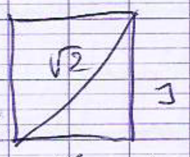
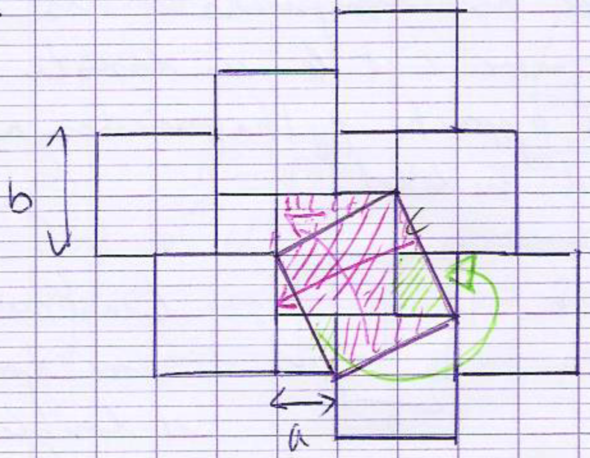
Et pourtant, le théorème (plus moderne) de Pythagore dit que : la longueur de l'hypothénuse est √2



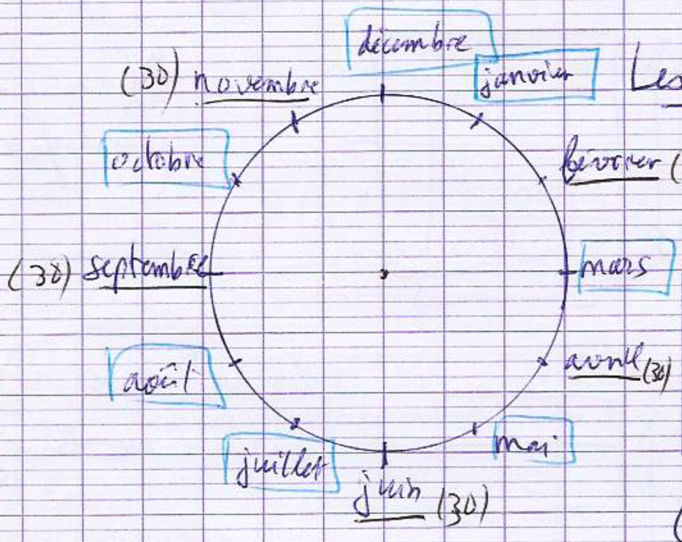
Mais √2 n'est pas un rationnel!

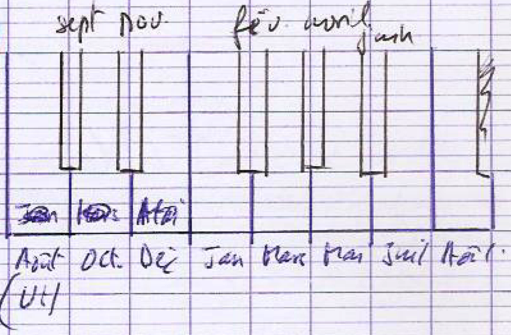
Compléments

Théorème de Pythagore : "preuve du carreleur"



Les mois et la gamme chromatique





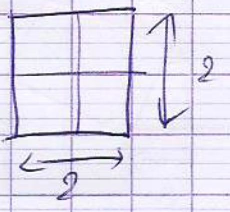
Chez les babyloniens l'année comptait 360 jours. Que faire des 5 jours manquants ? des touches noir.

Retour à √2

Dans le dialogue "Ménon", écrit par ~~Socrate~~ Platon, Socrate fait démontrer par un esclave qu'on ne peut pas construire $\sqrt{2}$ par les méthodes pythagoriciennes (visualiser les nombres entiers par des figures géométriques avec des points — remarque : à l'époque le système de numération des babyloniens est plus performant que celui des grecs, ces derniers dépasseront les babyloniens en pensant ~~[illegible]~~ les nombres comme des longueurs et en dessinant des figures, comme c'est le cas dans les éléments d'Euclide. L'approche pythagoricienne, géométrique, prépare celle d'Euclide).

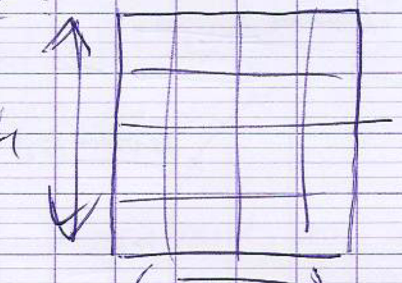
Version simplifiée (cf. M. Serres),

Socrate à l'esclave :



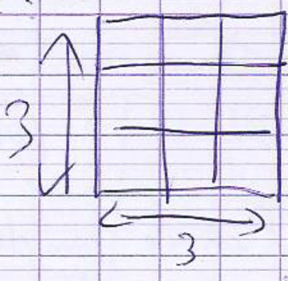
Construis-moi un carré dont la surface est double ($2 \times 4 = 8$)

L'esclave :



— Non ça fait une surface égale à 16

L'esclave :

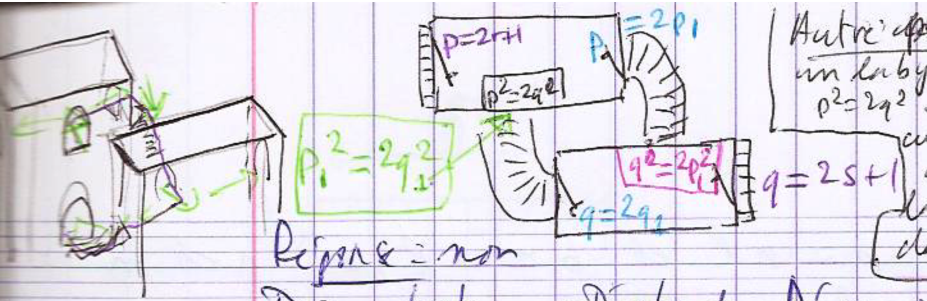


Encore non, ça fait une surface ~~de 8~~ égale à 9 !

Conclusion : ça n'est pas possible avec des entiers.

Mais est-ce possible avec les nombres rationnels ? Est-il possible de trouver p, q, nombres entiers tels que

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \, ?$$



Autre preuve : on évolue dans un labyrinthe qui commence à $p^2=2q^2$. Une porte débouche sur un cul de sac ou un escalier (simplification). On ne sort jamais du labyrinthe, on descend indéfiniment dans les profondeurs...

Réponse : non

Démonstration ~~D'abord~~ Nous raisonnons par l'absurde

Supposons qu'il existe p, q tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.
D'abord on peut supposer que, au moins un des nombres n'est pas pair, car sinon on aurait $p = 2p'$, $q = 2q'$, donc $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ et, si il y a encore un des deux pairs, on recommence, jusqu'à ce que l'un des deux soit impair.

