u) \log(1+u) + (1-u) \log(1-u)) \right) \\ &= \frac{k}{2\mu B} \log \frac{1-u}{1+u}, \end{aligned}$$

ce qui donne encore $\beta = \frac{1}{kT} = \frac{1}{2\mu B} \log \frac{1-u}{1+u}$. En inversant cette relation on trouve :

$$U = -N\mu B \tanh \frac{\mu B}{kT}.$$