SUR
UNE CLASSE D'ESPACES
A CONNEXION EUCLIDIENNE

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université Libre de Bruxelles, pour obtenir le grade d'Agrégé de l'Enseignement Supérieur

PAR

Robert DEBEVER
DOCTEUR EN SCIENCES,
ASSISTANT À L'UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES.

BRUXELLES
M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)
1947

COMMISSION D'EXAMEN

Président : A. ERRERA.

Membres : FR. VAN DEN DUNGEN.
TH. LEPAGE.
P. LIBOIS.
P. BURNIAT.

Secrétaire : J. GÉHÉNIAU.

PREFACE

Le présent travail se place dans le cadre de la théorie des espaces généralisés de E. Cartan.

Rappelons très brièvement que la synthèse de E. Cartan, qui date de 1922, trouve son origine à la fois dans les découvertes mathématiques suscitées par la théorie de la relativité générale d'Einstein et dans les travaux antérieurs de E. Cartan sur les groupes continus, l'équivalence des systèmes différentiels dans un groupe continu fini ou infini donné et la généralisation de la méthode du repère mobile de Darboux ([1]).

Une découverte fondamentale fut celle de la notion de parallélisme dans les variétés de Riemann par Levi-Civita. Cette découverte a provoqué un regain d'intérêt pour les recherches formelles antérieures (Christoffel, Ricci); le calcul différentiel absolu connaîtra entre les mains de J.-A. Schouten et de ses élèves un développement considérable.

Le parallélisme de Levi-Civita a permis d'exprimer en termes euclidiens toutes les propriétés d'un espace de Riemann; il rapproche ainsi singulièrement l'espace de Riemann de l'espace euclidien. Levi-Civita a montré que sa notion de parallélisme, introduite par l'auxiliaire d'un espace euclidien ambiant, est intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de l'espace euclidien utilisé. Ce résultat a été confirmé par H. Weyl, qui a découvert le moyen de se passer d'un espace euclidien auxiliaire. C'est à cette fin que H. Weyl a introduit une première notion de *connexion.*

([1]) Pour le début de cette préface, cf. E. Cartan, *Notice sur les travaux scientifiques* (8). Les chiffres entre parenthèses renvoient à la bibliographie qui se trouve à la fin du présent travail.

E. Cartan a montré que la notion de connexion est susceptible d'une très vaste compréhension et qu'il est possible d'arriver ainsi à une conception des espaces de Riemann qui ouvrait la voie à une synthèse riche en développements géométriques nouveaux. Les espaces de Riemann peuvent en effet être regardés comme une classe particulière d'espaces euclidiens non holonomes.

Un espace euclidien non holonome est un espace qui jouit au voisinage de chacun de ses points de toutes les propriétés de l'espace euclidien et pour lequel il existe une loi, la connexion, qui permet de raccorder entre eux les espaces euclidiens associés à deux points voisins. Mais, contrairement à l'espace euclidien ordinaire, l'espace ne peut pas être organisé dans son ensemble comme un espace euclidien; il n'est *pas holonome*.

Si nous n'insistons pas sur le caractère non holonome de cet espace, nous dirons encore que c'est un *espace à connexion euclidienne*. Nous obtenons ainsi une famille d'espaces qui contient les espaces de Riemann et en particulier l'espace euclidien.

La définition de la connexion est largement indéterminée; moyennant des hypothèses géométriques simples on définira une classe particulière d'espaces à connexion euclidienne : par exemple les espaces de Riemann.

Cette conception s'étend immédiatement : l'espace euclidien est un cas particulier d'espace de Klein; c'est un espace dont le groupe fondamental est le groupe des déplacements euclidiens.

Partant alors d'un espace à groupe fondamental G, on pourra lui associer des espaces à groupe fondamental G non holonomes qui seront à l'espace de Klein à groupe G ce que sont les espaces à connexion euclidienne à l'espace euclidien.

Les espaces non holonomes dont le groupe fondamental est le groupe affin, projectif ou conforme, ont fait l'objet de nombreux travaux de E. Cartan.

Telle est brièvement esquissée la nature de la synthèse de E. Cartan. Nous voudrions insister cependant sur un point : les travaux de Cartan antérieurs à 1922 sont indispensables à la compréhension de ses mémoires consacrés aux espaces généralisés. Ce sont ces œuvres antérieures qui ont permis à E. Cartan de donner à ses conceptions le développement que l'on sait, en serrant toujours et par les moyens les plus simples la réalité géométrique de son sujet.

*
* *

Revenons aux espaces à connexion euclidienne.

L'espace euclidien à n dimensions peut être regardé comme lieu de points, mais on peut aussi le regarder comme lieu de droites, de bi-plans, de tri-plans, ..., ou encore comme lieu d'éléments de contact à 1, 2, 3, ... dimensions.

En changeant d'éléments générateurs on définira des espaces équivalents à l'espace euclidien. Mais que se passe-t-il si l'on considère des espaces euclidiens non holonomes engendrés par des êtres différents du point ?

Il existe des exemples remarquables de semblables espaces.

1° Les espaces de Finsler.

On sait qu'un espace de Riemann est une variété sur laquelle on se donne à priori une mesure linéaire, par la distance de deux points infiniment voisins. L'espace étant à n dimensions et rapporté à un système de coordonnées $z^1, z^2 \ldots, z^n$, Riemann suppose que la distance de deux points infiniment voisins est donnée par la racine carrée positive d'une forme quadratique

$$ds = (g_{rs}(z)\, dz^r\, dz^s)^{\frac{1}{2}} \qquad r, s, = 1, 2, \ldots, n.$$

à coefficients fonctions des z^r, définie positive.

Riemann avait envisagé d'ailleurs de supposer la distance élémentaire ds de la forme plus générale suivante :

$$ds = \mathrm{F}(z^r, dz^r),$$

où F est une fonction homogène et du premier degré en les dz.

C'est P. Finsler le premier qui a développé une géométrie ainsi généralisée.

Si un espace de Riemann est un cas particulier d'espace ponctuel à connexion euclidienne, comment faut-il concevoir un espace de Finsler ?

E. Cartan a montré [2] qu'on pouvait regarder également un

[2] E. Cartan (7).

espace de Finsler comme un espace à connexion euclidienne. C'est un espace à connexion euclidienne dont l'élément générateur est l'élément de contact à 1 dimension, constitué d'un point et d'une direction issue de ce point. Les espaces de Finsler possèdent une métrique vectorielle généralisée, fonction de l'élément de contact, et, au voisinage d'un élément de contact, ils possèdent toutes les propriétés de l'espace euclidien. Ils généralisent les espaces de Riemann.

2° LES ESPACES FONDÉS SUR LA NOTION D'AIRE.

Si Riemann, si Finsler fondent la géométrie sur une mesure linéaire, n'est-il pas possible de fonder une géométrie sur la mesure de l'aire ? Telle est la question qui a été posée par E. Cartan.

Si l'on se donne à priori dans une variété à n dimensions l'aire élémentaire d'une hypersurface (variété à $n-1$ dimensions) d'un espace à n dimensions, quelle théorie géométrique peut-on en tirer ?

E. Cartan a montré [3] qu'on pouvait regarder dans certaines conditions une variété dans laquelle on se donne à priori l'élément d'aire d'hypersurface, comme un espace d'éléments de contact à $n-1$ dimensions (point-hyperplan) à connexion euclidienne. A chaque élément de contact est encore associée une métrique vectorielle. On obtient ainsi une nouvelle généralisation des espaces de Riemann.

Ces deux catégories d'espaces ont suscité un intérêt considérable. De nombreux mémoires ont paru, soit pour traiter tel point particulier, soit pour traiter des généralisations [4].

Retenons une direction : Dans quelle mesure peut-on étendre les résultats de Cartan aux variétés dans lesquelles on se donne à priori la mesure de l'élément de variété à un nombre quelconque de dimensions ?

A. Kawaguchi a fait plusieurs communications à ce sujet. Il a, moyennant certaines hypothèses, défini dans de semblables espaces une différentielle absolue; il a recherché l'expres-

(3) E. CARTAN (6).

(4) La bibliographie à ce sujet est extrêmement étendue; nous n'avons retenu que les ouvrages qui ont un lien direct avec le présent travail.

sion de la courbure et de la torsion de ces espaces [5]. En 1940 il a donné, avec S. Hokari [6], des formules qui permettent de déterminer une métrique vectorielle dans une variété à n dimensions, dans laquelle on se donne à priori l'aire à m dimensions. Ce résultat ne s'applique que si m et n sont premiers entre eux. En 1945, E. T. Davies [7] a abordé dans un esprit semblable les cas où $n=2$ et $n=m-2$.

*
* *

J'ai repris un essai de généralisation en le basant sur l'étude d'un cas particulier : quel parti peut-on tirer de la donnée à priori de l'aire à deux dimensions dans une variété à quatre dimensions ?

J'ai supposé que l'aire bidimensionnelle élémentaire avait une forme semblable à la forme de l'élément linéaire de Finsler, ou à la forme de l'élément d'hypersurface de E. Cartan.

Mon objectif a été de construire un espace d'éléments de contact à 2 dimensions (point-biplan) à connexion euclidienne. Pour atteindre ce but, je me suis efforcé de rester aussi près que possible d'un cas connu : dans un espace de Riemann à 4 dimensions, l'aire bidimensionnelle est connue; quelles sont ses propriétés, quelles sont celles qui seront utiles ?

Telles sont les questions que j'examine dans le premier chapitre. Pour y répondre, j'utilise systématiquement le calcul des formes différentielles extérieures ou alternées.

Je montre qu'il existe *une classe d'aires bidimensionnelles* pour laquelle on peut définir une métrique vectorielle qui généralise la métrique de Riemann. C'est la classe métrique L_M. Je caractérise cette classe de différentes manières. Je termine ce chapitre en indiquant le lien entre ces questions et le calcul des variations.

Je me limite dans ce qui suit à la classe L_M. Je montre (chap. II) comment on peut faire, d'une variété dans laquelle on se donne à priori une aire bidimensionnelle de la classe

---

(5) Kawaguchi, A. (19, 20, 21).

(6) Kawaguchi, A. et Hokari, S. (22, 23).

(7) Davies, E. T. (12).

métrique, *un espace d'éléments de contact bidimensionnels à connexion euclidienne*.

A cette fin je me suis inspiré des recherches de E. Cartan et, en particulier, des méthodes qu'il emploie dans ses *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* L'étude de la torsion me permet de définir les *espaces réguliers* pour lesquels la connexion est univoquement déterminée; je donne aussi quelques précisions sur une classe plus étendue d'espaces, les espaces à connexion semi-intrinsèque.

Les problèmes que j'ai traités dans les deux premiers chapitres, je les reprends (chap. III) en traitant par la méthode de E. Cartan le problème de l'équivalence ponctuelle des variétés à 4 dimensions dans lesquelles on se donne à priori l'aire bidimensionnelle.

Je peux situer exactement la place de la classe L_M, retrouver la métrique vectorielle et la connexion euclidienne. J'interprète ainsi d'une manière nouvelle les hypothèses faites au chapitre II pour déterminer la connexion.

Je montre comment la méthode analytique employée peut s'identifier à la méthode du repère mobile, et je traite, pour terminer ce chapitre, une application à la théorie des surfaces.

Dans une connexion semi-intrinsèque quelconque, je peux montrer qu'on peut regarder toute surface extrémale à 2 dimensions comme une surface dont le vecteur de courbure moyenne est nul en chacun de ses points. Je généralise ainsi une proposition classique relative aux surfaces minima des espaces de Riemann.

*
* *

Les résultats obtenus dans le cas particulier étudié me permettent d'en esquisser (2e partie) la généralisation au cas d'une variété à n dimensions dans laquelle on se donne à priori l'aire à m dimensions. Je peux caractériser simplement une classe de problèmes pour lesquels on peut définir une métrique vectorielle et un espace d'éléments de contact à m dimensions à connexion euclidienne. C'est la classe métrique.

J'obtiens ainsi un résultat valable, quels que soient m et n, qui contient en particulier celui de Kawaguchi. Je puis en même temps préciser l'intérêt des formules de Kawaguchi.

Tous les espaces qu'on obtient ainsi contiennent comme cas particulier les espaces de Riemann. Si l'aire élémentaire à m dimensions a la forme riemannienne et si elle est de la classe métrique, la variété peut être considérée comme une variété de Riemann.

La méthode d'équivalence que j'ai développée au chapitre III pourrait se généraliser; je ne l'ai pas fait; je signale aussi qu'elle s'applique naturellement aux cas connus $m=1$, $m=n-1$. C'est là une recherche qui n'a été faite que dans un cas particulier par E. Cartan, celui où $m=1$ et $n=2$ [8].

Je termine ce travail en attirant l'attention sur une propriété des géométries étudiées : la donnée de l'aire m-uple dans une variété à n dimensions permet toujours de définir une aire $p=n-m$-uple. Il y a donc toujours en présence deux géométries associées. Un cas intéressant est constitué par celui où ces deux géométries sont équivalentes. Je caractérise ce cas.

***

Je tiens à rendre ici hommage à M. le Prof[r] Th. De Donder, qui a guidé et encouragé mes premiers travaux.

J'associe à cet hommage M. le Prof[r] Th. Lepage. Ses recherches sur l'algèbre alternée, les applications qu'il en fait m'ont prouvé l'importance du sujet; elles m'ont naturellement conduit vers l'œuvre de M. E. Cartan.

C'est M. E. Cartan qui est à l'origine du présent travail. Je tiens à le remercier vivement de m'avoir indiqué l'intérêt qu'il y aurait à généraliser ses recherches sur la théorie des espaces métriques fondés sur la notion d'aire au cas des surfaces à deux dimensions de l'espace à 4 dimensions, dont on se donnerait à priori la forme de l'élément d'aire.

M. E. Cartan précisait d'ailleurs qu'on ne pourrait regarder ces surfaces comme des variétés d'éléments de contact à deux dimensions à connexion euclidienne, que si l'élément d'aire avait une forme particulière.

Le problème que j'ai traité dans le présent travail est voisin d'un problème soulevé par l'étude des espaces associés à l'élec-

---

(8) E. CARTAN (5).

tromagnétisme. Cette question est étudiée par M. le Prof[r] J. Géhéniau, qui m'en a signalé l'intérêt [9].

Enfin, je souligne que les recherches synthétiques et critiques que poursuit M. le Prof[r] P. Libois [10] m'ont été précieuses à de nombreux égards.

*
* *

Je remercie la Belgian American Educational Foundation, qui m'a offert des photocopies d'articles nécessaires au présent travail.

