$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$: corps commutatif ordonné

($\text{Autre exemple} : (\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$)

Propriété de borne supérieure de $\mathbb{R}$: tout sous-ensemble $\neq \emptyset$ et majoré admet une borne supérieure. $\boxed{\text{dans } \mathbb{R}}$

<u>Proposition</u> $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

<u>Preuve</u> Raisonnons par l'absurde : supposons :

$$\exists\, p \in \mathbb{Z},\ \exists\, q \in \mathbb{N}^*,\quad \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

a) On peut supposer, sans perte de généralité, que p et q ne sont pas <u>pairs</u> <u>simultanément</u>.

Si $p = 2p_1$, $q = 2q_1$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{p}{q} = \frac{\cancel{2}p_1}{\cancel{2}q_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

Si p_1 et q_1 sont pairs simultanément, on répète ...

Mais $\left|\frac{q}{2^n}\right| < 1$ pour n assez grand, donc cet algorithme doit s'arrêter, à une situation où l'un des deux entiers au moins est impair.

b) Écrivons $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \implies 2q^2 = p^2$

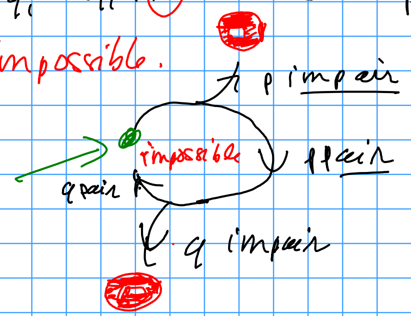
— Soit $p = 2p_1 + 1$, $2q^2 = 4p_1^2 + 4p_1 + 1$: impair impossible

— Donc $\underline{p = 2p_1}$, alors $\cancel{2}q^2 = 2\cancel{4}p_1^2 \iff q^2 = 2p_1^2$

— Soit $q = 2q_1 + 1$, alors $4q_1^2 + 4q_1 + 1 = 2p_1^2$: impossible

— Donc $\underline{q_1 \text{ est pair}}$. Impossible.

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$? $\longrightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$



$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,;\, x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$A \neq \emptyset$, A est majoré.

$\sup A$ = borne supérieure dans $\mathbb{R}$ $= \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Dans $\mathbb{Q}$, A n'a pas de borne supérieure.

Rappel de la définition de la borne supérieure d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$

Soit $a = \sup A$.

(i) a majore A

(ii) a est le plus petit des majorants de A : dès que je "diminue" un peu la valeur de a, je n'ai plus de majorant de A.

(i) $\forall x \in A, \quad x \leq a$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \quad a - \varepsilon < x \leq a$

Propriété : Si A admet une borne supérieure, celle-ci est unique.

Preuve Supposons que a et $\tilde{a}$ soit 2 bornes supérieures de A.

$\forall x \in A, \quad \boxed{x \leq a}, \quad \boxed{x \leq \tilde{a}}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \quad \boxed{a - \varepsilon < x} \leq a$

$\exists \tilde{x} \in A, \quad \boxed{\tilde{a} - \varepsilon < \tilde{x}} \leq \tilde{a}$

$\Longrightarrow \quad a - \varepsilon < x \leq \tilde{a}.$

$\tilde{a} - \varepsilon < \tilde{x} \leq a$

Donc $a - \varepsilon < \tilde{a}$ et $\tilde{a} - \varepsilon < a$

$\Longleftrightarrow \quad -\varepsilon < \tilde{a} - a$ et $\tilde{a} - a < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \boxed{(0 \leq) \; |\tilde{a} - a| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0} \quad \Longrightarrow |\tilde{a} - a| = 0$

$\Longleftrightarrow \tilde{a} = a$

Applications : construire la fonction "partie entière".

Comment Soit $x \in \mathbb{R}$, on veut montrer :

$\exists n \in \mathbb{Z}, \quad n \leq x < n+1$. On note $E(x) = [x] = n$ partie entière.

Soit $A = \{ n \in \mathbb{Z} \; ; \; n \leq x \}$

(a) $A \neq \emptyset$: $\exists n \in \mathbb{Z}, \; n \leq x$ ($\mathbb{R}$ archimédien)

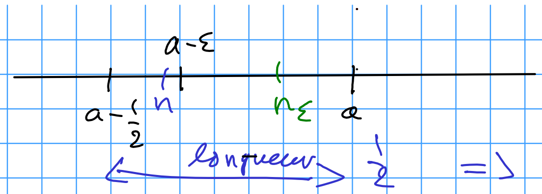
(b) A est majoré : par définition, majoré par x.

$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad y > 0, \; \alpha > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}, \; n\alpha > y}$

Soit $a = \sup(A)$.