... mais on sait qu'en dessous d'une certaine profondeur, on n'a plus de droit de descendre plus bas (sous peine de devenir fou → Proposition 1 (cf. page 56)

Donc $\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$
Donc p^2 est pair : ~~il ne peu~~ donc p ne peut pas être impair, car sinon $p = 2r+1 \Rightarrow p^2 = 4r^2+4r+1$ est impair. Donc p est pair. Donc $p = 2r \Rightarrow p^2 = 4r^2$.

Donc $4r^2 = p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2$
Donc, par le même raisonnement, q est pair.

Mais alors p et q sont pairs tous les deux. C'est impossible ! Contradiction.

On peut raisonner plus géométriquement. (divorce entre nombres entiers et réels, que l'on conçoit comme des longueurs (peut-être une unité de longueur est sous-jacente)

Algorithme d'Euclide (Les éléments (Στοιχεια), livre 10).

Euclide aurait écrit vers 300 avant JC (après les disciples de Platon, avant Archimède)

Proposition 2 Étant donné deux grandeurs inégales, si, en retranchant successivement la plus petite de la plus grande, le reste ne divise jamais son précédent, alors les grandeurs données sont "incommensurables".

La dernière phrase signifie que, si a et b sont les deux grandeurs, alors il n'existe pas de grandeur l

traposée : si
t algorithme
arrête, alors les
ux grandeurs
nt commensurables
cum-"mensurable")

telle que $a = n\ell$ et $b = m\ell$, où n et m sont entiers. Autrement dit, on n'a pas $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ et $\frac{a}{b}$ est irrationnel.

Exemple

$(13, 8)$

↓ $13 - 8 = 5$

$(8, 5)$

↓ $8 - 5 = 3$

$(5, 3)$

↓ $5 - 3 = 2$

$(3, 2)$

↓ $3 - 2 = 1$

$(2, 1)$ ← ici on peut s'arrêter, 1 divise 2

↓ $2 - 1 = 1$

$(1, 1)$

Fraction continue:

$$\frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8} = 1 + \frac{5}{5+3}$$

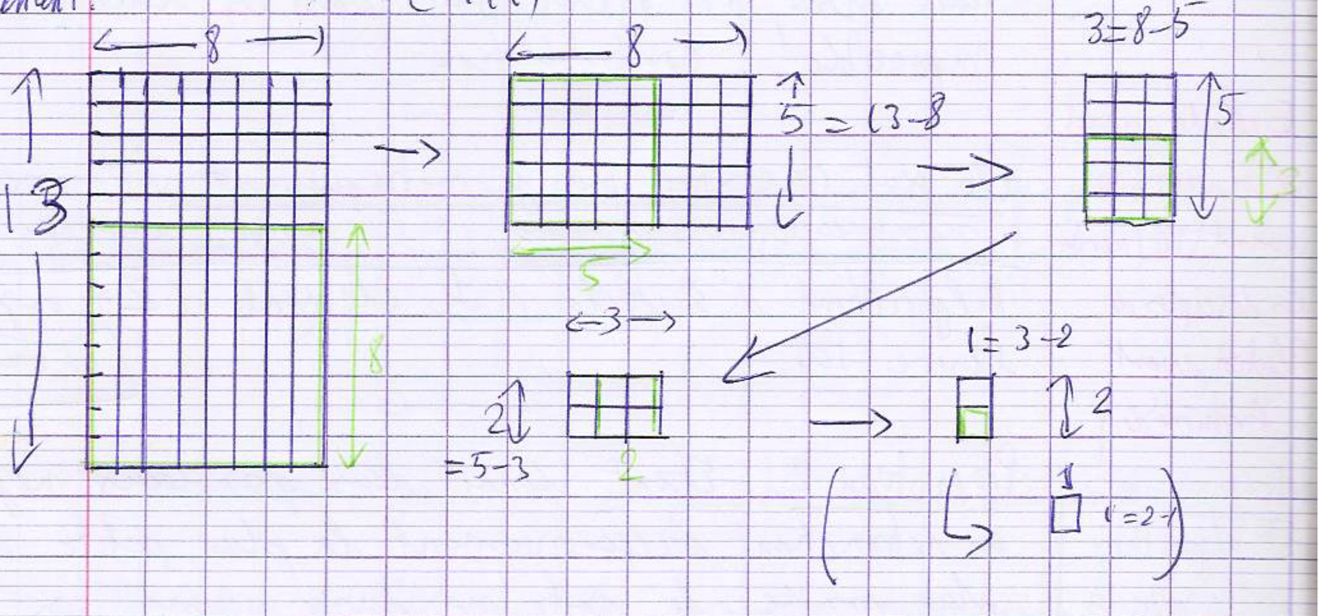
$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{3}{3+2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}$$

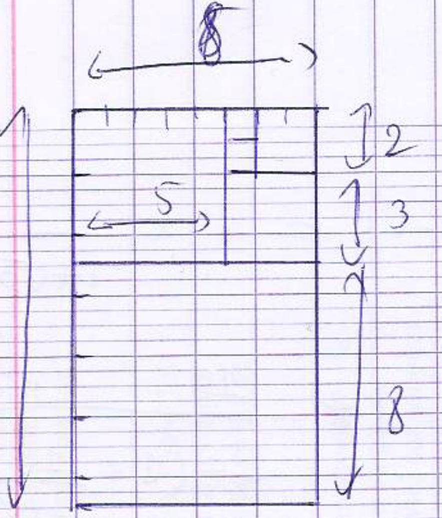
$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{2+1}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$$

Géométriquement:



Cela correspond à une partition du rectangle de départ en carrés:



Autre exemple (15, 6) $\xrightarrow{15-6=9}$ (9, 6) $\xrightarrow{9-6=3}$ (6, 3) $\xrightarrow{6-3=3}$ (3, 3)

$$\frac{15}{6} = \frac{12}{6} + \frac{3}{6}$$
$$= 2 + \frac{1}{2}$$

Que se passe-t-il pour $\sqrt{2}$?
Le triangle violet et le triangle vert ont les mêmes proportions.