---

(9) R. Lorent (29). E. Cartan a montré comment on pouvait associer à une équation de Monge, $ds^2 = g_{rs}(z)\, dz^r\, dz^s = 0$, un espace ponctuel à connexion conforme normale. Van Dantzig (32) a été conduit à envisager un espace à 4 dimensions dans lequel on se donne à priori une équation de la forme

$$\frac{1}{4}\, g_{rs,tu}(z)\, [dz^r dz^s] \cdot [dz^t dz^u] = 0.$$

Dans le cas où $g_{rs,tu} = g_{rt}\, g_{su} - g_{ru}\, g_{st}$, cet espace peut être considéré comme un espace ponctuel à connexion conforme.

(10) P. Libois (27, 28).

SUR UNE CLASSE D'ESPACES A CONNEXION EUCLIDIENNE

PREMIÈRE PARTIE

LES ESPACES METRIQUES A QUATRE DIMENSIONS FONDES SUR LA NOTION D'AIRE

CHAPITRE PREMIER

RECHERCHE D'UNE MÉTRIQUE

§ 1. La mesure des grandeurs à 1, 2, 3 dimensions dans une variété analytique à 4 dimensions. — Énoncé du problème à étudier.

Nous nous placerons dans ce qui suit dans une variété analytique réelle à quatre dimensions V_4.

Le problème de la recherche des déterminations métriques d'une telle variété a été traité dans toute sa généralité par Riemann, dans sa célèbre dissertation *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* (1).

Si l'on considère dans V_4 les variétés à une dimension, les lignes de V_4, on peut imaginer qu'à chaque portion ou segment de ligne est associé un nombre qui mesure la longueur de cette portion. Cette longueur sera, par définition, un invariant, c'est-à-dire un nombre indépendant des représentations analytiques particulières employées à le calculer.

La longueur, regardée comme fonction de la ligne, jouit de la propriété d'additivité qui veut que la longueur d'une ligne

(1) RIEMANN (30), pp. 280 et suiv.

formée de deux segments soit égale à la somme des longueurs de chacun de ces segments. Les hypothèses de continuité faites sur la variété V_4 et sur les lignes de V_4 permettent alors de ramener la définition de la longueur d'une portion de ligne à celle de la longueur d'un segment infiniment petit, ou, ce qui est équivalent, à la distance de deux points infiniment voisins.

Si la variété est rapportée au voisinage d'un de ses points à un système de coordonnées z^1, z^2, z^3, z^4, la longueur élémentaire ds, ou distance de deux points voisins de coordonnées z^r et z^r+dz^r $(r=1, 2, 3, 4)$, sera définie par une fonction des z^r et des différentielles dz^r :

$$ds = F(z^r, dz^r), \qquad r = 1, 2, 3, 4\,[2], \tag{1.1}$$

L'hypothèse la plus naturelle consiste à supposer la fonction F homogène et du premier degré en les dz^r, de sorte que si les différentielles dz^r croissent toutes dans le même rapport, la distance correspondante croisse dans le même rapport.

La nature de la fonction F peut se concrétiser utilement par la considération des variétés de points équidistants d'un point donné.

En vertu de l'homogénéité de F, il suffira de considérer, par exemple, la variété

$$F(z^r, Z^r) = 1, \tag{1.2}$$

où les Z^r sont les coordonnées d'un point courant.

Cette variété est appelée *indicatrice* du point de coordonnée z^r par C. Carathéodory [3]. L'indicatrice a déjà été considérée par Riemann, qui suppose la fonction F positive pour toutes les valeurs non nulles des Z^r, et croissante dans toutes les directions issues de l'origine.

On sait que Riemann développa le cas particulier où la fonction F est la racine carrée positive d'une forme quadratique définie positive en les variables dz^r à coefficients fonctions des z^r.

---

(2) Dans ce qui suit les indices p, q, r, ... prendront les valeurs 1, 2, 3, 4 et les indices répétés seront à sommer, suivant la convention d'Einstein.

(3) C. Carathéodory (1), n° 289.

Le cas général où la distance élémentaire a la forme (1.1) a été développé par P. Finsler [4].

A la lumière de ses recherches sur les géométries généralisées, E. Cartan a pu donner une forme simple aux recherches de Finsler [5]. Une variété dans laquelle on se donne à priori la distance de deux points infiniment voisins sous la forme (1.1) peut être considérée comme une variété d'éléments linéaires, — nous appelons ainsi l'ensemble d'un point et d'une direction issue de ce point, — à connexion euclidienne. Plus explicitement, à chaque élément linéaire est associé un espace euclidien, et il existe une loi qui permet de raccorder entre eux les espaces euclidiens associés à des éléments voisins.

Ces variétés contiennent naturellement comme cas particulier les variétés de Riemann. Dans le schéma de Cartan, si les différents espaces euclidiens associés aux différentes directions issues d'un même point se confondent en un même espace euclidien, circonstance qui se présente si le ds a la forme de Riemann, la variété de Finsler peut être considérée comme une variété ponctuelle à connexion euclidienne sans torsion, c'est-à-dire un espace de Riemann.

*
* *

Les considérations qui précèdent peuvent être reprises point par point en les appliquant à la mesure des grandeurs à plus d'une dimension.

Commençons par les grandeurs orientées à trois dimensions, les hypersurfaces de V_4. Ici encore la définition de la mesure se ramène à la définition de la mesure élémentaire. Les différentielles dz^r, qui définissaient un segment élémentaire ou vecteur, seront remplacées ici par les composantes

$$d\,\sigma^{rst} = [dz^r\, dz^s\, dz^t] \tag{1.3}$$

d'un trivecteur élémentaire qui définit une portion infiniment petite d'hypersurface; dans (1.3) les crochets indiquent une multiplication extérieure [6].

---

(4) P. Finsler (17).

(5) E. Cartan (7).

(6) E. Cartan (9). On pourra consulter aussi Th. De Donder (14).

L'aire élémentaire d'une portion de surface sera donnée par une fonction des z^r et des $d\sigma^{rst}$:

$$d\,\mathrm{S}_3 = f(z^r, d\,\sigma^{rst}). \tag{1.4}$$

Si nous passons maintenant aux variétés à 2 dimensions, les surfaces de V_4, l'aire élémentaire sera donnée semblablement par

$$d\,\mathrm{S}_2 = \mathrm{L}\,(z^r, d\,\sigma^{rs}), \tag{1.5}$$

où $d\sigma^{rs}$ sont les composantes du bivecteur élémentaire $[dz^r\,dz^s]$:

$$d\,\sigma^{rs} = [dz^r\,dz^s]. \tag{1.6}$$

Dans les deux cas envisagés, c'est-à-dire en (1.4) et (1.5), nous ferons sur f et L des hypothèses tout à fait semblables à celles que nous avons faites sur F dans le cas de 1 dimension. En particulier f et L seront des fonctions homogènes et du premier degré en les $d\sigma^{rst}$ et $d\sigma^{rs}$ respectivement.

*
* *

C'est E. Cartan le premier qui s'est posé le problème de rechercher le parti que l'on pourrait tirer de la donnée à priori, au lieu de l'élément linéaire, de l'élément d'hypersurface. En se plaçant immédiatement dans le cas général d'un élément d'hypersurface de la forme (1.4), E. Cartan a montré (7) que dans certaines conditions, une variété dans laquelle on se donne à priori la mesure de l'élément d'hypersurface peut être regardée comme variété d'éléments de contact point-hyperplan à connexion euclidienne. Les espaces ainsi obtenus contiennent encore comme cas particulier les espaces de Riemann. Si l'on adopte pour mesure de l'élément l'hypersurface en (1.4), celle qui est induite par un ds riemannien, on peut, à partir de cette mesure, reconstruire la variété de Riemann dont on est parti. En particulier, on peut édifier la géométrie euclidienne à partir de la donnée de l'élément d'aire d'hypersurface euclidienne.

*
* *

(7) E. Cartan (6).

Nous allons aborder maintenant le problème de fonder une géométrie sur la donnée à priori d'un élément d'aire bidimensionnelle dans une variété à 4 dimensions. Nous nous efforcerons de définir des espaces d'éléments de contact bidimensionnels (point-bivecteur) à connexion euclidienne qui contiennent comme cas particulier les espaces de Riemann.

§ 2. L'aire bidimensionnelle dans un espace de Riemann.

L'étude des propriétés de l'aire bidimensionnelle ou superficielle d'un espace de Riemann nous sera très utile.

Si l'élément linéaire est défini par

$$ds = (g_{rs}(z). \quad dz^r\, dz^s)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.1}$$

l'élément de surface a une forme semblable; il est défini par [8]

$$d\,S_2 = \left(\frac{1}{4}\, g_{rs,\,tu}\, d\,\sigma^{rs}\, d\sigma^{tu}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

où

$$g_{rs,tu} = g_{rt}\, g_{su} - g_{ru}\, g_{st}. \tag{2.3}$$

Dans (2.2), dS_2 n'est autre que la mesure du bivecteur élémentaire $d\sigma^{rs}$.

Si nous considérons une surface S_2 définie paramétriquement par les fonctions

$$z^r = z^r(u^1, u^2), \tag{2.4}$$

supposées analytiques en u^1, u^2, et définie dans un certain domaine D de variation des u, et si nous posons

$$q^{rs} = \frac{\partial(z^r, z^s)}{\partial(u^1, u^2)}, \tag{2.5}$$

nous aurons

$$d\,\sigma^{rs} = [dz^r\, dz^s] = q^{rs}\, du^1\, du^2. \tag{2.6}$$

Nous pourrons alors écrire $d\,S_2$ sous la forme

$$dS_2 = L_R\, du^1\, du^2, \tag{2.7}$$

où

$$L_R = \left(\frac{1}{4}\, g_{rs,tu} \quad q^{rs}.\, q^{tu}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

La donnée de l'élément d'aire dS_2 est équivalente à la donnée de la fonction L_R.

*
* *

---

(8) TH. DE DONDER (15), chap. VI.

Cela étant, désignons par $A_4(z)$ l'espace linéaire tangent à V_4 au point de coordonnées z^r. La donnée à priori dans V_4 de l'aire bidimensionnelle (2.2), abstraction faite de la mesure linéaire (2.1), introduit dans A_4 une métrique bivectorielle qui associe à tout bivecteur de composantes Z^{rs} de A_4 une mesure invariante $L_R(z^r, Z^{rs})$.

Quelles sont les propriétés de A_4 ?

1. Dans A_4 est défini un élément de volume ou mesure 4-vectorielle invariante qui associe à tout 4-vecteur de composante Z^{1234} le nombre

$$\sqrt{g}.\quad Z^{1234}. \tag{2.9}$$

Dans (2.9) $\sqrt{g}$ se calculera à partir du déterminant d'ordre 6 :

$$g^3 = |g_{rs,tu}|, \tag{2.10}$$

dont les éléments ne font intervenir que la mesure L_R [9].

2. Dans A_4 la famille quadratique de biplans d'équation

$$\frac{1}{4} g_{rs,tu} \cdot Z^{rs} Z^{tu} = [L_R(z^r, Z^{rs})]^2 = 0 \tag{2.11}$$

a aussi une signification intrinsèque.

---

[9] Il est utile de vérifier directement l'invariance de (2.9). Une transformation de coordonnées non singulière définie par

$$z'^r = z'^r(z^s)$$

induit sur Z^{1234} la transformation

$$Z'^{1234} = \frac{\partial(z')}{\partial(z)} Z^{1234},$$

D'autre part, il résulte de l'invariance de L_R que les $g_{rs,tu}$ subissent la transformation

$$g_{rs,tu} = \frac{1}{4} g'_{mn,pq} \frac{\partial(z'^m, z'^n)}{\partial(z^r, z^s)} \frac{\partial(z'^p, z'^q)}{\partial(z^t, z^u)};$$

or on a

$$\left| \frac{\partial(z'^m, z'^n)}{\partial(z^r, z^s)} \right| = \frac{\partial(z')^3}{\partial(z)},$$

d'où il résulte

$$\sqrt{g} = \sqrt{g'} \quad \frac{\partial(z')}{\partial(z)}.$$

On en déduit l'invariance annoncée.

Si X^r et Y^r sont les composantes de deux vecteurs de A_4 tels que

$$Z^{rs} = X^r Y^s - X^s Y^r, \tag{2.12}$$

nous aurons

$$\frac{1}{4} g_{rs,tu} \, Z^{rs} . Z^{tu} = \begin{vmatrix} g_{rs} X^r X^s & g_{rs} X^r Y^s \\ g_{rs} Y^r X^s & g_{rs} Y^r Y^s \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

La famille définie par l'équation (2.11) est donc formée des biplans tangents au cône d'équation

$$g_{rs} Z^r Z^s = 0. \tag{2.14}$$

L'existence dans A_4 *de l'élément de volume* (2.9) *et du cône* (2.14) *fait de* A_4 *un espace euclidien.*

Nous dirons encore que (2.11) définit *l'indicatrice bivectorielle* du problème L_R. Il peut être utile, pour faciliter la représentation géométrique, de considérer l'hyperplan à l'infini $P_3(z)$ de $A_4(z)$. On regardera alors les Z^{rs} comme les coordonnées homogènes d'une droite. (2.11) définit alors dans $P_3(z)$ un complexe quadratique de droites que nous appellerons *indicatrice réglée* de L_R.

Cette indicatrice jouit de la propriété d'être formée des droites tangentes à une hyperquadrique.

*
* *

Revenons à dS_2; grâce à (2.5) et (2.8), nous pourrons encore écrire

$$dS_2 = \frac{1}{4} g_{rs,tu} \cdot \frac{q^{tu}}{L_R} [dz^r \, dz^s]. \tag{2.15}$$

Le bivecteur q^{tu} est un bivecteur tangent à S_2.

Si nous posons

$$l^{tu} = \frac{q^{tu}}{L_R}, \tag{2.16}$$

l^{tu} sont les composantes d'un bivecteur tangent unitaire; on a en effet

$$\frac{1}{4} g_{rs,tu} \, l^{rs} . l^{tu} = 1. \tag{2.17}$$

dS_2 peut donc s'écrire encore

$$dS_2 = \frac{1}{4}\, g_{rs,tu}\, l^{tu} [dz^r\, dz^s] \tag{2.18}$$

$$= \frac{1}{2}\, l_{tu} [dz^t\, dz^u], \tag{2.19}$$

où l_{tu} sont les composantes covariantes du bivecteur unitaire tangent. dS_2 apparaît dans les formules ci-dessus comme une forme différentielle extérieure ou alternée; nous la désignerons par Ω_R :

$$\boxed{\Omega_R = \frac{1}{2}\, l_{rs}\, [dz^r\, dz^s]}\,. \tag{2.20}$$

Ce changement de notation est de pure commodité; il évite toute ambiguïté au moment du calcul de la différentielle extérieure de la forme Ω_R.

