# Corrigé de l'examen du 13 janvier 2010

Courbes et surfaces paramétrées - CS3

---

**Exercice 1.** On considère l'immersion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f(t) = (\mathrm{ch}t, \mathrm{sh}t)$. On note $\Gamma$ la courbe image de $f$.

1. Exprimer le vecteur tangent unitaire $\tau(t)$ et le vecteur normal unitaire $\nu(t)$ à $\Gamma$ au point $f(t)$ en fonction de $t$ et en fonction des coordonnées $(x, y)$ de $f(t)$.
**Réponse** — Calculons la norme du vecteur vitesse $\dot{f}(t)$ : $||\dot{f}(t)||^2 = \mathrm{ch}^2 t + \mathrm{sh}^2 t = \mathrm{ch}(2t)$. Nous en déduisons donc que $\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}(2t)}}(\mathrm{sh}t, \mathrm{ch}t)$ et $\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}(2t)}}(-\mathrm{ch}t, \mathrm{sh}t)$. En fonction de $(x, y) = (\mathrm{ch}t, \mathrm{sh}t)$, cela donne : $\dot{f}(t) = (y, x)$, $||\dot{f}(t)||^2 = x^2 + y^2$ et $\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, x)$, $\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x, y)$.

2. Exprimer la valeur de la courbure de $\Gamma$ au point $f(t)$ en fonction de $t$ et en fonction des coordonnées $(x, y)$ de $f(t)$.
**Réponse** — On utilise la formule $\kappa(t) = \frac{\det(\dot{f}(t), \ddot{f}(t))}{||\dot{f}(t)||^3}$ : comme $\ddot{f}(t) = (\mathrm{ch}t, \mathrm{sh}t)$, cela donne $\kappa(t) = \frac{\mathrm{sh}^2 t - \mathrm{ch}^2 t}{\sqrt{\mathrm{ch}(2t)}^3} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}(2t)}^3} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$.

---

**Exercice 2.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On se donne deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $(a(t), b(t)) \neq (0, 0)$, $\forall t \in I$. Pour chaque $t \in I$ on note $D(t)$ la droite du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation $a(t)x + b(t)y = 1$ et $D_0(t)$ la droite vectorielle d'équation $a(t)x + b(t)y = 0$.

1. Montrer que toute droite $D$ du plan qui ne passe pas par l'origine peut être définie par une équation $ax + by = 1$.
**Réponse** — Toute droite du plan a pour équation $\alpha x + \beta y = \gamma$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. De plus une telle droite ne passe pas par l'origine ssi $\gamma \neq 0$. Alors, si cette inégalité est vérifiée, il suffit de prendre $a = \alpha/\gamma$ et $b = \beta/\gamma$.

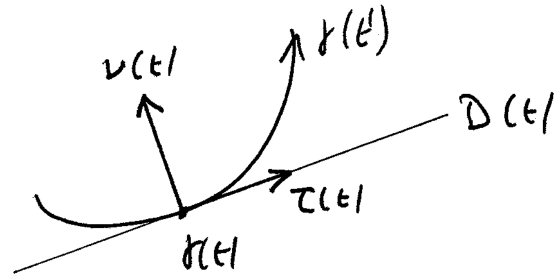
2. On suppose qu'il existe une immersion $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que
$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) \in D(t) \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}(t) \in D_0(t) \qquad \text{(H)}$$
Traduire ces deux conditions par un système d'équation sur les composantes $(\gamma_1, \gamma_2)$ de $\gamma$.
**Réponse** — La première condition se traduit par $a\gamma_1 + b\gamma_2 = 1$, la seconde par $a\dot{\gamma}_1 + b\dot{\gamma}_2 = 0$.

3. Montrer que $\dot{a}\gamma_1 + \dot{b}\gamma_2 = 0$.
**Réponse** — En dérivant la première équation obtenue par rapport à $t$, on obtient : $\dot{a}\gamma_1 + a\dot{\gamma}_1 + \dot{b}\gamma_2 + b\dot{\gamma}_2 = 0$. En retranchant la deuxième équation obtenue à la question précédente, on a : $\dot{a}\gamma_1 + \dot{b}\gamma_2 = 0$.