…sions euclidiennes

$\sqrt{2}) = 2 \cdot 1 + (\sqrt{2}-1)$

$= 2(\sqrt{2}-1)$

$+ r = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{2}+1} + r$

$= 1 - 2(\sqrt{2}-1)$

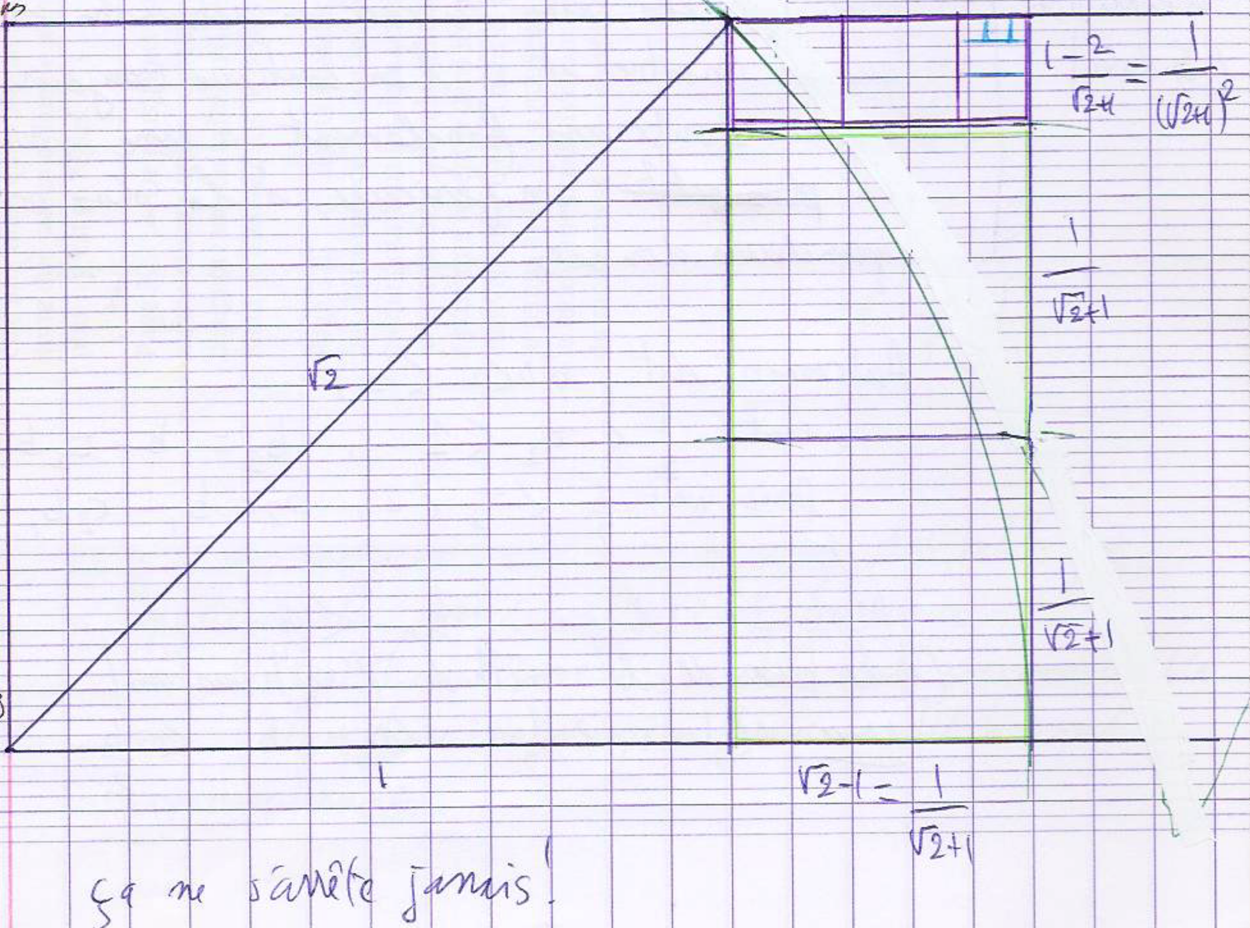
$1 - \frac{2}{1+\sqrt{2}}$

$\frac{1+\sqrt{2}-2}{1+\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}$

$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}$

$= 2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^3}$



…tr.

…mo fois

Ça ne s'arrête jamais!

Que se passe-t-il ?

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1) = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

On reboucle : ↺

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = \dots = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

Fraction continue ?

Pourquoi l'algorithme d'Euclide marche ?
Cela repose sur la Proposition 1 de l'élément 10 :

Base de la méthode d'exhaustion (Eudoxe)

Prop 1 Etant données deux grandeurs inégales, si de la plus grande on retranche plus que sa moitié, puis du reste ainsi obtenu on retranche encore plus que sa moitié et si l'on continue toujours ainsi, nous aboutirons finalement à une grandeur qui est ~~plus petite~~ inférieure à la plus petite des grandeurs données.

Autrement dit, si $0 < a < b$,

- soit $\frac{1}{2} < \tau_1 < 1$, $b_1 = b - \tau_1 b = (1-\tau_1)b$
- puis soit $\frac{1}{2} < \tau_2 < 2$, $b_2 = b_1 - \tau_2 b_1 = (1-\tau_2)b_1$

etc.

Alors $\exists n$ tel que $b_n < a$.

(à la base de la méthode d'exhaustion)

Preuve $0 < 1-\tau_1 < \frac{1}{2}$, donc $b_1 < \frac{b}{2}$

et, plus généralement, $b_n < \frac{b_{n-1}}{2}$, donc

$$b_n < \frac{b}{2^n} \quad \text{(récurrence)}.$$

On peut trouver n t.q. $2^n a > b$. Alors

$$b_n < \frac{b}{2^n} < a.$$

Voir page suivante

Preuve de la proposition 3 On manipule deux nombres, on retranche le plus petit au plus grand.

a) Si b est le grand nombre, $\exists\, n$ t.q.

$$na \leq b < (n+1)a.$$

Alors, en retranchant n fois a à b (puis $b-a$, $b-2a$, etc) on arrive à ~~$b-na$~~

C'est la division euclidienne $b = na + r$ → $0 \leq b - na < a$. (peut-être $b = na$ (!))

→ Donc, en un nombre fini d'étapes, les deux nombres sont plus petits que le plus petit des deux

b) On a donc $b = qa + r$, $0 \leq r < a$.

$a = q_1 r + r_1$, $0 \leq r_1 < r$

soit $a = r_1$ ($\text{si } q_1 = 0$)

soit $a \geqslant r + r_1 > 2r_1$ ($\text{si } q_1 \geqslant 1$)

donc on ~~passe~~ a :

$$(b, a) \longrightarrow (a, r) \longrightarrow (r, r_1)$$

avec $r_1 < \frac{a}{2}$. On réitère

$a \geqslant r + r_1 > 2r_1 \Rightarrow r_1 < \frac{a}{2}$

$2r \leqslant r + a \leqslant b \Rightarrow r \leqslant \frac{b}{2}$

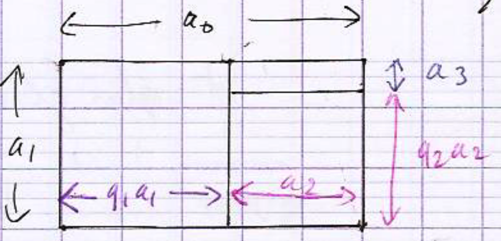
(le cas le moins favorable est $q = q_1 = 1$, mais ça marche quand même)

Il y a un moment où a_n et b_n sont plus petits que n'importe quelle grandeur fixée à l'avance

- soit l'algorithme s'arrête : a et b sont commensurables
- soit l'algorithme ne s'arrête jamais : a et b sont incommensurables.