La forme Ω_R admet dans la métrique riemannienne une forme adjointe ou supplémentaire [10]; elle est définie par

$$\varpi_R = \frac{1}{2}\, l^{rs} \sqrt{g}\, d\sigma_{rs}, \tag{2.21}$$

où

$$d\sigma_{rs} = [\overline{dz^r . dz^s}]. \tag{2.22}$$

Dans (2.22), si rs désigne une combinaison quelconque de deux nombres de la suite 1, 2, 3, 4, $\overline{rs}$ désigne la combinaison complémentaire, c'est-à-dire telle que $(r, s, \overline{r, s})$ forme une suite qui est une permutation paire de la suite 1, 2, 3, 4. Remarquons que l'opération d'adjonction est possible, si on se limite aux bivecteurs, dès qu'on se donne l'aire bidimensionnelle.

Si nous posons

$$n_{rs} = \frac{\sqrt{g}}{L_R}\, q^{\overline{rs}}, \tag{2.23}$$

nous aurons

$$\boxed{\varpi_R = \frac{1}{2}\, n_{rs}\, [dz^r\, dz^s]} \tag{2.24}$$

et

$$\Omega_R = \frac{1}{2}\, n^{rs} \sqrt{g}\, d\sigma_{rs}. \tag{2.25}$$

---

[10] E. CARTAN (10), n° 16.

n_{rs} définit le *bivecteur unitaire normal*, adjoint ou supplémentaire de l^{rs}.

La forme ϖ_R est la mesure d'un élément de surface $l^{\overline{rs}}$ normal à l'élément q^{rs}, et le produit extérieur

$$[\Omega_R \,.\, \varpi_R] = \sqrt{g}\;[dz^1\, dz^2\, dz^3\, dz^4] \qquad (2.26)$$

mesure l'élément de volume soustendu par les deux éléments q^{rs} et $q^{\overline{rs}}$.

Soulignons ici quelques propriétés des formes Ω_R et ϖ_R. *Ces deux formes sont de rang 2.*

On a

$$[\Omega_R \,.\, \Omega_R] = [\varpi_R \,.\, \varpi_R] = 0. \qquad (2.27)$$

Ceci tient au fait que n_{rs} et l^{rs} sont des bivecteurs, c'est-à-dire que

$$l^{12}\, l^{34} + l^{13}\, l^{42} + l^{14}\, l^{23} = 0, \qquad (2.28)$$

$$n_{12}\, n_{34} + n_{13}\, n_{42} + n_{14}\, n_{23} = 0. \qquad (2.29)$$

Les formes Ω_R et ϖ_R sont donc respectivement des produits extérieurs de deux formes linéaires

$$\Omega_R = [\omega_1 \,.\, \omega_2], \qquad \varpi_R = [\omega_3 \,.\, \omega_4]. \qquad (2.30)$$

Remarquons que grâce à (2.26) les quatre formes ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 sont linéairement indépendantes si la forme quadratique (2.1) est non singulière.

*
* *

Les formes Ω_R et ϖ_R ont une signification invariante; il en est donc de même de leurs *différentielles* $d\Omega_R$ *et* $d\varpi_R$.

Ces formes font intervenir, outre le point z^r et le bivecteur l^{rs}, la différentielle du bivecteur l^{rs}.

On a

$$d\,\Omega_R = \frac{1}{2}\, d\,l_{rs}\, [dz^r\, dz^s]. \qquad (2.31)$$

Désignons par D l'opération de différentiation absolue conformément à (2.1); nous aurons

$$Dl_{rs} = d\,l_{rs} - l_{rt}\,\omega_s{}^t - l_{ts}\,\omega_r{}^t, \qquad (2.32)$$

où

$$\omega_r^s = \gamma_{ru}^s\, dz^u, \qquad (2.33)$$

les $\gamma_r{}^s{}_u$ étant les symboles de Christoffel.

En vertu des propriétés de symétrie,

$$\gamma_{rsu} = \gamma_{usr}; \tag{2.34}$$

on vérifie aisément que

$$d\Omega_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}[\mathrm{D}l_{rs}\, dz^r\, dz^s] = \frac{1}{4}\, g_{rs,tu}[\mathrm{D}l^{tu}\, dz^r\, dz^s]. \tag{2.35}$$

On aura semblablement

$$d\varpi_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}[\mathrm{D}n_{rs}\, dz^r\, dz^s] = \frac{1}{2}[\mathrm{D}l^{rs}\sqrt{g}\, d\sigma_{rs}]. \tag{2.36}$$

Enfin signalons une dernière propriété

$$[d\Omega_{\mathrm{R}} \,.\, \varpi_{\mathrm{R}}] = 0. \tag{2.37}$$

Cette propriété, qui se traduit par les relations

$$l^{rs}\,\mathrm{D}l_{rs} = l_{rs}\,\mathrm{D}l^{rs} = 0, \tag{2.38}$$

exprime que la différentielle absolue du bivecteur unitaire tangent est un bivecteur normal à ce bivecteur.

§ 3. L'élément d'aire généralisé. Détermination d'une métrique bivectorielle attachée à un élément de surface.

Revenons maintenant à une variété V_4 dans laquelle on se donne à priori l'élément de surface

$$dS_2 = \mathrm{L}(z^r, d\sigma^{rs}). \tag{3.1}$$

Considérée comme fonction des composantes du bivecteur $d\sigma^{rs}$, L jouit par hypothèse des propriétés suivantes :

1. L est analytique;

2. L est positivement homogène et du premier degré en les $d\sigma^{rs}$;

3. L est positive pour les valeurs non toutes nulles des $d\sigma^{rs}$ et possède un minimum nul pour $d\sigma^{rs} = 0$.

Si nous nous reportons aux notations introduites au paragraphe 2, dS_2 peut encore s'écrire

$$dS_2 = \mathrm{L}(z^r, q^{rs})\, du^1\, du^2. \tag{3.2}$$

Les variables q^{rs}, composantes d'un bivecteur, ne sont pas indépendantes; elles sont liées par la relation

$$q^{12}\, q^{34} + q^{13}\, q^{42} + q^{14}\, q^{23} = 0. \tag{3.3}$$

Il ne nous est donc pas possible sans autre précaution de définir les dérivées successives de L. A cette fin nous désignerons par

$$p^{rs} = - p^{sr}$$

six variables indépendantes. Considérées comme les coordonnées homogènes d'un espace projectif P_5 à 5 dimensions les $p^{rs} = q^{rs}$ sont alors les coordonnées des points de la quadrique à quatre dimensions d'équation

$$p^{12} p^{34} + p^{13} p^{42} + p^{14} p^{23} = 0, \tag{3.4}$$

ou quadrique de Klein. Nous désignerons cette quadrique par K et nous dirons d'une relation vraie sur K qu'elle est vraie module K.

Cela étant, supposons connue une fonction $L(z^r, p^{rs})$ qui se réduit à $L(z^r, q^{rs})$ sur K. L sera supposée vérifier en les variables p^{rs} les conditions énoncées au début de ce paragraphe. Nous supposerons de plus que la matrice d'ordre 6

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial p^{rs} \, \partial p^{tu}} \right| \tag{3.5}$$

est de rang 5.

L'ensemble des fonctions $L^*(z, p)$ qui répondent à ces conditions constitue un faisceau que nous pourrons mettre sous la forme

$$L^*(z, p) = L(z, p) + \Lambda (p^{12} p^{34} + p^{13} p^{42} + p^{14} p^{23}), \tag{3.6}$$

où Λ est une fonction arbitraire de (z, p) analytique et homogène de degré -1 en les p.

Les fonctions $L^*(z, p)$ définissent toutes la même aire élémentaire. On a en effet

$$d S_2 = L^*(z^r, d\sigma^{rs}) = L(z^r, d\sigma^{rs}), \tag{3.7}$$

puisque les $d\sigma^{rs}$ sont les composantes d'un bivecteur, ou les coordonnées d'un point de K.

Si nous désignons par

$$L^*_{rs} = \frac{\partial L^*}{\partial p^{rs}} \tag{3.8}$$

les dérivées partielles de L^* et si nous posons

$$L^*_{rs} = - L^*_{sr}, \tag{3.9}$$

l'identité d'Euler appliquée à L^* s'écrira

$$\frac{1}{2} L^*_{rs} \cdot p^{rs} = L^*(z,p). \tag{3.10}$$

(3.7) joint à (3.10) nous permet d'écrire

$$\boxed{dS_2 = \frac{1}{2} L^*_{rs}(z,q) \cdot d\sigma^{rs}}. \tag{3.11}$$

c'est-à-dire de mettre dS_2 sous *la forme d'une forme quadratique extérieure.*

Dans (3.11) les dérivées L^*_{rs} étant homogènes et de degré zéro en les p, nous avons remplacé les $d\sigma^{rs}$ par des quantités proportionnelles q^{rs}.

Nous voyons donc que si la valeur de dS_2 est bien déterminée sur K, la forme de dS_2 ne l'est pas, puisque L^* est une fonction quelconque du faisceau (3.6).

Nous avons, grâce à (3.6),

$$L^*_{rs}(z,q) = L_{rs}(z,q) + \Lambda \bar{q}^{rs} \qquad (\text{mod. K}). \tag{3.12}$$

A dS_2 est donc associé un faisceau de formes quadratiques extérieures

$$dS_2 = \frac{1}{2} L_{rs}(z,q) \cdot d\sigma^{rs} + \frac{1}{2} \Lambda \bar{q}^{rs} d\sigma^{rs} \qquad (\text{mod. K}). \tag{3.13}$$

Nous pourrons alors, en disposant de Λ, imposer aux dérivées de L^* prises sur K des conditions supplémentaires.

Pour cela nous nous reporterons au paragraphe précédent. Nous avons observé que la forme Ω_R, qui donne l'élément d'aire, est une forme de rang 2.

Nous supposerons qu'il en est de même ici, c'est-à-dire que les L^*_{rs} sont les composantes d'un bivecteur sur K. Cette condition permet de déterminer Λ.

L'équation

$$L^*_{12} L^*_{34} + L^*_{13} L^*_{42} + L^*_{14} L^*_{23} = 0 \qquad (\text{mod. K}) \tag{3.14}$$

donne en effet

$$\Lambda(z,q) = -\frac{L_{12} L_{34} + L_{13} L_{42} + L_{14} L_{23}}{L} \qquad (\text{mod. K}). \tag{3.15}$$

Désormais nous supposerons donc l'élément d'aire dS_2 mis sous la forme

$$\boxed{dS_2 = \frac{1}{2} L_{rs}(z, q)\, d\sigma^{rs}}\,, \tag{3.16}$$

où dS_2 *est une forme quadratique extérieure de rang 2*, ou, ce qui est équivalent, telle que $L_{rs}(z, q)$ soient les composantes d'un bivecteur [11].

Nous désignerons à l'avenir par Ω l'élément d'aire (3.16), afin d'éviter toute confusion au moment du calcul de la différentielle $d\Omega$; nous avons donc

$$dS_2 = \Omega. \tag{3.17}$$

*
* *

Nous avons déjà conservé pour notre élément d'aire une première propriété valable dans le cas riemannien; c'était le rang de la forme Ω.

Nous allons nous efforcer maintenant de donner à dS_2 une forme aussi proche que possible de la forme riemannienne.

Si nous nous reportons à (2.19), nous voyons que nous devons pouvoir regarder les $L_{rs}(z, q)$ qui figurent dans (3.16) comme les composantes covariantes d'un bivecteur tangent. La fonction L définit une mesure bivectorielle dans laquelle le bivecteur $L^{-1} q^{tu}$ est unitaire; L étant homogène et du premier degré en les q, on a en effet

$$L\left(z, \frac{q^{tu}}{L}\right) = 1. \tag{3.18}$$

Si donc nous posons
$$\frac{q^{tu}}{L} = l^{tu}, \tag{3.19}$$

l^{tu} seront les composantes contravariantes d'un bivecteur tangent unitaire. Pour que les L_{tu} soient les composantes covariantes du même bivecteur, nous recherchons donc une métrique bivectorielle $g_{rs,\,tu}$ telle que l'on ait

$$\boxed{\frac{1}{2} g_{rs,\,tu}(z, q) \cdot l^{tu} = L_{rs}(z, q)}\,. \tag{3.20}$$

---

[11] Des considérations proches de celles-ci ont été développées par H. Kneser (24).

Nous poserons encore, par souci d'unité dans les notations,

$$L_{rs} = l_{rs}. \tag{3.21}$$

Les conditions (3.20) ne suffisent pas pour déterminer le tenseur $g_{rs,\,tu}$.

Nous allons porter notre attention sur la forme $d\Omega$.

Supposons connues les fonctions $L(z, p)$ et $L_{rs}(z, p)$. Nous calculerons $d\Omega$ comme si les variables p étaient indépendantes; pour avoir la valeur de $d\Omega$ sur K, il suffira, après différentiation, de tenir compte des relations qui lient les variables p sur K [12].

On a sur K,

$$d\Omega = \frac{1}{4} L_{rs,tu}[dq^{tu}\ \ dz^r\, dz^s] + \frac{1}{2}\frac{\partial L_{rs}}{\partial z^t}[dz^t\, dz^r\, dz^s]. \tag{3.22}$$

Si nous dérivons l'identité

$$\frac{1}{2} L_{rs}\, p^{rs} = L \tag{3.23}$$

nous obtenons

$$L_{rs,tu} \cdot p^{tu} = 0. \tag{3.24}$$

Nous pourrons donc mettre $d\Omega$ sous la forme

$$\begin{aligned} d\Omega = {} & \frac{1}{4}(L\, L_{rs,tu} + L_{rs}\, L_{tu})\ [dl^{tu}\, dz^r\, dz^s] \\ & - \frac{1}{4} L_{rs}\, l_{tu}[dl^{tu}\, dz^r\, dz^s] + \frac{1}{2}\frac{\partial L_{rs}}{\partial z^t}[dz^t\, dz^r\, dz^s]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Observons de plus que, grâce à (3.23) et (3.24),

$$L_{tu}\, dl^{tu} = -\, l^{tu}\, d\, l_{tu} = -\, l^{tu}\frac{\partial L_{tu}}{\partial z^v}\, dz^v, \tag{3.26}$$

c'est-à-dire que nous pourrons réunir en un seul les deux derniers termes de (3.25) :

$$\frac{\partial L_{rs}}{\partial z^t} + \frac{1}{2} L_{rs}\, l^{uv}\frac{\partial L_{uv}}{\partial z^t} = \frac{1}{L}\frac{\partial L L_{rs}}{\partial z^t}. \tag{3.27}$$

Pour donner à $d\Omega$ la forme de $d\Omega_R$ en (2.32), nous poserons

$$g_{rs,tu} = \frac{\partial^2 \frac{1}{2} L^2}{\partial p^{rs}\, \partial p^{tu}} \qquad \text{(mod. K)}. \tag{3.28}$$

---

[12] E. Kähler (18), n° 3.