4. En déduire que, si $\begin{vmatrix} a & b \\ \dot{a} & \dot{b} \end{vmatrix} \neq 0$, il existe une unique paramétrisation $\gamma$ satisfaisant les conditions (H). On explicitera $\gamma$.
**Réponse** — On a montré que, si $\gamma$ satisfait l'hypothèse (H), alors ses composantes sont solutions du système :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a\gamma_1 + b\gamma_2 & = & 1 \\ \dot{a}\gamma_1 + \dot{b}\gamma_2 & = & 0 \end{array} \right.$$
Noter que les solutions de ce système sont exactement les solutions de (H). Si le déterminant de ce système est non nul, il admet une unique solution, qui est donnée par :
$$\gamma(t) = \frac{(\dot{b}, -\dot{a})}{a\dot{b} - \dot{a}b}.$$

5. Déterminer le vecteur tangent unitaire $\tau(t)$ et le vecteur normal unitaire $\nu(t)$ de $\gamma$ en fonction de $a$, $b$ et de leurs dérivées.
**Réponse** — Un calcul direct donne :
$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{a}\ddot{b} - \ddot{a}\dot{b}}{(a\dot{b} - \dot{a}b)^2}(-b, a)$$
et on en déduit $\tau = \dot{\gamma}/||\dot{\gamma}|| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b, a)$ et donc $\nu = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a, -b)$. On peut remarquer que la deuxième équation de la condition (H) signifie que la droite vectorielle tangente à la courbe est $D_0(t)$, ce qui est équivalent à dire que $\dot{\gamma}$ appartient à $D_0$. On pouvait donc prévoir ainsi $\tau$ et $\nu$ au signe près.

6. Illustrer le tout par une figure.
**Réponse** —



---

**Exercice 3.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une immersion normale (i.e. $||\gamma'|| = 1$) telle que $\gamma'' \neq 0$. Soit $\alpha > 0$ est une constante. On note $(e_1, e_2, e_3)$ la base orthonormée directe canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(s) = \left(\gamma_1\left(\frac{s}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right), \gamma_2\left(\frac{s}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right), \frac{\alpha s}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right).$$

1. Montrer que $f$ est une immersion normale et que la tangente à la courbe image fait un angle constant avec une direction fixe dont on précisera un vecteur directeur.
**Réponse** — Comme $\gamma$ est une immersion, c'est en particulier une application régulière et donc $f$ est aussi régulière. De plus $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\gamma_1'\left(\frac{s}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right), \gamma_2'\left(\frac{s}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right), \alpha\right) = \tau(s)$ ne s'annule jamais et (en notant $t = s/\sqrt{1+\alpha^2}$)
$$||f'(s)||^2 = \frac{1}{1+\alpha^2}\left((\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + \alpha^2\right) = \frac{||\gamma'(t)||^2 + \alpha^2}{1+\alpha^2} = 1.$$
Donc $\gamma$ est une immersion normale. De plus $\langle \tau(s), e_3\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ est constant, ce qui implique que $\tau$ fait un angle constant avec $e_3$.
2. On note $(\tau, \nu, \beta)$ le repère de Frenet associé à $f$ et on rappelle que $\frac{d\tau}{ds} = \kappa\nu$, $\frac{d\nu}{ds} = -\kappa\tau + \chi\beta$ et $\frac{d\beta}{ds} = -\chi\nu$. Montrer que, pour tout $s$, $\nu(s)$ est orthogonal à $e_3$.
**Réponse** — Le résultat de la question précédente implique :
$$\kappa\langle \nu, e_3\rangle = \langle \kappa\nu, e_3\rangle = \left\langle \frac{d\tau}{ds}, e_3\right\rangle = \frac{d}{ds}\langle \tau, e_3\rangle = 0.$$
Mais par ailleurs l'hypothèse $\gamma'' \neq 0$ entraîne que $f''(s) = \frac{1}{1+\alpha^2}(\gamma_1''(t), \gamma_2''(t), 0) \neq 0$ (où l'on note $t = s/\sqrt{1+\alpha^2}$) et donc, comme $\tau = f'$, que $\kappa\nu = \frac{d\tau}{ds} = f'' \neq 0$ et on en déduit que $\kappa$ ne s'annule jamais. On conclut donc que $\langle \nu, e_3\rangle = 0$.
3. Montrer que $\langle \beta(s), e_3\rangle$ est indépendant de $s$.
**Réponse** — Cela est une conséquence de la question précédente :
$$\frac{d}{ds}\langle \beta, e_3\rangle = \left\langle \frac{d\beta}{ds}, e_3\right\rangle = -\chi\langle \nu, e_3\rangle = 0.$$
4. Montrer que le rapport de la torsion par la courbure est constant.
**Réponse** — En utilisant le fait que $\nu$ est orthogonal à $e_3$, on obtient
$$0 = \frac{d}{ds}\langle \nu, e_3\rangle = \left\langle \frac{d\nu}{ds}, e_3\right\rangle = \langle -\kappa\tau + \chi\beta, e_3\rangle = -\kappa\langle \tau, e_3\rangle + \chi\langle \beta, e_3\rangle.$$
Et donc (en utilisant le fait que $\kappa \neq 0$)
$$\frac{\chi}{\kappa} = \frac{\langle \tau, e_3\rangle}{\langle \beta, e_3\rangle} \quad \text{est constant.}$$