Pour "ε" $= \frac{1}{2}$, $\exists n \in A$, $\quad a - \frac{1}{2} < n \leq a$

$\forall \varepsilon > 0, \; \varepsilon < \frac{1}{2}, \; \exists n_\varepsilon \in A, \quad a - \varepsilon < n_\varepsilon \leq a \Longrightarrow a - \frac{1}{2} < n_\varepsilon \leq a$



$\Rightarrow |n - n_\varepsilon| < \frac{1}{2}$ $\Big\}$ $\Rightarrow n = n_\varepsilon$

Comme $n, n_\varepsilon \in \mathbb{Z}$

$$-a \leq -n_\varepsilon < a + \frac{1}{2}$$

$$a - \frac{1}{2} < n \leq a$$

$$\cancel{a} - \frac{1}{2} - \cancel{a} < n - n_\varepsilon < \cancel{a} - \cancel{a} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < n - n_\varepsilon < \frac{1}{2}$$

$$|n - n_\varepsilon| < \frac{1}{2}$$

Comme $n, n_\varepsilon \in \mathbb{Z}$, $n = n_\varepsilon$.

Donc $\exists n \in A$, $\forall \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $a - \varepsilon < n \leq a$.

j'ai échangé l'ordre des quantificateurs
$\rightarrow$ n est indépendant de ε.

Conclusion $\forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $-\varepsilon < n - a \leq 0 \Rightarrow |n - a| < \varepsilon$

Donc $|n - a| = 0$, $\boxed{n = a}$, $n \in A$: $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x$

Donc : $\left| \begin{array}{l} a \in A \\ a \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$ Je reste $E(x) = [x] = a \in \mathbb{Z}$.

Exemples : a) $A =]a, b[$, $a < b \iff A \neq \emptyset$, A majoré et minoré

Si $a < b$, A a une borne supérieure

$\sup A = b$, (borne supérieure) $\notin A$

$\inf A = a$, (— inférieure) $\notin A$

Exercice : le montrer.

Remarque : $b \notin A$, $a \notin A$.

b) Si $A = [a, b]$, $a < b$, $b = \sup A \in A$

$a = \inf A \in A$

c) $A =]a, +\infty[$: minoré, non majoré, $\inf A = a \notin A$.

Qu'est-ce qui distingue les intervalles des autres sous-ensembles de $\mathbb{R}$?

Comment mettre la main sur l'idée d'ensemble "rempli" ?

$\boxed{\text{Convexité}}$

Définition Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est convexe si $\forall \alpha, \beta \in A$, telles que $\alpha < \beta$, $[\alpha, \beta] \subset A$.

Caractérisation des intervalles :

Théorème Tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ convexe, non vide est un intervalle. ($\vdots a, b \vdots$, $\vdots a, +\infty[$, $]-\infty, b \vdots$, où $\vdots =]$ ou $[$). (et $\mathbb{R}$)

Preuve Soit $A \subset \mathbb{R}$, convexe, $\neq \emptyset$

(α) Supposons que A est borné $\Longleftrightarrow$ A est majoré et minoré

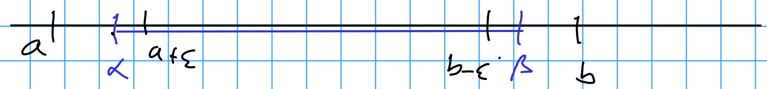
(i) A admet une borne supérieure et une borne inférieure.

$a = \inf A$, $b = \sup A$. (on élimine le cas $a = b$, car $A = \{a\}$)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha \in A$, $a \leq \alpha < a + \varepsilon$ $\qquad \varepsilon < \frac{|b-a|}{2}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \beta \in A$, $b - \varepsilon < \beta \leq b$.

A est convexe : $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta \Longrightarrow [\alpha, \beta] \subset A$



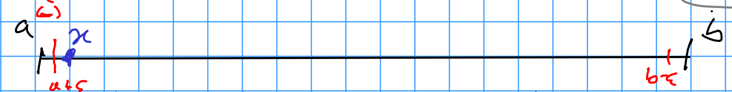
$\alpha < a+\varepsilon$, $b - \varepsilon < \beta \Longleftrightarrow \boxed{[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset [\alpha, \beta] \subset A}$, $\forall \varepsilon > 0$

(ii) Donc $\boxed{[\forall \varepsilon > 0, \ [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset A]} \Longleftrightarrow]a, b[\subset A$

$\Longleftarrow$ évident

$\Longrightarrow$

Soit $x \in]a, b[$, $a < x < b$, $\Rightarrow \boxed{\exists \varepsilon > 0, \ a+\varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon}$



il suffit de choisir $\varepsilon = \inf\left(\frac{|x-a|}{2}, \frac{|x-b|}{2}\right)$

Ainsi, si $x \in]a, b[$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$

Utilisons $[\forall \varepsilon > 0, [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset A]$, $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset A$

Conclusion $\boxed{]a, b[\subset A.}$

(iii) Par ailleurs, $A \subset [a, b]$: simple.

$$\left.\begin{array}{l} a = \inf A : \text{minore } A : \ \forall x \in A, \quad a \leq x \\ b = \sup A : \text{majore } A : \ \forall x \in A, \quad x \leq b \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{A \subset [a, b]}$$

Conclusion $]a,b[\subset A \subset [a,b]$

4 cas possibles: $A = [a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$

b) Si $A \neq \emptyset$ est minoré, non majoré.

$\rightsquigarrow$ $\inf A = a$, $]a,+\infty[\subset A \subset [a,+\infty[$.

2 possibilités.