$g_{rs,tu}$ est un tenseur symétrique d'ordre 6 en les deux groupes d'indices rs, tu, antisymétrique en chaque groupe rs, tu :

$$g_{rs,tu} = g_{tu,rs} = -g_{sr,tu} = -g_{rs,ut}. \tag{3.29}$$

Le tenseur (3.28) donne une solution de (3.20). Pour passer de (3.20) à (3.28), il faut des conditions supplémentaires sur lesquelles nous reviendrons plus tard (chap. II, § 9).

Il résulte des hypothèses que nous avons faites sur la fonction L, que la forme quadratique

$$\frac{1}{4} g_{rs,tu}(z, q) . X^{rs} X^{tu} \qquad (\text{mod. K.}), \tag{3.30}$$

où X^{rs} sont les composantes d'un bivecteur, est définie positive. Il sera donc possible de définir un tenseur $g^{rs,tu}$ inverse de $g_{rs,tu}$, c'est-à-dire tel que

$$\frac{1}{2} g^{rs,tu} g_{tu,vw} = \delta^r_v \delta^s_w - \delta^r_w \delta^s_v, \tag{3.31}$$

où

$$\delta^r_s = 1 \text{ si } r = s \text{ et } \delta^r_s = 0 \text{ si } r \neq s.$$

Nous achevons ainsi de donner à $d\Omega$ une forme analogue à celle de $d\Omega_R$. Grâce à (3.31), (3.28) et (3.27), nous avons

$$d\Omega = \frac{1}{4} g_{rs,tu} [(dl^{tu} + \frac{1}{2L} g^{tu,vw} \frac{\partial LL_{vw}}{\partial z^p} dz^p) dz^r dz^s]. \tag{3.32}$$

Nous regarderons le tenseur $g_{rs,tu}$ comme définissant *une métrique bivectorielle généralisée*, associée à chaque élément (z, q).

Par définition, un bivecteur de composantes contravariantes X^{rs} aura pour mesure

$$X = \left(\frac{1}{4} g_{rs,tu} X^{rs} X^{tu}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.33}$$

Cette mesure n'est définie que si l'on associe au bivecteur X^{rs} un élément (z, q) que nous appellerons *support* du bivecteur X^{rs}. Seuls les bivecteurs dotés d'un élément support possèdent une longueur déterminée.

§ 4. La métrique bivectorielle.

Les difficultés qu'il y a à définir les dérivées premières de L sur K se retrouvent dans le calcul des dérivées secondes.

Si $L^1(z, p)$ est une fonction quelconque qui prend les mêmes valeurs que L sur K, et s'il en est de même pour les dérivées partielles $L^1{}_{rs}$ et L_{rs}, on aura

$$L^1_{rs} = L_{rs} + \frac{\Lambda_{rs}}{L}(p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23}), \tag{4.1}$$

où Λ_{rs} sont des fonctions quelconques homogènes et de degré -1 en les p.

On pourrait répéter sur L^1 et sur la forme Ω^1 qui lui est associée les calculs du paragraphe précédent; les résultats seraient les mêmes; seule la forme varierait. En particulier nous définirions le tenseur

$$g^1_{rs,tu} = g_{rs,tu} + \Lambda_{rs.}\, q^{\overline{tu}} \qquad \text{(mod. K)}. \tag{4.2}$$

Nous pouvons donc chercher à disposer de l'indétermination des dérivées secondes de L pour satisfaire à de nouvelles conditions.

Nous supposerons tout d'abord

$$\Lambda_{rs} \,.\, l^{rs} = 0. \tag{4.3}$$

Nous aurons ainsi, quelles que soient les fonctions Λ_{rs},

$$\frac{1}{2}\, g^1_{rs,tu}\, l^{tu} = l_{rs}. \tag{4.4}$$

soit les conditions (3.20).

Si maintenant

$$g^3 = \det\ |g_{rs,tu}|$$

et

$$(g^1)^3 = \det\ |g^1_{rs,tu}|, \tag{4.5}$$

nous aurons, grâce à (4.3),

$$g^1 = g. \tag{4.6}$$

Si l'on se reporte aux définitions (3.28) et (4.5) et si l'on tient compte de l'identité

$$\frac{1}{4}\, g_{rs,tu}\, q^{rs}\, q^{tu} = L^2, \tag{4.7}$$

la démonstration faite en (2.9) se transpose intégralement; elle permet d'affirmer que la forme

$$\Phi = \sqrt{g}\,[dz^1\, dz^2\, dz^3\, dz^4] \tag{4.8}$$

est invariante.

Il en résulte que nous pouvons, comme dans le cas riemannien, définir un tenseur adjoint ou supplémentaire du tenseur l_{rs}. Nous poserons

$$\left.\begin{aligned} n_{rs} &= \sqrt{g}\,\frac{q^{\overline{rs}}}{\mathrm{L}} = \sqrt{g}\; l^{\overline{rs}}, \\ n^{rs} &= \frac{\mathrm{L}_{\overline{rs}}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, l_{\overline{rs}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Mais l^{rs} et l_{rs} étant respectivement les composantes contravariantes et covariantes d'un même tenseur, le bivecteur unitaire tangent, nous devrons pouvoir de même considérer n^{rs} et n_{rs} comme les composantes contravariantes et covariantes d'un même tenseur, le bivecteur unitaire normal; il faudra donc, et il suffira d'ailleurs que l'on ait

$$\boxed{\frac{1}{2}\, g^{1}_{rs,tu}\, n^{tu} = n_{rs}}\,. \tag{4.10}$$

Il en résultera immédiatement, grâce à (4.7),

$$\frac{1}{4}\, g_{rs,tu}\, n^{tu}\, n^{rs} = 1. \tag{4.11}$$

Le tenseur n_{rs} est donc unitaire. D'autre part, grâce à (3.3),

$$n^{rs}\, l_{rs} = n_{rs}\, l^{rs} = 0; \tag{4.12}$$

le bivecteur (n) est bien orthogonal au bivecteur (l).

Les conditions (4.10) *sont des conditions nouvelles;* elles ne résultent nullement de la définition de $g_{rs,\,tu}$ et des définitions (4.9). Elles permettent de déterminer les fonctions Λ_{rs} et, par cela même, d'achever la détermination du tenseur $g_{rs,\,tu}$.

(4.10) joint à (4.2) donne en effet

$$\Lambda_{rs} = \frac{g}{\mathrm{L}^2}\, q^{\overline{rs}} - \frac{1}{2\sqrt{g}}\, \mathrm{L}_{rs,tu} \,.\, \mathrm{L}_{\overline{tu}}. \tag{4.13}$$

Nous voyons donc qu'en nous efforçant de conserver certaines propriétés de la métrique bidimensionnelle d'un espace de Riemann, nous pouvons associer d'une manière univoque à un élé-

ment d'aire généralisé, dS_2, *une métrique bivectorielle fonction de l'élément point-bivecteur.*

Nous aurons alors, comme dans le cas riemannien,

$$\Omega = \frac{1}{2} l_{rs} [dz^r \, dz^s] = \frac{1}{2} n^{rs} \sqrt{g} \, d\sigma_{rs}. \tag{4.14}$$

A la forme Ω est associée une forme adjointe, comme dans le cas riemannien

$$\varpi = \frac{1}{2} n_{rs} [dz^r \, dz^s] = \frac{1}{2} l^{rs} \sqrt{g} \, d\sigma_{rs}. \tag{4.15}$$

On a d'ailleurs encore

$$[\Omega \, . \, \varpi] = \sqrt{g} \; [dz^1 \, dz^2 \, dz^3 \, dz^4]. \tag{4.16}$$

Enfin $d\Omega$ a une forme semblable à $d\Omega_R$, et la propriété

$$[d\Omega \, . \, \varpi] = 0, \tag{4.17}$$

qui résulte de (3.24), est l'équivalent de (2.37).

§ 5. Sur une classe d'aires bidimensionnelles. La métrique vectorielle associée à un élément de surface.

Comme dans le cas d'un espace de Riemann nous pouvons, à partir de la donnée de l'aire bidimensionnelle généralisée, considérer dans l'espace linéaire $A_4(z)$ l'indicatrice bivectorielle

$$L(z^r, Z^{rs}) = 0. \tag{5.1}$$

Convenons de désigner par $\mathfrak{A}_4(z^r, q^{rs})$ l'espace linéaire associé à un élément de contact bidimensionnel de coordonnées z^r, q^{rs}.

Il résulte des considérations développées aux paragraphes 3 et 4 que dans $\mathfrak{A}_4$ se trouvent définies d'une manière intrinsèque :

a) Une mesure 4-vectorielle, qui associe à tout 4-vecteur X^{1234} de $\mathfrak{A}_4$ le nombre

$$\sqrt{g(z, q)} \, . \, X^{1234}; \tag{5.2}$$

b) Une famille quadratique $\mathcal{C}$ de biplans d'équation

$$g_{rs,tu}(z, q) \, X^{rs} \, X^{tu} = 0, \tag{5.3}$$

où X^{rs} sont les composantes d'un bivecteur de $\mathfrak{A}_4$.

La famille $\mathfrak{C}$ est osculatrice à l'indicatrice (5.1) le long de l'élément (z, q); on a en effet sur K

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial X^{rs}}\right)_{X^{rs} = q^{rs}} &= \frac{\partial \frac{1}{2} L^2}{\partial p^{rs}}, \\ \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial X^{rs} \partial X^{tu}}\right)_{X^{rs} = q^{rs}} &= \frac{\partial^2 \frac{1}{2} L^2}{\partial p^{rs} \partial p^{tu}}. \end{aligned}\right\} \quad (5.4)$$

Nous dirons que $\mathfrak{C}$ est l'*indicatrice bivectorielle osculatrice* pour l'élément (z, q) [13]. Dans le cas où l'aire bidimensionnelle a la forme riemannienne (2.2), indicatrice et indicatrice osculatrice sont confondues et formées des biplans tangents à un cône.

Afin de rester aussi près que possible du cas riemannien, *nous nous limiterons aux aires bidimensionnelles pour lesquelles l'indicatrice osculatrice $\mathfrak{C}$ est formée des biplans tangents à un cône.*

Dans ce cas l'espace $\mathfrak{A}_4(z, q)$ est un espace euclidien; nous le désignerons par $E_4(z, q)$.

Nous définissons ainsi, d'une manière intrinsèque, une classe d'aires bidimensionnelles que nous qualifierons de métrique. Les fonctions L de la classe métrique seront désignées par L_M: nous désignerons aussi, par abréviation, cette classe par L_M.

Dans la classe métrique, soit

$$g_{rs}(z, q) \,.\, X^r X^s = 0, \tag{5.5}$$

l'équation du cône de $\mathfrak{A}_4(z, q)$, enveloppe de la famille (5.3).

Les $g_{rs}(z, q)$ sont donc dix fonctions de (z, q) telles qu'on ait sur K :

$$g_{rs,tu} = g_{rt}\, g_{su} - g_{ru}\, g_{st} \tag{5.6}$$

et

$$g = \det . |g_{rs}|. \tag{5.7}$$

A tout élément (z, q) est donc associé un espace euclidien $E_4(z, q)$ dans lequel une métrique est définie par le tenseur g_{rs}. Un vecteur de composantes X^r de E_4 possède une longueur dont le carré X^2 est donné par

$$X^2 = g_{rs}(z, q)\, X^r X^s. \tag{5.8}$$

---

[13] Voir en particulier dans P. DELENS (16), l'étude des surfaces d'approximations de l'indicatrice finslerienne.

Cette longueur varie si l'élément (z, q) varie; nous dirons que (z, q) est *l'élément support* du vecteur; seul un vecteur doué d'un élément support possède une longueur définie.

Dans la classe L_M *la variété* V_4 *peut donc être regardée comme une variété d'éléments de contact bidimensionnels localement euclidienne.*

Il est aisé de donner dans L_M l'expression des composantes du tenseur de la métrique généralisée. Si g^{rs} sont les éléments du tenseur inverse de g_{rs}, les mineurs de g_{rs} dans le déterminant g sont égaux à gg^{rs}. Mais, grâce à (5.6), tous les mineurs d'ordre 2 du déterminant d'ordre 3 gg^{rs} sont connus; on aura donc

$$(gg^{pt})^2 = \begin{vmatrix} g_{qr,uv} & g_{qr,vw} & g_{qr,wu} \\ g_{rs,uv} & g_{rs,vw} & g_{rs,wu} \\ g_{sq,uv} & g_{sq,vw} & g_{sq,wu} \end{vmatrix}, \tag{5.9}$$

où

$$(p, q, r, s) = (t, u, v, w) = (1, 2, 3, 4). \tag{5.10}$$

La formule (5.9) montre de plus que la métrique vectorielle est univoquement déterminée par la métrique bivectorielle si nous demandons que la métrique vectorielle soit définie positive. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Soulignons, pour terminer ce paragraphe, que l'appartenance à la classe L_M suppose uniquement que l'indicatrice osculatrice soit formée des biplans tangents à un cône.

Cette condition peut encore s'exprimer en considérant l'hyperplan à l'infini $\mathfrak{F}_3(z, q)$ de $\mathfrak{A}_4$ et en disant que le complexe quadratique de droites C est formé des droites tangentes à une hyperquadrique.

§ 6. Caractérisation de la classe C_M.

Soient $X^{rs} = -X^{sr}$ six nombres liés par la relation

$$X^{12}X^{34} + X^{13}X^{42} + X^{14}X^{23} = 0. \tag{6.1}$$

Soit T une transformation linéaire qui conserve la relation (6.1). Nous écrirons T d'une manière abrégée :

$$X' = TX. \tag{6.2}$$

T jouit de la propriété suivante : T est une matrice d'ordre 6, composée quadratique d'une matrice d'ordre 4, c'est-à-dire qu'il existe une matrice d'ordre 4

$$A = \| a^r_s \|, \tag{6.3}$$

telle que les éléments de T :

$$T = \| a^{rs}_{tu} \| \qquad r < s, \ t < u, \tag{6.4}$$

soient donnés par

$$a^{rs}_{tu} = a^r_t \, a^s_u - a^r_u \, a^s_t . \tag{6.5}$$

Nous symboliserons cette propriété en écrivant

$$T = C_2 (A), \tag{6.6}$$

indiquant par là que T est une matrice composée des mineurs d'ordre 2 de la matrice A ([14]). Si A est une matrice non singulière quelconque du groupe linéaire général, la matrice T appartient à un groupe que nous désignerons par $\mathcal{G}_K$.