"pire" des cas:

on a quand même: $\left| \begin{array}{l} a_2 < \frac{a_0}{2} \\ a_3 < \frac{a_1}{2} \end{array} \right.$



Meilleure formulation:

On part de $0 < a_1 < a_0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} a_0 = q_1 a_1 + a_2 \\ 0 \leq a_2 < a_1 \end{array}} \quad (q_1 \in \mathbb{N}, q_1 \geqslant 1)$$

$$\boxed{0 < a_2 < a_1} \xleftarrow{\text{non}} \boxed{a_2 \overset{?}{=} 0} \xrightarrow{\text{oui}} \boxed{\text{Stop}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} a_1 = q_2 a_2 + a_3 \\ 0 \leq a_3 < a_2 \end{array}} \quad (q_2 \in \mathbb{N}, q_2 \geqslant 1)$$

$$\boxed{0 < a_3 < a_2} \xleftarrow{\text{non}} \boxed{a_3 \overset{?}{=} 0} \xrightarrow{\text{oui}} \boxed{\text{Stop}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} a_2 = q_3 a_3 + a_4 \\ 0 \leq a_4 < a_3 \end{array}}$$

etc

$$a_0 = q_1 a_1 + a_2 \geqslant a_1 + a_2 > a_2 + a_2 = 2a_2$$
$$a_1 = q_2 a_2 + a_3 \geqslant a_2 + a_3 > a_3 + a_3 = 2a_3$$

Donc $a_2 < \frac{a_0}{2}$; $a_3 < \frac{a_1}{2}$ $\Rightarrow$ si l'algorithme continue indéfiniment, a_n est plus petit que n'importe valeur > 0, pourvu que $n \geqslant N$, pour un certain N.

Fraction continue: $\frac{a_0}{a_1} = q_1 + \frac{a_2}{a_1} = q_1 + \frac{a_2}{q_2 a_2 + a_3}$

$$= q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{a_3}{a_2}}, \text{ etc.}$$

Conclusion "philosophique" : les rationnels sont partout : on peut en trouver entre deux nombres arbitrairement proches (densité). Néanmoins ils ne remplissent pas la ligne, il y a des trous comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.

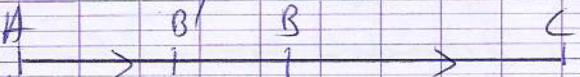
Pour "remplir" la ligne, il faut ajouter indéfiniment des points. Mais est-ce suffisant ? Peut-on "dénombrer" tous les points de la droite ? Très grosse difficulté conceptuelle qui fait douter de notre capacité à concevoir d'une manière logique la ligne comme un ensemble de points

Cela nous amène à d'autres difficultés : (surtout la flèche)

Les paradoxes de Zénon d'Elée

... qui illustrent le gouffre conceptuel et logique entre les points sur la ligne et le continu.

Dichotomie



Un mobile doit aller de A en C, il doit d'abord passer par B, mais il doit pour cela auparavant passer par B', etc. En décomposant ainsi, ~~le mobile~~ à l'infini, le mobile n'arrivera jamais en C.

→ difficulté à concevoir une longueur finie puisse être parcourue en parcourant une infinité d'intervalles

Impossibilité de trouver l'instant précédent immédiatement un instant donné. Cette notion n'a pas de sens.

Achille et la tortue Achille part de O et poursuit une tortue qui se trouve devant lui en A. Le temps qu'il arrive en A, la tortue sera en B, Achille doit donc ensuite aller en B, etc. Ainsi Achille talonne (si je peux me permettre) la tortue, mais ne la rattrape jamais.

→ même difficulté.

Paradoxe de la flèche Une flèche qui vole est immobile ! A chaque instant ~~est~~ elle est dans une portion d'espace d'espace égale à elle-même, elle est donc au repos. Si on décompose le mouvement en suites d'instants, elle ne peut pas se mouvoir.

→ si on décompose le temps en instants, on ne peut pas concevoir son mouvement à chaque instant

Aristote (Physique, chap. 9) en conclut que "le temps n'est pas composé des « maintenant » indivisibles, pas plus que l'est aucune grandeur".

Difficulté logique pour passer de N ou Q à R.
(points → ligne)

En fait, le passage des ensembles dénombrables (Q) à R est, ~~donc pas~~ du point de vue de la logique, comple Georg Cantor avait fait l'hypothèse qu'il n'existe aucun ensemble dont le cardinal est compris entre celui de N et celui de R (hypothèse du continu). Les travaux de Kurt Gödel (1938) et Paul Cohen (1963) montr que cette hypothèse est indécidable dans le cadre ZFC (Zermelo – Fraenkel – Choix).

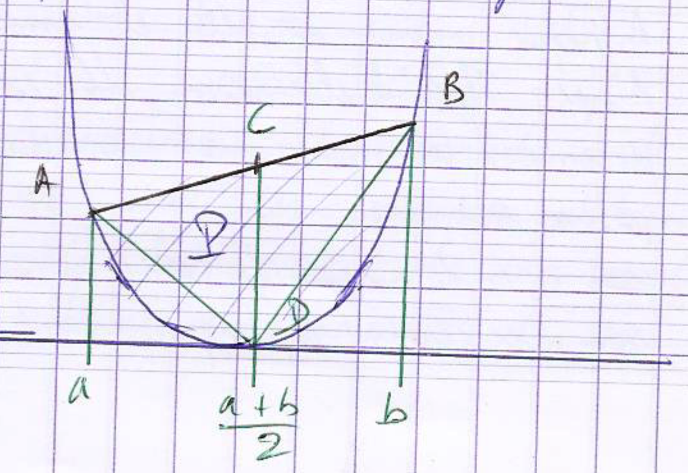
La conclusion d'Aristote, bien que très incomplète, montre tout de fois que les grecs avaient bien compris qu'il y avait là une grosse difficulté.

Comment contourner ces paradoxes ? (notamment la dichotomies)

(287 ~~av~~ avant JC – 212 avant JC)

Archimède (après Eudoxe, Euclide) : exhaustion.
On suppose que la longueur "parcourue" l'est réellement et on la connaît. On la calcule en raisonnant par l'absurde.

Exemple : calcul de l'aire de la surface comprise entre une parabole et un segment de droite

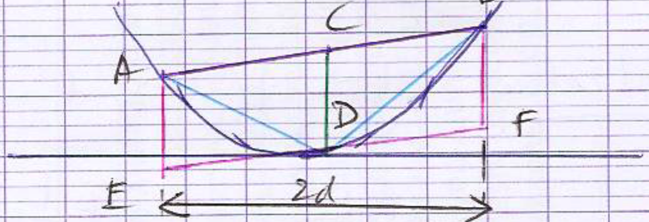


A est le point de coordonnées (a, a^2), B est le point de coordonnées (b, b^2), D est le point de coordonnées $\left(\frac{a+b}{2}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$, C est le milieu de A et B (ses coordonnées sont $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$).