---

**Exercice 4.** On note $\overline{B^2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B^2}$ et considère la fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

1. Démontrer que $f$ est régulière sur $\Omega$. Déterminer son gradient.
**Réponse** — $f$ est la composée de la fonction polynôme $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1$ et de la fonction $z \longmapsto \sqrt{z}$ et, de plus $x^2 + y^2 - 1$ est strictement positif sur $\Omega$. Donc $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega$ (donc en particulier $\mathcal{C}^2$) et
$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right).$$
On remarque que $\nabla f(x, y) = (\frac{x}{f(x,y)}, \frac{y}{f(x,y)})$.

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2+b^2-c^2=1$ et $c>0$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = f(x,y) - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$. Démontrer que $(a,b)$ est point critique de $g$.
**Réponse** — Les hypothèses sur $(a,b,c)$ entraînent que $(a,b) \in \Omega$ et $c = f(a,b)$. Donc d'après la question précédente, $\nabla f(a,b) = (\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$. Donc $\nabla g(x,y) = \nabla f(x,y) - (\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = \nabla f(x,y) - \nabla f(a,b)$ s'annule en $(a,b)$.
3. Calculer la matrice hessienne de $g$ en $(a,b)$. En déduire si $(a,b)$ est un extrèmum local ou un point selle de $g$.
**Réponse** — Nous essayons de répondre à cette question en calculant le hession de $f$ :

$$\mathrm{Hess}_{(x,y)} f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}^3} \begin{pmatrix} y^2-1 & -xy \\ -xy & x^2-1 \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que le déterminant de ce hessien est égal à $\frac{-1}{x^2+y^2-1}$ : il est donc strictement négatif partout, donc en particulier en $(a,b)$. Cela signifie que $(a,b)$ est un point selle ou un col.

---

**Exercice 5. [optionnel]** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(\theta,t) = (\cos\theta - t\sin\theta, \sin\theta + t\cos\theta, t)$

1. Montrer que $f$ est une immersion. Est-ce un plongement ?
**Réponse** — L'application $f$ est clairement $\mathcal{C}^\infty$. De plus

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta - t\cos\theta \\ \cos\theta - t\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc le système $(\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial t})$ est de rang 2 partout (en particulier $\frac{\partial f}{\partial \theta} \times \frac{\partial f}{\partial t} = (\cos\theta - t\sin\theta, \sin\theta + t\cos\theta, -t) \neq 0$), ce qui entraîne que $f$ est une immersion. En revanche $f$ n'est pas un plongement car cette application n'est pas injective, en raison du fait qu'elle est périodique : $f(\theta + 2\pi, t) = f(\theta, t)$.
2. Calculer $x^2+y^2-z^2$, où $(x,y,z)$ sont les composantes de $f$. Déterminer l'image $\Sigma$ de $f$.
**Réponse** — On obtient $x^2+y^2-z^2=1$. Donc l'image de $f$ est contenue dans la surface (étudiée à la question précédente) d'équation $x^2+y^2-z^2=1$ (hyperboloïde de révolution). Montrons que cette surface est égale à l'image de $f$, c'est à dire que, pour tout point $(x,y,z)$ satisfaisant $x^2+y^2-z^2=1$, il existe $(\theta,t)$ tel que $f(\theta,t) = (x,y,z)$. Cela revient à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos\theta - t\sin\theta & = & x \\ \sin\theta + t\cos\theta & = & y \\ t & = & z \end{array} \right.$$

On obtient immédiatement que $t = z$. En remplaçant cette valeur dans les deux premières équations, on obtient que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont solutions d'un système de deux équations à deux inconnues, dont la solution est $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{x+zy}{1+z^2}, \frac{y-zx}{1+z^2}\right)$. Ces équations admettent une solution $\theta$ (unique modulo $2\pi$) à cause de la relation

$$\left(\frac{x+zy}{1+z^2}\right)^2 + \left(\frac{y-zx}{1+z^2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{1+z^2} = 1,$$

où l'on a utilisé la relation $x^2+y^2-z^2=1$.
3. Quelle est l'image par $f$ d'une droite $\Delta_{\theta_0} := \{(\theta_0, t) |\ t \in \mathbb{R}\}$ ? Faire une figure.
**Réponse** — C'est une droite de $\mathbb{R}^3$.