Géométriquement, si nous nous plaçons dans un espace projectif à 3 dimensions P_3 et si nous regardons les X^{rs} comme les coordonnées homogènes d'une droite, les transformations du groupe $\mathcal{G}_K$ sont les projectivités induites sur les coordonnées de droites par les projectivités opérant sur les points de P_3. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation

$$X'^{rs} = \frac{1}{2} \, a^{rs}_{tu} \, X^{tu} \tag{6.7}$$

soit une projectivité de $\mathcal{G}_K$ peuvent s'exprimer en disant : les six complexes linéaires

$$\frac{1}{2} \, a^{rs}_{tu} \, X^{tu} = 0 \tag{6.8}$$

sont spéciaux et leurs directrices forment un tétraèdre proprement dit ([15]).

* * *

Revenons maintenant à un complexe quadratique C de droites

$$C = \frac{1}{4} \, g_{rs,tu} \, X^{rs} \, X^{tu} = 0. \tag{6.9}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel complexe soit formé des tangentes à une quadrique, c'est-à-dire soit un complexe C_M, ou encore pour que l'élément d'aire correspon-

---

([14]) J. Wedderburn (33), chap. V.

([15]) G. Koenigs (25), § 74.

dant appartienne à la classe L_M, peuvent s'exprimer de différentes façons.

Nous pouvons dire : il faut et il suffit que la matrice symétrique
$$\mathcal{G} = \| g_{rs,tu} \| \tag{6.10}$$
soit une matrice composée quadratique d'une matrice symétrique
$$\mathcal{G} = C_2(g), \tag{6.11}$$
où
$$g = \| g_{rs} \|. \tag{6.12}$$

Nous pouvons dire aussi : les relations
$$Y_{rs} = \frac{1}{2} g_{rs,tu} X^{tu} \tag{6.13}$$
définissent une transformation du groupe $\mathcal{G}_K$.

Il est équivalent de dire : les six complexes linéaires
$$Y_{rs} = 0 \tag{6.14}$$
associés à C sont spéciaux et leurs directrices forment un tétraèdre proprement dit $\mathcal{T}$.

Analytiquement les conditions nécessaires et suffisantes sont les suivantes :
$$\frac{1}{2} g_{rs,tu} g_{pq,\overline{tu}} = 0, \text{ si } rs \neq \overline{pq}, \tag{6.16}$$
$$\frac{1}{2} g_{12,tu} g_{34,\overline{tu}} = \frac{1}{2} g_{13,tu} g_{42,\overline{tu}} = \frac{1}{2} g_{14,tu} g_{23,\overline{tu}} = g^3, \tag{6.17}$$
où g^3 est donné par (4.5).

Il n'y a aucune difficulté à établir les conditions nécessaires énoncées. Nous insisterons sur les conditions suffisantes. Nous allons établir que si les conditions suffisantes (6.16) et (6.17) sont remplies, il existe une transformation de $\mathcal{G}_K$ qui permette de mettre C sous la forme réduite
$$(X^{12})^2 + (X^{13})^2 + (X^{14})^2 + (X^{23})^2 + (X^{42})^2 + (X^{34})^2. \tag{6.18}$$

Si
$$X^{tu} = \frac{1}{2} A^{tu}_{rs} X'^{rs} \tag{6.19}$$

---

(16) K. ZINDLER (34), vol. II, § 45.

est la transformation inverse de la transformation (6.7), un changement de coordonnées transforme C en

$$\frac{1}{4}\, g'_{rs,tu}\, X'^{rs}\, X'^{tu}, \tag{6.20}$$

où

$$g'_{rs,tu} = \frac{1}{4}\, g_{pq,vw}\, A^{pq}_{rs}\, A^{vw}_{tu}. \tag{6.21}$$

Les complexes associés Y_{rs} se transforment en Y'_{rs} :

$$Y'_{rs} = \frac{1}{2}\, g'_{rs,tu}\, X'^{tu} = \frac{1}{2}\, A^{tu}_{rs}\, Y_{tu}. \tag{6.22}$$

Les conditions (6.16) et (6.17) sont invariantes; elles seront vérifiées dans les variables accentuées. Une transformation T transforme en effet $\mathfrak{T}$ en un autre tétraèdre $\mathfrak{T}'$. Rechercher une transformation T qui amène C à la forme (6.18) revient à rechercher une transformation T qui amène $\mathfrak{T}$ à coïncider avec le tétraèdre fondamental. Une première réduction est toujours possible, grâce aux conditions que vérifie le tenseur $g_{rs,tu}$. On trouve sans peine une transformation T qui amène deux arêtes opposées du tétraèdre $\mathfrak{T}$ à coïncider avec deux arêtes opposées du tétraèdre fondamental : il suffit en effet de faire

$$a^{rs}_{12} = l^{rs}, \qquad a^{rs}_{34} = n^{rs}; \tag{6.23}$$

les directrices des complexes spéciaux

$$\frac{1}{2}\, l_{rs}\, X^{rs} = \frac{1}{2}\, l^{rs}\, Y_{rs},\ \frac{1}{2}\, n_{rs}\, X^{rs} = \frac{1}{2}\, n^{rs}\, Y_{rs} \tag{6.24}$$

associés aux formes Ω et ϖ viennent alors en coïncidence avec deux arêtes opposées du tétraèdre fondamental; on a

$$Y'_{12} = X'^{12}, \qquad Y'_{34} = X'^{34}. \tag{6.25}$$

La forme C est alors réduite à

$$(X^{12})^2 + (X^{34})^2 + g_{i\alpha,j\beta}\, X^{i\alpha}\, X^{j\beta} \qquad \begin{array}{l} i, j = 1, 2. \\ \alpha, \beta = 3, 4; \end{array} \tag{6.26}$$

où

$$g_{i\alpha,j\beta}\, X^{i\alpha}\, X^{j\beta}$$

est une forme quadratique symétrique à quatre variables, dont le discriminant est d'ailleurs égal à l'unité.

Ouvrons une parenthèse : Si l'on a en vue la classification des complexes C dans le groupe $\mathcal{G}_K$, nous voyons donc qu'on peut se ramener à la classification de formes quadratiques à quatre variables dans un sous-groupe $\mathcal{G}'_K$ de $\mathcal{G}_K$. C'est le sous-groupe qui laisse invariantes les variables X^{12} et X^{34} et la forme

$$X^{13}X^{42} + X^{14}X^{23}. \tag{6.27}$$

Les matrices T du groupe $\mathcal{G}_K$ sont composées à partir de matrices A de la forme

$$A = \left|\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right|, \qquad \text{où} \qquad |\alpha| = 1 \qquad |\beta| = 1. \tag{6.28}$$

(6.28) montre que $\mathcal{G}'_K$ n'est autre qu'un groupe produit de deux groupes de transformations linéaires unimodulaires opérant sur deux variables.

Aux formes de la classe C_M correspondent des formes

$$g_{i\alpha,j\beta}\, X^{i\alpha} X^{j\beta},$$

réductibles à la forme diagonale dans le groupe $\mathcal{G}'_K$. On peut les caractériser en disant que l'équation caractéristique du faisceau

$$g_{i\alpha,j\beta}\, X^{i\alpha} X^{j\beta} + \lambda\,(X^{13}X^{42} + X^{14}X^{23}) \tag{6.29}$$

possède deux racines doubles de produit égal à l'unité et de somme nulle $+1$ et -1 [17].

La réduction de (6.26) à la forme (6.18) s'achève aisément; les conditions (6.16) et (6.17) permettent en effet sans peine d'amener Y'_{13} et Y'_{42} à coïncider avec X'^{13} et X'^{42}, et Y'_{14} et Y'_{23} avec X'^{14} et X'^{23}.

Si le complexe C a la forme (6.18), c'est un complexe C_M formé des droites tangentes à la quadrique

$$(Z^1)^2 + (Z^2)^2 + (Z^3)^2 + (Z^4)^2 = 0. \tag{6.30}$$

Si A est la transformation qui donne à C la forme (6.18), on a d'ailleurs

$$\widetilde{\mathcal{C}_2(A)}^{-1}\ \mathcal{G}\,\mathcal{C}_2(A)^{-1} = I_6, \tag{6.31}$$

---

(17) A. Clebsch (11), vol. II, 1, pp. 206 et suiv.

où $\sim$ indique l'opération de transposition et où I_6 est la matrice-unité d'ordre 6.

On a donc

$$\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{C}}_2(A).\ C_2(A) = C_2(\widetilde{A}.\ A). \tag{6.32}$$

$\mathcal{G}$ est donc bien une matrice composée quadratique, et

$$g = \widetilde{A}.\ A. \tag{6.33}$$

Remarque. — Dans la classe L_M les valeurs caractéristiques des formes

$$g_{rs}(z, q)\, Z^r Z^s \tag{6.34}$$

et

$$\frac{1}{4}\, g_{rs,tu}\, X^{rs} X^{tu} \tag{6.35}$$

sont liées par des relations simples; si α_{rs} sont les valeurs caractéristiques de (6.34), les valeurs caractéristiques de (6.35) sont alors

$$\alpha_{rt \cdot rt} = \alpha_{rr}.\ \alpha_{tt}. \tag{6.36}$$

Ce sont les produits deux-à-deux des valeurs caractéristiques de (6.34). C'est là d'ailleurs une propriété générale des matrices composées.

Si donc les valeurs caractéristiques de (6.35) sont connues, on aura pour calculer celles de (6.34), la formule suivante :

$$(\alpha_{rr})^2 = \frac{\alpha_{rt,rt}\, \alpha_{ru,ru}}{\alpha_{tu,tu}}, \tag{6.37}$$

et si l'on veut que (6.34) soit, comme (6.35), une forme définie positive, il suffira de prendre les racines positives de (6.37) pour déterminer (6.34). Moyennant une transformation orthogonale de $\mathcal{G}_K$, on pourra toujours réduire un complexe C_M à la forme diagonale; la forme (6.34) se déterminera alors à l'aide des formules (6.37).

§ 7. Lien avec le calcul des variations. — Transversalité.

A l'élément d'aire généralisé considéré en (3.1), nous pouvons associer l'intégrale double

$$I = \int_{D} L(z^r, q^{rs})\, du^1\, du^2. \tag{7.1}$$

Les intégrales de la forme (7.1) sont ce qu'on appelle des intégrales paramétriques ([18]). Les intégrales de cette classe ont une valeur indépendante du choix des paramètres. Cette indépendance apparaît mieux si l'on écrit, grâce à (3.17),

$$I = \int_{S_2} \frac{1}{2} L_{rs}(z, q)\,[dz^r\, dz^s] = \int_{S_2} \Omega. \tag{7.2}$$

Si, partant d'une variété S_2, on déforme infiniment peu cette variété en déplaçant ses éléments selon

$$\frac{\partial z^r}{Z^r} = \frac{\partial q^{rs}}{Z^{rs}} = \partial\tau, \tag{7.3}$$

la variation correspondante de I est donnée par ([19])

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} = \int_{S_2} E\, d\,\Omega + \oint_{S_1} E\Omega, \tag{7.4}$$

où S_1 désigne la courbe frontière de S_2 et E la substitution intégrale, conformément au système (7.3) :

$$E\,\Omega = Z^r \frac{\partial\,\Omega}{\partial(d\,z^r)}, \tag{7.5}$$

soit

$$E\,\Omega = (L_{rs} \,.\, Z^r)\,.\,d\,z^s. \tag{7.6}$$

Une direction Z^r est dite *transversale* à un élément (z, q), si elle annule la forme $E\Omega$, c'est-à-dire si ses composantes sont telles que

$$L_{rs}(z, q)\, Z^s = 0. \tag{7.7}$$

([18]) TH. DE DONDER (15), chap. IV.

([19]) TH. DE DONDER (15), § 7; TH. LEPAGE (26), § 4.

Le système (7.7) associé à Ω est de rang 2 par hypothèse; la solution générale de (7.6) pourra se mettre sous la forme

$$Z^r = \lambda_1 Z_1^r + \lambda_2 Z_2^r, \tag{7.8}$$

où

$$\begin{vmatrix} Z_1^r & Z_1^s \\ Z_2^r & Z_2^s \end{vmatrix} = L_{\overline{rs}}. \tag{7.9}$$

Les $L_{\overline{rs}}$ étant proportionnels aux n^{rs}, (7.8) définit donc un plan normal à l'élément (z, q); dans notre géométrie, *orthogonalité et transversalité se confondent*. Identifier la transversalité et l'orthogonalité conduit aux relations (3.20); nous avons vu qu'elles ne suffisent pas à déterminer la métrique.

CHAPITRE II

DÉTERMINATION D'UNE CONNEXION EUCLIDIENNE

§ 8. Définition de la connexion. — Différentielle absolue. Premières conventions sur la connexion.

Nous avons jusqu'ici étudié les propriétés du voisinage d'un élément. Nous avons vu que le voisinage d'un élément peut être regardé comme un espace euclidien à quatre dimensions. Nous allons maintenant chercher à raccorder entre eux les espaces euclidiens attachés à deux éléments voisins. Nous nous inspirerons à cette fin des recherches faites par E. Cartan dans le cas des espaces de Finsler et des espaces métriques fondés sur la notion d'aire. Nous utiliserons les méthodes que E. Cartan a appliquées à l'étude des espaces de Riemann [1].

Dans l'espace euclidien $E_4(z, q)$ associé à un élément (z, q) est définie la métrique euclidienne

$$(ds)^2 = g_{rs}(z, q)\, dz^r\, dz^s. \tag{8.1}$$

Nous allons rapporter l'espace $E_4(z, q)$ à un *repère naturel* [2]; nous entendons par là un système de 4 vecteurs $\vec{e}_r$ formant une

(1) E. Cartan (6, 7, 10).

(2) E. Cartan (10), § 32.

base pour les vecteurs de $E_4(z, q)$ et tel que le vecteur $\overrightarrow{dM}$ qui joint le point $M(z^r)$ à un point voisin $M'(z^r + dz^r)$ soit donné par

$$\overrightarrow{d\,M} = d\,z^r\, \vec{e}_r. \tag{8.2}$$

Nous aurons donc les conditions

$$\vec{e}_r \,.\, \vec{e}_s = g_{rs}, \tag{8.3}$$

qui expriment que le repère est adapté à la métrique (8.1). Nous désignerons par $R(z, q)$ le repère ainsi défini.