On observe que l'aire P du morceau de parabole est plus grande que celle du triangle ABD (que l'on notera T)

Petit lemme Notons 2d la différence $b-a$. Alors l'aire du triangle ABD est $T = d^3$. L'aire du parallélogramme ABFE est $2d^3$. On a donc

$$d^3 < P < 2d^3$$



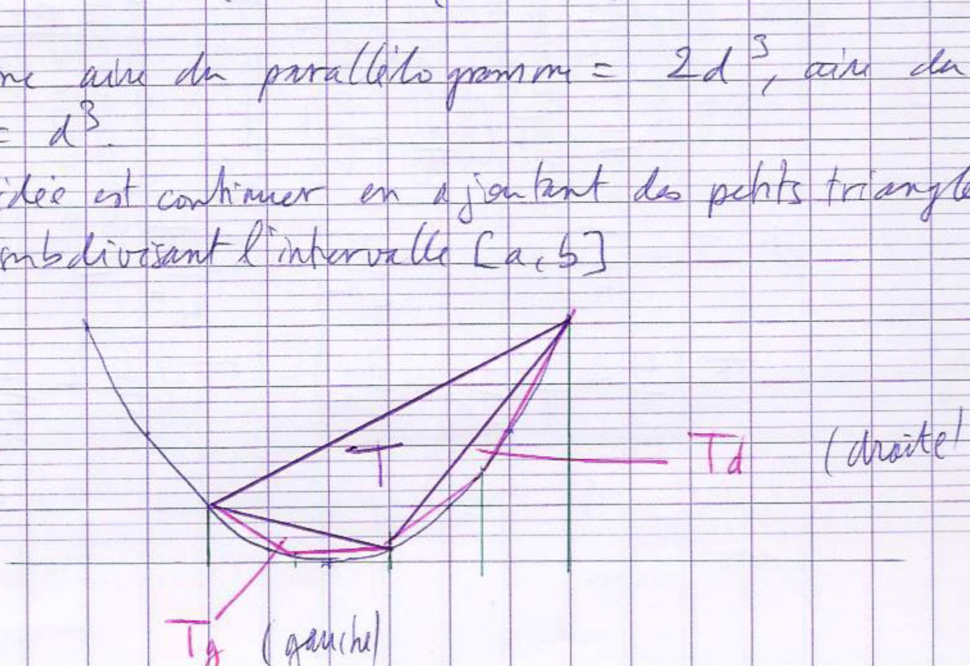
Démonstration L'aire du parallélogramme est 2d fois la hauteur CD du parallélogramme.

$$CD = \frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2}{4} - ab - \frac{b^2}{4}$$

$$= \frac{a^2}{4} - ab + \frac{b^2}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = d^2.$$

Donc aire du parallélogramme $= 2d^3$, aire du triangle $T = d^3$. □

L'idée est continuer en ajoutant des petits triangles et en subdivisant l'intervalle $[a, b]$



On avait $P \geqslant T$

mais on a encore $P \geqslant T + T_g + T_d$.

Or, le lemme nous dit que $T = d^3$

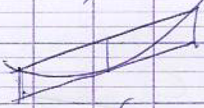
$$T_g = T_d = \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{d^3}{8}.$$

Donc $P \geqslant T + \frac{T}{4}$, etc.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \dots + \frac{T}{4^n} < P <$

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \dots + 2 \cdot \frac{T}{4^n}$$

(on a utilisé, au niveau n, l'encadrement :)



[cf. van der Waerden, page 94 : les babyloniens (texte AO 6484 → séleucides, 3ème siècle avant JC) connaissaient aussi $1+2+2^2+\dots+2^9 = 2^{10}-1$]

Petit calcul $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n}\right)$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

$$- \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{4^n} - \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{4^{n+1}}$$

Donc $T + \frac{T}{4} + \dots + \frac{T}{4^n} = T \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = T \frac{4 - \frac{1}{4^n}}{4-1}$

$$= T\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}\right)$$

et $T + \frac{T}{4} + \dots + \frac{T}{4^{n-1}} + 2 \cdot \frac{T}{4^n} = \left(T + \frac{T}{4} + \dots + \frac{T}{4^n}\right) + \frac{T}{4^n}$

$$T\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right) = T\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^n}\right)$$

obtenu une suite de

la méthode de
exhaustion et une
manière subtile
contourner les
paradoxe de Zénon

Archi (sur "Méthode d'exhaustion"): Eudoxe avait déjà ~~montré~~ de bornes inférieures pour P. → Eudoxe de Cnide (-408/-355)
(l'idée remontait à Antiphon, mais elle possédait à l'époque les mêmes défauts que le paradoxe de la dichotomie de Zénon (calcul de l'aire du cercle))

Donc $T\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}\right) < P < T\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4^n}\right)$.

A ce niveau, Archimède raisonne par l'absurde : si $P < \frac{T4}{3}$, (donc $P = \frac{4T}{3} - \varepsilon$) en prenant n suffisamment grand on aura

$$\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}\right)T > \frac{4T}{3} - \varepsilon = P$$

ce qui contredit l'inégalité de gauche.

Si $P > \frac{4T}{3}$, on peut aussi contredire l'inégalité de droite. [id-est $P = \frac{4T}{3}+\varepsilon$: on choisit n tel que $T\frac{2}{3}\frac{1}{4^n} < \varepsilon$
et alors $P < T\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{4^n}\right) < T\frac{4}{3}+\varepsilon = P$ contradiction

Conclusion $P = \frac{4T}{3} = \frac{4}{3}d^3 = \frac{(b-a)^3}{6}$.

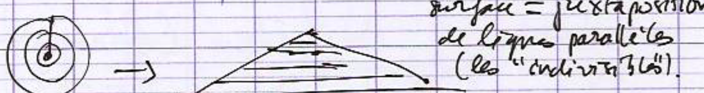
Aujourd'hui, on raisonne "par passage à la limite" et on écrit $1+\frac{1}{4}+\ldots = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\frac{1}{4^n}\right) = \frac{4}{3}$.

aussi Fermat

Courant & al.

ops du principe
Fermat

(après la "méthode des indivisibles" de Cavalieri, Roberval, cf. aussi Kepler, Pascal "Traité de la roulette", 1659, Wallis, MacLaurin, avant Newton & Leibniz).



surface = juxtaposition de lignes parallèles (les "indivisibles").

Commentaires : suite aux découvertes de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et des paradoxes de Zénon, Aristote tente de clarifier la situation:
- il faut distinguer le "nombre" (entier) ("par exemple un homme est un homme unique et non plusieurs") qui, lorsqu'on arrive à l'unité, est indivisible, de la grandeur (longueur) qui est divisible indéfiniment (Physique, p. 194).

De plus on peut diviser un segment en sous-segments de façon indéfini, mais pas en nombre infini (p. 190), sauf "en puissance" (p. 194) (~ virtuellement).

Conséquence : il est interdit de sommer une infinité de segments et "~~superposer~~" ~~une in~~ "aligner" une infinité de points ne conduit pas à une ligne. (N.B., les probabilistes le font aujourd'hui)

Comment contourner cet interdit ? par la méthode d'exhaustion, qui nécessite de connaître à l'avance le résultat. Cette méthode fut mise au point par Eudoxe (disciple de Platon), puis Euclide, avant d'être utilisée magistralement par Archimède.