Cela étant, nous dirons avoir défini une connexion, dans notre variété d'éléments (z, q), si nous avons donné le moyen d'intégrer dans un même espace euclidien les espaces euclidiens attachés à deux éléments voisins. Si $R(z+dz,\ q+dq)$ est le repère naturel associé à un élément voisin, nous désignerons par $\vec{e'}_r = \vec{e}_r + d\vec{e}_r$ ses vecteurs de base.

Nous pourrons définir une connexion en nous donnant, d'une part, les coordonnées dans $R(z,q)$ de l'origine du repère voisin $R(z+dz,\ q+dq)$; il nous suffira pour cela de nous donner les formules (8.2), et, d'autre part, en nous donnant, toujours dans $R(z, q)$, les composants des vecteurs de base $\vec{e'}_r$. Ces composantes seront données par des formules de la forme

$$d\,\vec{e}_r = \omega_r^{\ s}\, \vec{e}_s, \tag{8.4}$$

où $\omega_r^{\ s}$ sont 16 formes linéaires en dz et dq :

$$\omega_s^{\ r} = \Gamma^s_{rt}\, d\,z^t + \frac{1}{2}\, C^s_{rtu}\, d\,q^{tu}. \tag{8.5}$$

Les formules (8.2) et (8.4), qui définissent une correspondance entre deux espaces euclidiens, définissent une transformation euclidienne. Nous dirons que la connexion que nous venons de définir est une *connexion euclidienne.*

Imaginons qu'à chaque élément (z, q) soit associé un vecteur de composantes contravariantes X^r. A deux éléments voisins seront associés deux vecteurs voisins X^r et X'^r et nous pourrons poser

$$X'^r = X^r + d\,X^r. \tag{8.6}$$

La variation géométrique du vecteur $\vec{X} = X^r \vec{e}_r$, quand on passe du repère $R(z, q)$ au repère voisin $R(z+dz, q+dq)$, est donnée par

$$\vec{dX} = d\,(X^r\,\vec{e}_r), \tag{8.7}$$

soit, grâce à (8.4),

$$\vec{dX} = (d\,X^r + X^s\,\omega_s{}^r)\,\vec{e}_r. \tag{8.8}$$

Par définition, les composantes par rapport au repère $R(z, q)$ de la variation géométrique du vecteur $\vec{X}$ sont les composantes de *la différentielle absolue* du vecteur $\vec{X}$:

$$D\,X^r = d\,X^r + X^s\,\omega_s{}^r. \tag{8.9}$$

Nous voyons, par les formules (8.9), que la donnée à priori de la différentielle absolue définit également la connexion. On peut regarder les formules (8.9) comme donnant dans $E(z, q)$ les composantes d'un vecteur $X^r + dX^r$ de l'espace $E(z+dz, q+dq)$.

Dans le cas où $DX^r = 0$, le vecteur $X^r + dX^r$ est dit *parallèle* au vecteur X^r; on dit aussi que le vecteur $X^r + dX^r$ se déduit du vecteur X^r par *transport parallèle*.

La connexion est définie par les fonctions $\Gamma^r{}_{st}$ et $C^r{}_{stu}$. Ces fonctions ne sont pas quelconques. En effet, il résulte de (8.3) et (8.4) que l'on a

$$g_{st}\,\omega_r{}^t + g_{rt}\,\omega_s{}^t = d\,g_{rs}, \tag{8.10}$$

soit en développant, grâce à (8.5),

$$dg_{rs} - (g_{st}\,\Gamma^t_{ru} + g_{rt}\,\Gamma^t_{su})\,dz^u - \frac{1}{2}\,(g_{st}\,C^t_{ruv} + g_{rt}\,C^t_{suv})\,d\,q^{uv} = 0. \tag{8.11}$$

Les conditions (8.10) expriment que la longueur d'un vecteur se conserve par déplacement parallèle.

De (8.11) nous déduisons tout d'abord

$$\boxed{\frac{\partial g_{rs}}{\partial z^t} = \Gamma_{rst} + \Gamma_{srt}}. \tag{8.12}$$

Dans (8.12) nous abaissons les indices grâce à la forme fondamentale (8.1); nous ferons cette opération souvent par la suite sans la souligner; il s'agit simplement de l'application des règles connues du calcul tensoriel classique.

Nous déduisons, d'autre part, de (8.10)

$$\left[\frac{\partial g_{rs}}{\partial p^{tu}} - (C_{rstu} + C_{srtu})\right] dq^{tu} = 0. \tag{8.13}$$

Il est entendu que dans la dérivation des fonctions par rapport à p^{rs} sur la surface K, il convient de prendre les précautions que nous avons détaillées plus haut. En particulier de (8.13), nous ne pouvons conclure à la nullité des coefficients des dq^{rs}. Nous ferons alors les conventions suivantes :

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial p^{uv}} \cdot n^{uv} = 0. \tag{8.14}$$

$$(C_{rstu} + C_{srtu})\, n^{tu} = 0. \tag{8.15}$$

Ces conventions ne restreignent en rien la généralité; elles reviennent à choisir des dérivées particulières des fonctions g_{rs} sur K. Moyennant ces conditions, nous pourrons écrire

$$\boxed{\frac{\partial g_{rs}}{\partial p^{tu}} = C_{rstu} + C_{srtu}}. \tag{8.16}$$

Les conditions (8.12) et (8.16) ne suffisent pas à elles seules pour déterminer la connexion. Il convient d'en faire de nouvelles.

La différentielle absolue d'un vecteur X^r d'origine fixe est donnée par

$$D\,X^r = d\,X^r + \frac{1}{2} X^s C^r_{stu}\, dq^{tu}. \tag{8.17}$$

En particulier, si le vecteur X^r est de composantes contravariantes fixes

$$D\,X^r = \frac{1}{2} X^s C^r_{stu}\, d\,q^{tu} = \frac{1}{2} X_s C^{sr}{}_{tu}\, d\,q^{tu}, \tag{8.18}$$

le produit scalaire de DX^r par un vecteur Y_r sera

$$\frac{1}{2} Y_r X_s C^{rs}_{tu}\, d\,q^{tu}. \tag{8.19}$$

Nous conviendrons que ce produit est symétrique par rapport aux vecteurs $\overleftarrow{X}$ et $\overleftarrow{Y}$, c'est-à-dire

$$\boxed{C^{rs}_{tu} = C^{sr}_{tu}}. \tag{8.20}$$

Moyennant les conditions (8.16) et (8.20) les coefficients $C_{rs,\,tu}$ sont déterminés; on a

$$\boxed{C_{rs\,tu} = \frac{1}{2}\frac{\partial\, g_{rs}}{\partial\, p^{tu}}}. \tag{8.21}$$

§ 9. Nouvelle forme de la différentielle absolue. Remarque sur la définition du tenseur $g_{rs,tu}$.

Calculons tout d'abord la différentielle absolue du bivecteur unitaire tangent.

On a

$$\left.\begin{aligned} D\, l^{rs} &= d\, l^{rs} + (l^{ts}\,\Gamma^{r}_{tu} + l^{rt}\,\Gamma^{s}_{tu})\, dz^{u} \\ &\quad + \frac{1}{2}(l^{ts}\,C^{r}_{tuv} + l^{rt}\,C^{s}_{tuv})\, dq^{uv}. \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

Posons

$$L\, C_{rstu} = A_{rstu}. \tag{9.2}$$

Grâce à l'homogénéité de $g_{rs,\,tu}$, on a

$$C_{rstu}\, l^{tu} = 0. \tag{9.3}$$

Rappelons aussi la convention (8.14); elle peut s'écrire

$$C_{rstu} \cdot n^{tu} = 0. \tag{9.3)'$$

Il résulte de (9.3) que (9.1) peut se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} D\, l^{rs} &= d\, l^{rs} + (l^{ts}\,\Gamma^{r}_{tu} + l^{rt}\,\Gamma^{s}_{tu})\, dz^{u} \\ &\quad + \frac{1}{2}(l^{ts}\,A^{r}_{tuv} + l^{rt}\,A^{s}_{tuv})\, d\, l^{uv}. \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Si parallèlement à (9.2) nous posons

$$A_{rstuvw} = \frac{L}{2}\frac{\partial\, g_{rs.\,tu}}{\partial p^{vw}}, \tag{9.5}$$

nous aurons, grâce à (5.6),

$$A_{rstuvw} = g_{su}\, A_{rtvw} + g_{rt}\, A_{suvw} - g_{ru}\, A_{stvw} - g_{st}\, A_{ruvw}. \tag{9.6}$$

On a donc

$$l^{ts}\, A^{r}_{tuv} + l^{rt}\, A^{s}_{tuv} = \frac{1}{2}\, l^{pq}\, A_{pqrsuv}. \tag{9.6)'$$

Or

$$\frac{1}{2}\, l^{pq}\, A_{pqrsuv} = 0, \tag{9.7}$$

en vertu de l'homogénéité des fonctions $g_{rs,\,tu}$.

(9.4) s'écrit donc simplement

$$\mathrm{D}\, l^{rs} = d\, l^{rs} + (l^{rt}\, \Gamma^{s}_{tu} + l^{ts}\, \Gamma^{r}_{tu})\, d z^{u}. \tag{9.8}$$

Si nous portons alors les valeurs des dl^{rs} tirées de (9.8) dans l'expression de la différentielle absolue d'un vecteur X^r, il vient

$$\mathrm{D}\, \mathrm{X}^{r} = d\mathrm{X}^{r} + \mathrm{X}^{s}\, \Gamma^{*r}_{su}\, d z^{u} + \frac{1}{2}\, \mathrm{X}^{s}\, \mathrm{A}^{\;r}_{s\,tu}\, \mathrm{D}\, l^{tu}, \tag{9.9}$$

où

$$\Gamma^{*r}_{sw} = \Gamma^{r}_{sw} - \frac{1}{2}\, \mathrm{A}^{\;r}_{s\,tu}\, (l^{vu}\, \Gamma^{t}_{vw} + l^{tv}\, \Gamma^{u}_{vw}). \tag{9.10}$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle expression de la différentielle absolue qui nous sera très utile.

Les tenseurs introduits en (9.2) et (9.5) jouissent des propriétés suivantes :

$$\begin{gathered}
\mathrm{A}_{rstu} = \mathrm{A}_{srtu} = -\, \mathrm{A}_{rsut} \\
\mathrm{A}_{rstuvw} = \mathrm{A}_{turswv} = -\, \mathrm{A}_{srtuvw} = -\, \mathrm{A}_{rsutvw} = -\, \mathrm{A}_{rstuwv} \\
\mathrm{A}_{rstuvw}\, l^{vw} = \mathrm{A}_{rstuvw}\, n^{vw} = \mathrm{A}_{rstu}\, l^{tu} = \mathrm{A}_{rstu}\, n^{tu} = 0.
\end{gathered} \tag{9.11}$$

Il existe un troisième tenseur du même type; il est défini par

$$\mathrm{A}_{rs} = \frac{\mathrm{L}}{\sqrt{g}}\, \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial p^{rs}}. \tag{9.12}$$

On a

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{A}_{rs} &= -\, \mathrm{A}_{sr}, \\
\mathrm{A}_{rs}\, l^{rs} &= \mathrm{A}_{rs}\, n^{rs} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

Indiquons quelques identités qui lient ces différents tenseurs entre eux. Outre (9.6)′, on a

$$n_{r}^{\;t}\, \mathrm{A}_{tsuv} + n^{t}_{\;s}\, \mathrm{A}_{truv} = \frac{1}{2}\, \mathrm{A}_{pqrsuv}\, n^{pq} = n_{rs}\, \mathrm{A}_{uv}. \tag{9.14}$$

Calculons enfin la différentielle absolue du bivecteur unitaire normal n^{rs} :

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{D} n^{rs} = d n^{rs} &+ (n^{rt}\, \Gamma^{*s}_{tu} + n^{ts}\, \Gamma^{*r}_{tu})\, d z^{u} \\
&+ \frac{1}{2}\, (n^{rt}\, \mathrm{A}^{s}_{\;tuv} + n^{ts}\, \mathrm{A}^{r}_{\;tuv})\, \mathrm{D}\, l^{uv},
\end{aligned}\right\} \tag{9.15}$$

soit, grâce à (9.14),

$$\mathrm{D} n^{rs} = d n^{rs} + (n^{rt}\, \Gamma^{*s}_{tu} + n^{ts}\, \Gamma^{*r}_{tu})\, d z^{u} + \frac{1}{2}\, (\mathrm{A}_{uv}\, \mathrm{D}\, l^{uv})\, n^{rs}. \tag{9.16}$$

Donnons enfin une propriété importante du tenseur A_{rs}.

L'élément de volume est donné par

$$\Phi = \sqrt{g}\,[dz^1\, dz^2\, dz^3\, dz^4]. \qquad (9.17)$$

Calculons la variation qu'il subit pour une variation de l'élément support :

$$d\,\Phi = \frac{1}{2}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial p^{rs}}\,[dq^{rs} . dz^1\, dz^2\, dz^3\, dz^4], \qquad (9.18)$$

soit, grâce à (9.12) et (9.8),

$$d\,\Phi = \left[\left(\frac{1}{2}\,A_{rs}\,D\,l^{rs}\right) . \Phi\right]. \qquad (9.19)$$

On peut écrire encore que si le centre (z) de l'élément ne varie pas,

$$\frac{1}{2}\frac{dg}{g} = \frac{1}{2}\,A_{rs}\,Dl^{rs}. \qquad (9.20)$$

La forme $\frac{1}{2} A_{rs} Dl^{rs}$ mesure donc la dilatation correspondant à une variation du bivecteur support autour de son centre. Si le tenseur A_{rs} est nul, l'élément de volume ne dépend que du point. C'est un invariant ponctuel associé à l'élément d'aire.

*
* *

Remarque sur la définition du tenseur $C_{rs,\,tu}$ (³).

Nous avons en (3.20) donné une première condition géométrique

$$\frac{1}{2}\,g_{rs,tu}\,q^{tu} = LL_{rs}, \qquad (9.21)$$

à vérifier par le tenseur $g_{rs,\,tu}$.

Nous avons trouvé en (3.28) une solution de ces relations.

Quelles sont les conditions à ajouter aux conditions (9.21) pour trouver (3.28) ?

Si nous dérivons (9.21), avec la convention

$$\frac{\partial g_{rs,tu}}{\partial p^{vw}}\,n^{vw} = 0,$$

(³) E. CARTAN (6), nº 10.

il vient

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{rs,tu}}{\partial p^{vw}}\cdot q^{tu}+g_{rs,vw}=\frac{\partial^2\,\frac{1}{2}\,\mathrm{L}^2}{\partial p^{rs}\,\partial p^{vw}}\qquad(\mathrm{mod.\,K});\qquad(9.22)$$

les conditions cherchées s'écriront donc sur K :

$$\frac{\partial g_{rs,tu}}{\partial p^{vw}}\,q^{tu}=0.\qquad(9.23)$$

Ces conditions peuvent s'interpréter géométriquement.

Supposant le tenseur $g_{rs,tu}$ connu et vérifiant (9.21) et (5.6), nous pouvons définir une différentielle absolue, comme nous venons de le faire. La différentielle absolue du bivecteur unitaire normal n^{rs}, lorsque le centre z de son élément d'appui ne varie pas et que ses composantes contravariantes sont fixes, est alors donnée par (9.15) :

$$\mathrm{D}n^{rs}=n^{rs}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{uv}\,\mathrm{D}l^{uv}\right).\qquad(9.24)$$

D'autre part, grâce à (9.18), la variation de $\sqrt{g}$ est, dans les mêmes conditions que ci-dessus, donnée par

$$\frac{1}{2}\,\frac{dg}{g}=\frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{uv}\,\mathrm{D}l^{uv}.\qquad(9.25)$$

Si les conditions (9.23) sont remplies, la différentielle absolue du bivecteur normal à l'élément $(z,\,q)$ de composantes contravariantes fixes, lorsque son support tourne autour de son centre, est égale à ce bivecteur multiplié par $\dfrac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}}$. On peut vérifier inversement que la condition géométrique que nous venons d'énoncer est équivalente à (9.23).

En conclusion, *la seule considération de ce qui se passe au voisinage d'un élément ne suffit pas à déterminer la métrique bivectorielle. Il faut tenir compte des propriétés associées à un couple d'éléments voisins, soit par la considération de la différentielle absolue, soit, comme nous l'avons fait au paragraphe 3, par la considération de la forme* $\mathrm{d}\Omega$.

§ 10. La torsion. — Nouvelles conventions sur la connexion.

Les formules (8.2) et (8.4) nous permettent d'intégrer dans un même espace euclidien les espaces euclidiens associés à deux éléments voisins. Elles permettent aussi d'intégrer dans un même espace euclidien les espaces euclidiens attachés à deux éléments quelconques. Pour ce faire, (z_0, q_0) et (z_1, q_1) étant deux éléments quelconques, joignons ces deux éléments par une suite continue à 1 dimension d'éléments. Cette suite sera définie par les fonctions d'une variable t :

$$z^r = z^r(t), \qquad q^{rs} = q^{rs}(t), \tag{10.1}$$

telles que

$$\left.\begin{aligned} z_0^r &= z^r(t_0), \qquad q_0^{rs} = q^{rs}(t_0), \\ z_0^r &= z^r(t_1), \qquad q_1^{rs} = q^{rs}(t_1). \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

Nous appellerons bande d'éléments de contact ou, plus simplement, bande et nous désignerons par B la suite définie par (10.1). Nous pourrons alors, grâce à B, développer dans l'espace euclidien tangent en (z_0, q_0), la suite continue d'espaces euclidiens associés aux éléments de B. Si à chaque élément (z, q) est associé le repère naturel R (z, q) formé de l'origine M(z) et de 4 vecteurs $\vec{e}_r$, le développement se fera en intégrant les équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{\mathrm{M}}}{dt} &= \dot{z}^r \vec{e}_r, \\ \frac{d\vec{e}_r}{dt} &= (\Gamma^s_{rt}\, \dot{z}^t + \frac{1}{2}\, \mathrm{C}^s_{rtu}\, \dot{q}^{tu})\, \vec{e}_s, \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

où

$$\dot{z}^r = \frac{dz^r}{dt}, \quad \dot{q}^{rs} = \frac{dq^{rs}}{dt}, \tag{10.4}$$

avec les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}\,(t)_0 &= \mathrm{Z}_0^r\, \vec{e}_r, \\ (\vec{e}_r)_0 &= \vec{e}_{r0}. \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

L'intégration de (10.3) associera donc, dans l'espace euclidien E(z_0, q_0), à la bande B une suite continue de repères euclidiens. A l'élément z_1, q_1 correspondra dans E(z_0, q_0) un point P_1 et un 4-èdre T_4 de centre P_1 bien déterminés [4]. L'intégration de (10.3) revient à déplacer par parallélisme, le long de B, le repère initial R (z_0, q_0). L'image dans l'espace $E(z_0, q_0)$ du repère final $R(z_1, q_1)$ sera précisément le point P_1 et le 4-èdre T_4.

En général le résultat de l'intégration, concrétisé par (P_1, T_4), dépendra de la bande choisie. A une bande B^1 joignant les éléments (z_0, q_0) et (z_1, q_1), distincte de B, correspondront un autre point P'_1 et un autre 4-èdre T'_4. En particulier, si l'on considère une bande C formant *cycle orienté*, c'est-à-dire partant de (z_0, q_0), pour revenir à (z_0, q_0), l'image de ce cycle dans l'espace euclidien $E(z_0, q_0)$ sera une suite continue de repères non fermée et le 4-èdre T_4, associé au point final P, ne sera pas équipollent au repère initial $R(z_0, q_0)$. Il existera, associé au cycle C, un déplacement euclidien : le déplacement qui amène $R(z_0, q_0)$ à coïncider avec (P, T_4).

Nous allons faire le calcul du déplacement associé à un cycle infinitésimal. Il suffit pour cela de transposer pour notre objet le calcul correspondant effectué par E. Cartan [5].

Dans l'espace des éléments (z, q), nous définirons un cycle de la manière suivante : d et δ, désignant deux symboles de différentiation permutables, nous considérerons 4 éléments voisins :

Tout d'abord les 3 éléments

$$e_0 : (z, q), \quad e_1 : (z + dz, q + dq), \quad e_2 : (z + \delta z, q + \delta q); \tag{10.6}$$

enfin un élément e_3 obtenu à partir de l'élément e_2 par la variation δ :

$$e_3 : (z + dz + \delta z + \delta dz, \quad q + dq + \delta q + \delta dq). \tag{10.7}$$

e_3 est identique par hypothèse à l'élément qu'on obtiendra à partir de e_3 par la différentiation d. e_0, e_1, e_2, e_3 est le cycle élémentaire que nous allons développer.

Dans le repère $R(e_0)$ associé à e_0, à l'élément e_1 correspondra le point $M_1 : (z + dz)$ tel que

$$\overrightarrow{M\,M_1} = \overrightarrow{dM} = dz^r \, \vec{e}_r, \tag{10.8}$$

---

(4) Nous supposerons qu'il y a unicité dans l'intégration de (10.3).

(5) E. Cartan (10), n^{os} 159, 160.

et le 4-èdre $T(\vec{e}_r + d\vec{e}_r)$, équipollent au 4-èdre attaché à e_0, et tel que

$$d\,\vec{e}_r = \omega_r{}^s(d)\,\vec{e}_s. \tag{10.9}$$

A l'élément e_2 correspondra semblablement le point $M_2 : (z+\delta z)$:

$$\overrightarrow{\delta M} = \delta z^r\,\vec{e}_r, \tag{10.10}$$

et le 4-èdre $T_2(\vec{e}_r + \delta\vec{e}_r)$:

$$\delta\,\vec{e}_r = \omega_r{}^s(\delta)\,\vec{e}_s. \tag{10.11}$$

Pour développer (e_0, e_1, e_2) partant de $(z+dz)$ et du 4-èdre T_1, nous aurons à appliquer l'opération δ. Cette opération, définie en (10.10) et (10.11) par rapport à l'élément e_0, est à rapporter à e_1, c'est-à-dire qu'elle s'obtiendra en remplaçant z^r par $z^r + dz^r$ et q^r par $q^r + dq^r$, c'est-à-dire en déplaçant par parallélisme de e_0 en e_1 l'élément e_2, nous obtenons ainsi le point M_3 de coordonnée

$$M_3 = M + \delta M + d\,(M + \delta M)$$

et le 4-èdre T_3 :

$$(\vec{e}_r)_3 = \vec{e}_r + \delta\,\vec{e}_r + d\,(\vec{e}_r + \delta\,\vec{e}_r).$$

Semblablement le développement du contour (e_0, e_2, e_3) donnera le point M'_3 et le 4-èdre T'_3 définis par

$$M'_3 = M + d\,M + \delta\,(M + d\,M),$$
$$(\vec{e}_r)'_3 = \vec{e}_r + d\,\vec{e}_r + \delta\,(\vec{e}_r + d\,\vec{e}_r).$$

M'_3, T'_3 et M_3, T_3 sont en général distincts; ils définissent un déplacement associé au cycle; ce déplacement se compose d'une translation

$$\overrightarrow{\nabla M_3} = M'_3 - M_3 = \delta\,\overrightarrow{d M} - d\,\overrightarrow{\delta M}$$

et d'une rotation définie par

$$\nabla\,(\vec{e}_r)_3 = (\vec{e}_r)'_3 - (\vec{e}_r)_3 = \delta\,d\,\vec{e}_r - d\,\delta\,\vec{e}_r.$$

Grâce aux formules (10.9) à (10.11), on a

$$\left.\begin{aligned} \delta\,\overrightarrow{dM} - d\,\overrightarrow{\delta M} &= (dz^s\,\omega_s{}^r(\delta) - \delta z^s\,\omega_s{}^r(d))\,\vec{e}_r, \\ \delta d\,\vec{e}_r - d\,\delta\,\vec{e}_r &= (\delta\,\omega_r{}^s(d) - d\,\omega_r{}^s(\delta) - \omega_r{}^t(d)\,\omega_t{}^s(\delta) \\ &\qquad + \omega_r{}^t(\delta)\,\omega_t{}^s(d))\,\vec{e}_s, \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

soit encore, en notation de formes extérieures,

$$\left.\begin{aligned} \delta\, d\overrightarrow{M} - d\,\delta\overrightarrow{M} &= [d z^s\, \omega_s{}^r]\, \overrightarrow{e_r}, \\ \delta\, d\,\overrightarrow{e_r} - d\,\delta\,\overrightarrow{e_r} &= (d\,\omega_r{}^s - [\omega_r{}^t\, \omega_t{}^s])\, \overrightarrow{e_s}. \end{aligned}\right\} \quad (10.13)$$

Nous poserons

$$\Omega^r = [d z^s\, \omega_s^r]. \qquad (10.14)$$

$$\Omega_r{}^s = d\omega_r{}^s - [\omega_r{}^t\, \omega_t{}^s]. \qquad (10.15)$$

Par définition le vecteur $\Omega^r \overrightarrow{e_r}$ est le vecteur de *torsion* associé au cycle considéré; quant à $\Omega_r{}^s$, ce sont les composantes mixtes du bivecteur de rotation ou de *courbure* associé au cycle considéré; (10.14) et (10.15) sont *les équations de structure de la variété*.

Ce sont les équations de structure d'un espace d'éléments point-bivecteur ou d'éléments de contact bidimensionnels, non holonome et à connexion euclidienne. Dans le cas où courbure et torsion sont nulles, la variété n'est autre que l'espace euclidien à quatre dimensions. (10.14) et (10.15) sont alors les équations de structure de l'espace euclidien quand on prend l'élément point-bivecteur comme élément générateur; cet espace est identique à l'espace ponctuel euclidien à quatre dimensions. Il suffit pour s'en assurer d'associer à chaque ensemble point-bivecteur de l'espace euclidien un repère orthogonal dont deux vecteurs de base sont pris dans le plan du bivecteur, les deux autres étant pris normaux au plan du bivecteur.

Si nous nous reportons à (8.5) et (9.9), nous aurons

$$\Omega^r = \frac{1}{2}\, A^r_{spq}\, [d z^s\, D l^{pq}] + \frac{1}{2}\, \mathfrak{G}^r_{st}\, [d z^s\, d z^t], \qquad (10.16)$$

où

$$\mathfrak{G}^r_{st} = \Gamma^{*r}_{st} - \Gamma^{*r}_{ts}. \qquad (10.17)$$

Si en particulier nous considérons un cycle formé d'éléments de centres voisins et dont les bivecteurs sont parallèles entre eux, la torsion correspondante est donnée par

$$\Omega^r_* = \frac{1}{2}\, \mathfrak{G}^r_{st}\, [d z^s\, d z^t]. \qquad (10.18)$$

Les produits alternés $[dz^s\, dz^t]$ sont les composantes d'un bivecteur qui définit le bi-plan du cycle.

Si nous nous limitons aux espaces pour lesquels cette torsion est nulle, c'est-à-dire tels que

$$\Gamma^{*r}_{st} = \Gamma^{*r}_{ts}, \tag{10.19}$$

nous introduisons en (10.19) un nombre de conditions qui suffit en général, avec les conditions (8.12), à déterminer la connexion. Les fonctions inconnues Γ^{r}_{st} sont au nombre de 4^3, les conditions (8.12) au nombre de $4 \times \dfrac{4\times5}{2}$, les conditions (10.19) au nombre de $4 \times \dfrac{4\times3}{2}$, soit au total 4^3.

Nous verrons que les conditions (10.19) permettent effectivement la détermination de la connexion moyennant une condition supplémentaire, la condition de régularité; nous obtiendrons ainsi les espaces que nous qualifierons de *réguliers*.

Nous montrerons également que sans préjuger de la condition (10.19), il est toujours possible d'imposer à la torsion (10.18) les conditions suivantes :

1° La torsion (10.18) est nulle si la facette $[dz^r\, dz^s]$ est située dans l'élément support, ou perpendiculairement à celui-ci, c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}^r_{st}\, l^{st} = \mathfrak{T}^r_{st}\, n^{st} = 0\,; \tag{10.20}$$

2° Le vecteur de torsion $\vec{\Omega}_*$ est perpendiculaire à l'élément support pour toute autre orientation du cycle, c'est-à-dire

$$l_{ru}\, \mathfrak{T}^u_{st} = 0. \tag{10.21}$$

La classe des connexions ainsi définie sera appelée la classe des *connexions semi-intrinsèques.*

§ 11. Quelques propriétés de la connexion. — Espaces de Riemann. Remarques sur la classe des connexions semi-intrinsèques.

Les formules que nous avons établies au paragraphe 2 dans le cas des espaces de Riemann nous ont déjà été très utiles; nous allons, dans une connexion semi-intrinsèque quelconque, les comparer à nouveau aux formules correspondantes relatives à une variété de la classe L_M.

Revenons à la forme

$$\Omega = \frac{1}{2} l_{rs} [dz^r dz^s] \tag{11.1}$$

associée à l'élément d'aire.