Ainsi Archimède montre que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

(un exploit et une preuve complexe). et les chinois dès

(Après les babyloniens et les égyptiens, qui utilisaient des approximations plus grossières de π, les chinois firent aussi des calculs précis :

- $\frac{22}{7}$ était connue au Vème siècle après JC.
- Liu Hui (IIIème siècle après JC) trouva

$$\frac{157}{50} = 3,14 \quad ; \quad \frac{36}{625} =$$

- Tsu Ch'ung-Chih (Vème siècle après JC) :

$$\frac{355}{113} = \underbrace{3,141592}_{\text{correct}}9\ldots$$

(excellent

(von der Waerden, p. 196-199)

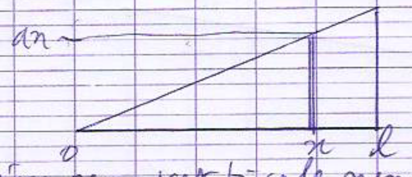
Aryabhata (Inde, VIème siècle après J.C).

$$\pi \simeq 3,1416$$

Aryabhata obtient aussi des estimations des sinus, van der (Waerden, p. 208)

Les méthodes sont variées mais repose sur des approximations du cercle par un polygone

~~Or~~ Mais Archimède avait aussi transgressé l'interdit des infiniment petits (peut-être à titre heuristique) et expliqué dans un texte ("La méthode") comment calculer des aires en "sommant des quantités infiniment petites"



l'aire de ce rectangle est la somme infinie des aires des bandes infiniment petites que l'on peut découper verticalement.

En notation moderne (post Leibniz) : $\int_0^\ell ax\,dx$

"Neuf chapitres" ($\pi \simeq 3$)

Ce texte a été découvert en 1906 à Constantinople (un palimpseste : le manuscrit avec le texte d'Archimède ~~avait~~ date du $X^{\text{ème}}$ siècle, il avait été gratté un ou deux siècles plus tard pour écrire un texte religieux).

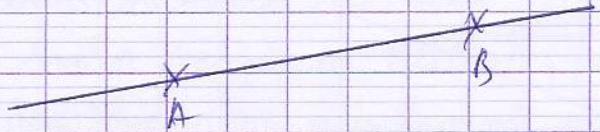
Entretemps Francesco Cavalieri (1598-1647) redécouvre ce calcul infinitésimal (pour les intégrales uniquement) (la méthode des "indivisibles") (qui semble avoir été découverte par Liu Hui)
Ce calcul semble avoir été découvert par Roberval en même temps. Précurseurs : Oresme, Kepler. Ce calcul fut développé par John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677), professeur de Newton...

Les axiomes d'Euclide

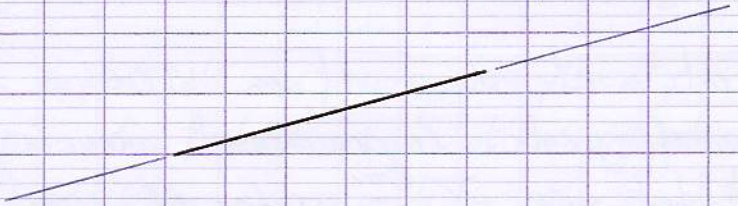
L'idée est de retenir les informations les plus évidentes ~~qu~~ dont on peut se convaincre en manipulant une règle et un compas sur une feuille de papiers et en nombre minimal, afin d'être ensuite capable de montrer tous les résultats de géométrie concevables par un raisonnement logique. (Donc dans le plan).

66)

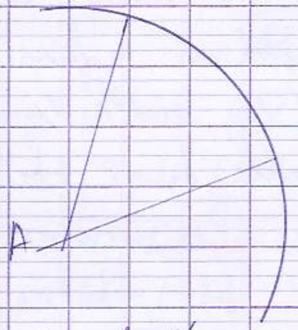
1) Etant donné deux points distincts on peut tracer une droite passant par ces deux points.



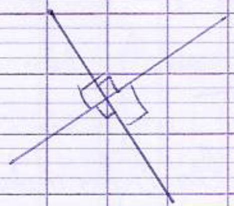
2) Etant donné un segment de droite, il est possible de l'étendre indéfiniment en une droite



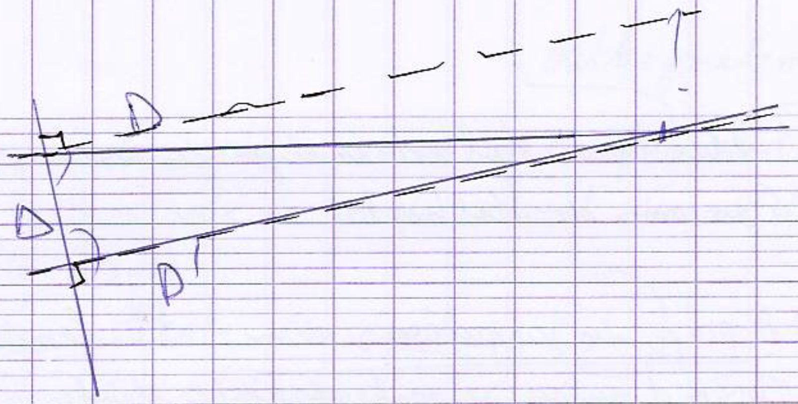
3) Etant donné un point et une longueur, on peut tracer le cercle centré en le point et de rayon la longueur qu'on s'est donnée.



4) Tous les angles droits sont congruents entre eux



5) Etant données deux droites D et D' si une troisième droite Δ les coupe et si d'un même côté de Δ ~~les~~ angles formés par D et Δ et D' et Δ sont plus aigus que l'angle droit ~~(et du mê~~n, alors D et D' se coupent en un point.

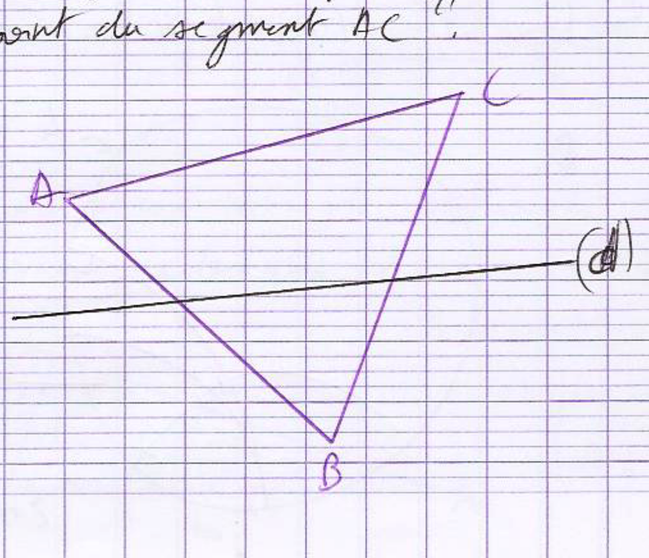


Si les quatre premiers axiomes semblent évidents et indispensables, on peut se demander si le cinquième n'est pas la conséquence des quatre autres.

Le quatrième axiome est un peu ambigu : il faut comprendre que l'on peut déplacer ou tourner une équerre ~~compas ou~~ un rapporteur pour comparer deux angles ~~ou~~ situés en deux points différents.

En fait ces axiomes sont inspirés par notre expérience mais sont insuffisants sur le plan logique pour construire tout ce que contiennent les Éléments
Ainsi en 1882, Moritz Pasch énonça un axiome supplémentaire :

"Soient A, B et C trois points alignés et (d) une droite du plan ABC qui ne passe par aucun des points A, B et C ; si la droite (d) passe par un point du segment ~~BC~~ AB, alors elle passe par un point du segment BC ou un point du segment AC".



68

Plus tard Hilbert analysa ces axiomes plus en détail (axiomes de Hilbert).

La découverte de la géométrie hyperbolique ne suscite au début que l'intérêt des philosophes et pas trop des mathématiciens (à quoi pourrait-elle servir ?)

Gauss en a honte et ne la publie pas (sa "géométrie astrale"). Il n'en parle qu'en découvrant la trouvaille de Bolyai.

Charles Dodgson (alias Lewis Caroll) condamne dans une histoire ("Euclid and his modern rivals") pour ridiculiser Lobachevsky.

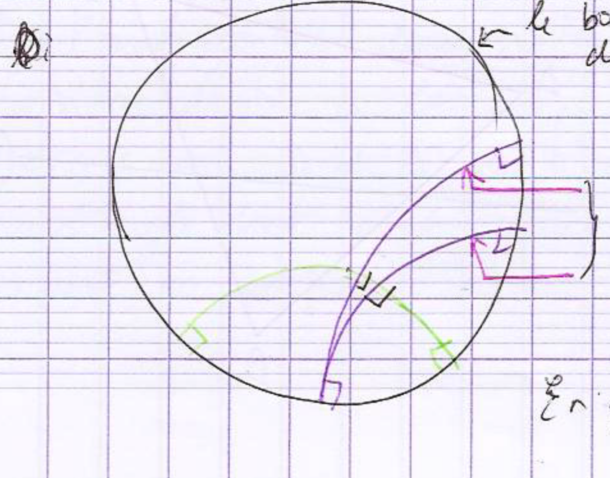
Eugenio Beltrami ~~est~~ construit des modèles concrets, mais reste prudent.

A propos du cinquième axiome: Ptolémée, Legendre et bien d'autres se sont cassés les dents à essayer de déduire cet axiome des quatre précédents. Johann Heinrich Lambert (1728-1777) découvrit que, si on excluait du $5^{ème}$ axiome, on pourrait construire des triangles équilatéraux dont la somme des angles aux sommets est égale à n'importe quel nombre inférieur à π (cf. "Trente livres... p. 30). Auparavant John Wallis et surtout Gi Giovanni Girolamo? Saccheri (1733) avaient déjà exploré les conséquences d'un défaut du cinquième axiome.

Jusqu'à Nicolaï Lobachevski (1829), Janos Bolyai (1832), Gauss, Riemann (1854) qui découvrirent un exemple de géométrie satisfaisant les 4 premiers axiomes d'Euclide, mais pas le dernier. Et pourtant... Saccheri n'était pas passé loin et, comme l'a relevé Paul Langevin en 1926, si l'on avait été plus attentif au texte original d'Euclide et non à diverses traductions, on aurait su qu'Euclide n'était pas si sûr de son dernier axiome ("Trente livres...", page 4)

Géométrie hyperbolique (modèle de Poincaré)

(métrique: $\frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$)

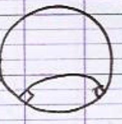
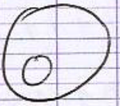
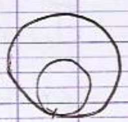


le bord est à une distance infinie de tous les points à l'intérieur du disque

Les deux cercles sont parallèles : ils ne se rencontrent pas et coupent le cercle vert à angle droit

En fait les ~~grands~~ arcles

qui coupent le bord du disque à l'infini orthogonalement sont "les droites".
Ce qui joue le rôle de cercle, ce sont les cercles contenus dans le disque.

Remarque : à côté des droites:  et des cercles:  , il y a les horocycles : 

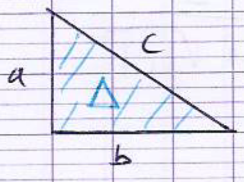
à suivre...

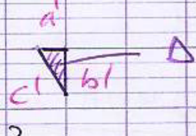
Plus de détails sur le cinquième axiome et la géométrie hyperbolique (source: Penrose, à partir de la page 29)

a) Commençons par une autre preuve du théorème de Pythagore. Elle repose sur le principe suivant:

> si je dilate et tourne une figure (par exemple un triangle) en conservant les angles aux sommets, alors les rapports des longueurs entre elles et d'une longueur à $\sqrt{\Delta}$, où Δ est l'aire de la figure, ne changent pas

Ainsi, pour un triangle rectangle





$$\frac{c^2}{\Delta} = \frac{(c')^2}{\Delta'}$$

On applique cela à un triangle rectangle ABC et aux deux sous-triangles rectangles AHC et BHC

Aire totale = $\Delta_c = \Delta_a + \Delta_b$

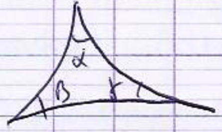
or $\begin{cases} \Delta_a = \Delta_c \frac{a^2}{c^2} \\ \Delta_b = \Delta_c \frac{b^2}{c^2} \end{cases}$

donc $\Delta_c = \Delta_a \left(\frac{a}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \right) \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

La propriété de l'espace euclidien utilisée est la conservation des angles si on dilate uniformément les longueurs.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) s'était rendu compte que, si on niait le cinquième postulat d'Euclide, cela cessait d'être vrai (Saccheri aussi). Mais on pouvait avoir, pour un triangle :

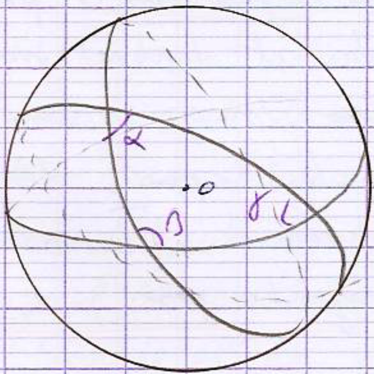
*Giovanni Girolamo Saccheri, 1667-1733 : ses travaux furent découverts par Beltrami. Ils ont une certaine similitude avec ceux d'Omar Khayyam (1048-1131)



$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma = \pi - C\Delta}$$

où C = constante et Δ = aire du triangle

En trigonométrie sphérique, on a une formule analogue, mais .. ~~das~~ dans l'autre sens



$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma = \pi + \frac{\Delta}{R^2}}$$

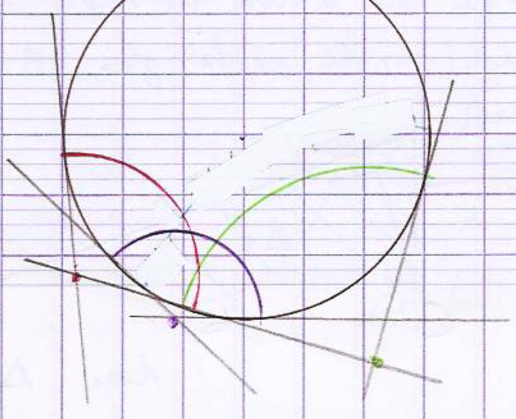
où R est le rayon de la sphère

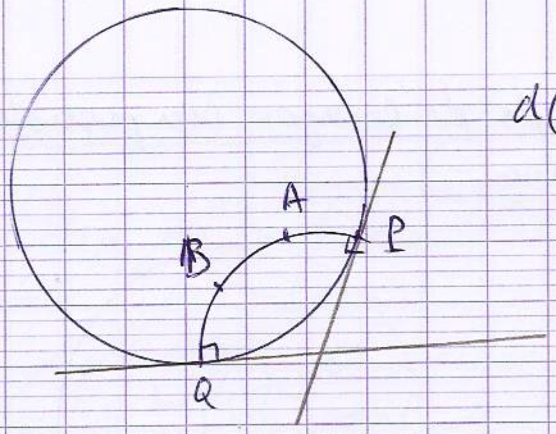
*Johann Heinrich Lambert (1728-1777), cartographe, mathématicien, logicien, philosophe

Cela ressemble à la géométrie sur une sphère de rayon $R = \frac{1}{\sqrt{-C}} = \frac{1}{i\sqrt{|C|}}$. !

Différents modèles

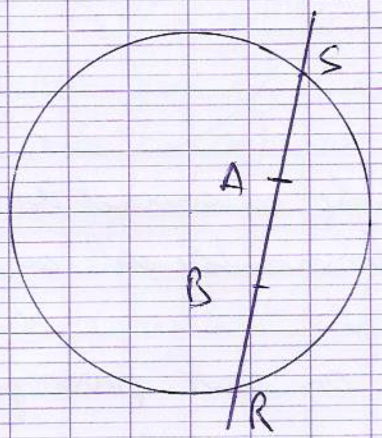
a) Conforme ("Poincaré")





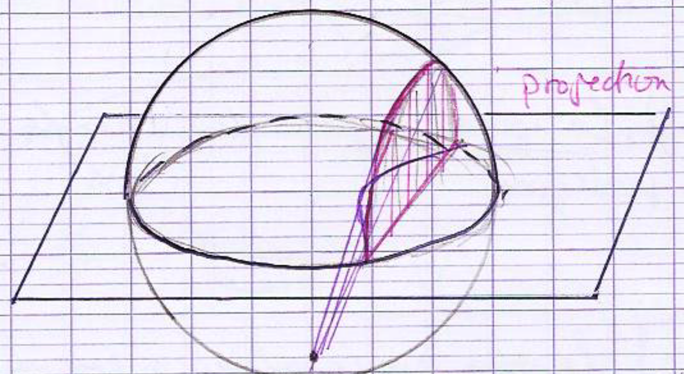
$$d(A,B) = C^{-\frac{1}{2}} \log \frac{QA \cdot PB}{QB \cdot PA}$$

b) Projectif



$$d(A,B) = \frac{1}{2} \log \frac{RA \cdot SB}{RB \cdot SA}$$

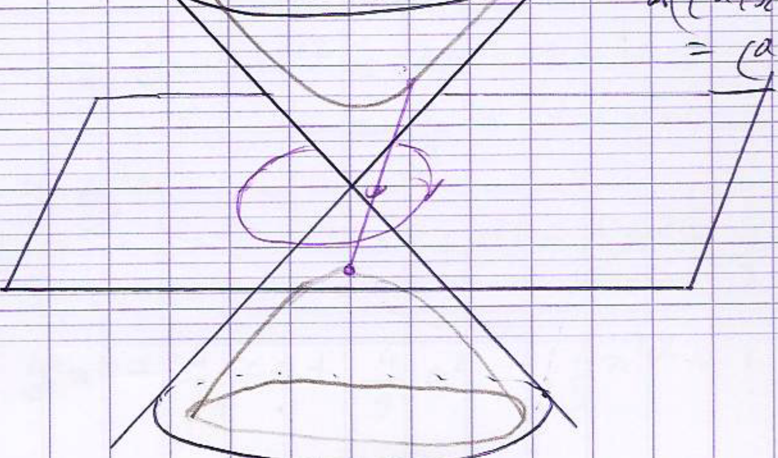
c) Lien entre les deux (Beltrami).



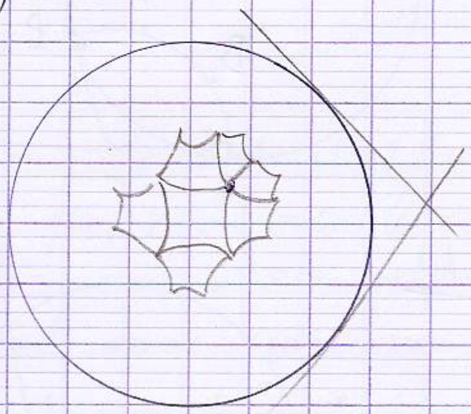
d) Espace de Minkowski

(x,y,z)

$$d((a,b,c),(x,y,z))^2 = (a-x)^2+(b-y)^2 -(c-z)^2$$



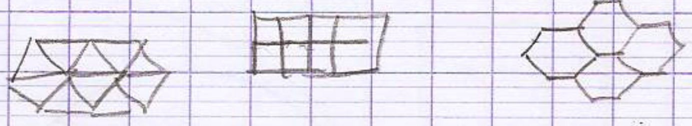
Exemple de pavage (impossible dans l'espace euclidien)



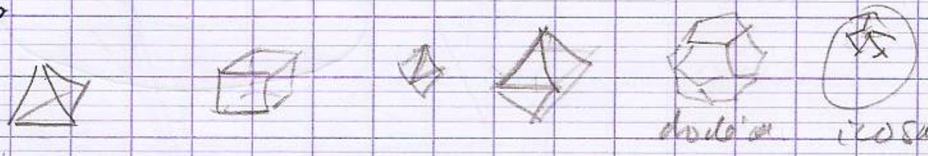
~~Don~~ Angle au sommet de chaque carré : $\frac{2\pi}{5}$
(compter le nombre de carrés se touchant en un sommet !).

Remarque : on peut paver par des polygones réguliers :

a) le plan : par des triangles, des carrés, des hexagone.



b) la sphère : par des triangles, des carrés, des pentagones



c) le plan hyperbolique : par ~~des~~ ce que l'on veut