Nous avons

$$\mathrm{D} l_{rs} = d l_{rs} - l_{rt} \omega_s{}^t - l_{ts} \omega_r{}^t. \tag{11.2}$$

Nous pouvons écrire

$$d\Omega = \frac{1}{2} [\mathrm{D} l_{rs} \, dz^r dz^s] - l_{rs} [dz^s \Omega^r]. \tag{11.3}$$

Grâce à (10.16) et (10.20),

$$\left. \begin{aligned} l_{rs} [dz^s \Omega^r] &= \frac{1}{2} l_{rs} \mathrm{A}^r_{tuv} [dz^s dz^t \mathrm{D} l^{uv}] \\ &= \frac{1}{4} (l_{rs} \mathrm{A}^r_{tuv} - l_{rt} \mathrm{A}^r_{suv}) [dz^s dz^t \mathrm{D} l^{uv}], \end{aligned} \right\} \tag{11.4}$$

soit, grâce à (9.6)' et (9.7),

$$l_{rs} [dz^s \Omega^r] = 0. \tag{11.5}$$

Nous aurons donc simplement

$$\boxed{d\Omega = \frac{1}{2} [\mathrm{D} l_{rs} \, dz^r dz^s] = \frac{1}{4} g_{rs,tu} [\mathrm{D} l^{tu} dz^r dz^s]}. \tag{11.6}$$

La seconde égalité (11.6) résulte de (8.10); (8.10) est équivalente à

$$\mathrm{D} g_{rs} = 0; \tag{11.7}$$

d'où résulte

$$\mathrm{D} g_{rs,tu} = 0. \tag{11.8}$$

Nous retrouvons donc dans une connexion semi-intrinsèque quelconque une formule identique de forme à celle que nous avons donnée dans le cas d'une variété de Riemann.

Nous avons également la propriété remarquable

$$\mathrm{D} l_{rs} \,.\, l^{rs} = 0. \tag{11.9}$$

Elle résulte simplement de (4.17).

Venons-en maintenant à la forme ϖ. Semblablement à (11.3), nous avons

$$d\varpi = \frac{1}{2} [\mathrm{D} n_{rs} \, dz^r dz^s] - n_{rs} [dz^s \Omega^r]. \tag{11.10}$$

Pour calculer le second groupe de termes de (11.10), observons que, d'une part, grâce à (9.14) et (10.16), nous avons

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\, n_{rs}\, A^r_{tuv}[dz^s\, dz^t\, Dl^{uv}] &= \frac{1}{4}\,(n_{rs}\, A^r_{tuv} - n_{rt}\, A^r_{suv})\,[dz^s\, dz^t\, Dl^{uv}] \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{2}\, A_{rs}\, Dl^{rs}\right).\, \varpi\right].\end{aligned}\right\} \quad (11.11)$$

D'autre part, la forme

$$\eta = \frac{1}{2}\, n_{rs}\, \mathcal{T}^r_{tu}\,[dz^s\, dz^t\, dz^u] \qquad (11.12)$$

peut s'écrire

$$\eta = -\frac{1}{2}\left[(\sigma_s\, dz^s)\, \varpi\right], \qquad (11.13)$$

où σ_s sont les composantes d'un vecteur situé dans l'élément tangent :

$$n^{rs}\, \sigma_s = 0. \qquad (11.14)$$

Nous avons en effet pour déterminer σ_s les conditions

$$-(n_{rs}\, \mathcal{T}^r_{tu} + n_{rt}\, \mathcal{T}^r_{us} + n_{ru}\, \mathcal{T}^r_{st}) = \sigma_s\, n_{tu} + \sigma_t\, n_{us} + \sigma_u\, n_{st}. \quad (11.15)$$

Si nous multiplions les équations (11.15) par $\frac{1}{2} n^{tu}$ et si nous sommons, il vient, grâce à (10.20) et (11.14),

$$n^{tu}\, n_{rt}\, \mathcal{T}^r_{us} = \sigma_s. \qquad (11.16)$$

La solution ainsi obtenue vérifie bien (11.14); en effet,

$$-n^{ps}\, \sigma_s = n^{tu}\, n_{rt}\, \mathcal{T}^r_{us}\, n^{ps} = \frac{1}{2}\, n_{rt}\, \mathcal{T}^r_{us}\,(n^{tu}\, n^{ps} - n^{ts}\, n^{pu}); \qquad (11.17)$$

or

$$n^{tu}\, n^{ps} - n^{ts}\, n^{pu} = n^{us}\, n^{tp}, \qquad (11.18)$$

puisque n^{tu} sont les composantes d'un bivecteur; (11.14) en résulte grâce à (10.20).

Réunissant (11.11) et (11.13), il vient, dans une connexion semi-intrinsèque quelconque,

$$d\,\varpi = \frac{1}{2}\,[Dn_{rs}\, dz^r\, dz^s] + \left[\left(\frac{1}{2}\, A_{rs}\, Dl^{rs} + \sigma_t\, dz^t\right)\varpi\right]. \quad (11.19)$$

Nous avons donc encore

$$d\,\varpi = \frac{1}{2}\,[Dl^{rs}\sqrt{g}\; d\,\sigma_{rs}] + \left[\left(\frac{1}{2}\, A_{rs}\, Dl^{rs} + \sigma_t\, dz^t\right)\varpi\right]. \quad (11.20)$$

Nous voyons donc que la forme de $d\varpi$ n'est plus la même que dans le cas de Riemann; elle diffère à la fois par la présence du tenseur A_{rs} et du vecteur σ_t. Nous montrerons plus loin que dans le cas des espaces à tenseur A_{rs} nul, la forme de $d\varpi$ est encore semblable à la forme riemannienne, c'est-à-dire qu'on peut toujours annuler le vecteur σ_s.

*
* *

A quelles conditions la variété d'éléments que nous avons définie est-elle un espace de Riemann ?

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations de structure (10.14) et (10.15) puissent être regardées comme celles d'un espace de Riemann sont

$$A_{rstu} = 0. \tag{11.21}$$

En effet, si les conditions (11.21) sont remplies, la métrique g_{rs} considérée en (8.3) ne dépend que du point; les espaces euclidiens associés à tous les bivecteurs q^{rs} issus d'un point sont identiques. Nous pouvons alors annuler la torsion en faisant

$$\Gamma_{rst} = \Gamma_{tsr} \tag{11.22}$$

et nous retrouvons alors en (10.14) et (10.25) les équations de structure d'une variété ponctuelle à connexion euclidienne sans torsion, c'est-à-dire précisément d'une variété de Riemann. Les conditions nécessaires sont immédiates.

Dans un espace de Riemann, l'élément linéaire permet de définir une aire bi- ou tridimensionnelle. Le résultat de M. Cartan [6] et le résultat actuel montrent que la donnée à priori de l'aire tri- ou bidimensionnelle permet de reconstruire l'espace de Riemann, donc l'élément linéaire dont on était parti. Mais il y a plus : on peut dire aussi que la donnée à priori de la distance élémentaire ou de l'aire bidimensionnelle élémentaire, pour autant qu'elle appartienne à la classe L_M, ou de l'aire tridimensionnelle élémentaire sous forme de la racine carrée positive d'une forme quadratique définie positive en les composantes de la distance ou de l'aire bi- ou tridimensionnelle à coefficients fonctions du point, permet de définir un même espace ponctuel : l'espace de Riemann.

[6] E. CARTAN (6), n° 14.

Pour terminer, étudions de plus près quelques propriétés des connexions semi-intrinsèques. Pour cela portons notre attention sur le vecteur de torsion $\vec{\Omega}_*$ introduit en (10.18). En un élément (z, q), ce vecteur est associé à une facette bidimensionnelle dans laquelle se trouve le cycle élémentaire qui sert à calculer $\vec{\Omega}_*$.

Nous supposerons la facette définie par un bivecteur unitaire

$$\mathrm{X}^{rs} = \mathrm{X}^r\,\mathrm{Y}^s - \mathrm{X}^s\,\mathrm{Y}^r, \tag{11.23}$$

où $\vec{\mathrm{X}}$ et $\vec{\mathrm{Y}}$ sont supposés être deux vecteurs unitaires.

Si $\vec{\mathrm{X}}$ est un vecteur quelconque du biplan tangent et $\vec{\mathrm{Y}}$ un vecteur quelconque du biplan normal, X^{rs} définit une facette quelconque distincte du biplan tangent et du biplan normal.

Par hypothèse, le vecteur $\vec{\Omega}_*$ correspondant

$$\vec{\Omega}_* = \frac{1}{2}\,\mathfrak{S}^r_{st}\,\mathrm{X}^{st}\,\vec{e}_r = \mathfrak{S}^r_{st}\,\mathrm{X}^s\,\mathrm{Y}^t\,\vec{e}_r \tag{11.24}$$

est situé dans le biplan normal. Si nous supposons le vecteur $\vec{\mathrm{X}}$ fixe, nous pourrons faire varier le vecteur $\vec{\mathrm{Y}}$ dans le biplan normal. L'extrémité du vecteur $\vec{\mathrm{Y}}$ décrira la circonférence

$$g_{rs}\,\mathrm{Y}^r\,\mathrm{Y}^s = 1. \tag{11.25}$$

L'extrémité du vecteur $\vec{\Omega}_*$ correspondant décrira une courbe du biplan normal, on a

$$\Omega^r_* = (\mathfrak{S}^r_{st}\,\mathrm{X}^s)\cdot\mathrm{Y}^t. \tag{11.26}$$

L'extrémité du vecteur $\vec{\Omega}_*$ décrit donc une courbe transformée de la circonférence (11.25) par la transformation linéaire (11.26), c'est-à-dire une conique.

Nous appellerons cette conique *l'indicatrice* $\mathfrak{J}\,(\vec{\mathrm{X}})$ *de la torsion* $\vec{\Omega}_*$ *pour la direction* $\vec{\mathrm{X}}$. Lorsque X varie, nous obtenons dans le biplan normal une famille de coniques indicatrices.

Nous pouvons simplifier beaucoup les formules en changeant de repère. Nous remplacerons le repère naturel $\mathrm{R}(z, q)$ par un autre formé de quatre vecteurs de centre z, orthogonaux deux à deux, et tel, par exemple, que $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sous-tendent l'élément tangent l^{rs} et $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ l'élément normal n^{rs}. Dans ce nouveau système nous pourrons encore supposer $\vec{e}_1$ dirigé suivant $\vec{X}$. Nous aurons donc

$$\left.\begin{aligned} \vec{X} &= \vec{e}_1, \\ \vec{Y} &= Y_3 \vec{e}_3 + Y_4 \vec{e}_4. \end{aligned}\right\} \tag{11.27}$$

(11.24) sera alors donnée simplement par

$$\vec{\Omega}_* = (\mathfrak{T}^3_{13}\, Y^3 + \mathfrak{T}^3_{14}\, Y^4)\, \vec{e}_3 + (\mathfrak{T}^4_{13}\, Y^3 + \mathfrak{T}^4_{14}\, Y^4)\, \vec{e}_4. \tag{11.28}$$

Le vecteur $\vec{\sigma}$ sera donné par

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}^3_{3j} + \mathfrak{T}^4_{4j} &= \sigma_j \qquad & j &= 1, 2, \\ 0 &= \sigma_\alpha \qquad & \alpha &= 3, 4. \end{aligned}\right\} \tag{11.29}$$

Le produit scalaire $\vec{\sigma}.\vec{X}$ est donc donné par

$$-\vec{\sigma} \cdot \vec{X} = \mathfrak{T}^3_{13} + \mathfrak{T}^4_{14}. \tag{11.30}$$

On peut vérifier, d'autre part, l'identité

$$\mathfrak{T}_{rst} + \mathfrak{T}_{str} + \mathfrak{T}_{trs} = 0, \tag{11.31}$$

qui donne ici

$$\mathfrak{T}^3_{14} = \mathfrak{T}^4_{13}. \tag{11.32}$$

Nous voyons donc que si le vecteur $\vec{\sigma}$ est nul, l'indicatrice de la torsion $\mathfrak{J}$ (X) est une circonférence.

Si

$$\left.\begin{aligned} \Omega^3_* &= \mathfrak{T}^3_{13}\, y^3 + \mathfrak{T}^3_{14}\, y^4, \\ \Omega^4_* &= \mathfrak{T}^4_{13}\, y^3 + \mathfrak{T}^4_{14}\, y^4; \end{aligned}\right\} \tag{11.33}$$

on aura en effet

$$(\Omega^3_*)^2 + (\Omega^4_*)^2 = (\mathfrak{T}^3_{13})^2 + (\mathfrak{T}^4_{14})^2. \tag{11.34}$$

Le vecteur $\vec{\sigma}$ ne dépend pas du vecteur $\vec{X}$. Si donc il est nul, la famille des indicatrices de torsion se réduit à une famille de circonférences. Les connexions semi-intrinsèques pour lesquelles le vecteur $\vec{\sigma}$ est nul constituent une sous-classe que nous désignerons par Σ et que nous appellerons classe des connexions *semi-régulières*. Cette classe est un intermédiaire entre la classe des espaces réguliers et la classe des espaces à connexions semi-intrinsèques (7).

---

(7) Dans le cas étudié par E. CARTAN (6), toute connexion semi-régulière est nécessairement régulière; si le vecteur $\vec{\sigma}$ est nul le vecteur $\vec{\Omega}_*$ l'est aussi.

Dans la classe Σ on a

$$d\varpi = \frac{1}{2}[\mathrm{D}\, n_{rs}\, dz^r\, dz^s] + \left[\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}_{rs}\,\mathrm{D}l^{rs}\right)\cdot\varpi\right]. \tag{11.35}$$

Nous verrons que dans le cas où le tenseur A_{rs} est nul, il est toujours possible de définir une connexion de la classe Σ.

Remarquons enfin que dans la classe Σ le vecteur de torsion $\overleftarrow{\Omega}_*$ est en général distinct du vecteur $\overleftarrow{\mathrm{Y}}$ intersection du biplan du cycle et du biplan normal.

Il existe une autre classe Σ' de connexions semi-intrinsèques pour lesquelles les indicatrices du vecteur de torsion $\overleftarrow{\Omega}_*$ sont des circonférences. Ce sont celles pour lesquelles le vecteur $\overleftarrow{\Omega}_*$ a toujours la même ligne d'action que le vecteur $\overleftarrow{\mathrm{Y}}$.

On a alors

$$\mathfrak{T}^3_{j3} = \mathfrak{T}^4_{j4}. \tag{11.36}$$

On peut vérifier que l'on a

$$\mathfrak{T}^r_{st} = \frac{1}{2}\, n^{ru}(n_{us}\,\sigma_t - n_{ut}\,\sigma_s). \tag{11.37}$$

L'intersection des classes Σ et Σ' est constituée des connexions régulières.

§ 12. Détermination de la connexion euclidienne.

A partir des conditions (8.12) et en supposant connu le tenseur $\mathfrak{T}^r_{st}$, il est possible d'entreprendre le calcul de la connexion, plus précisément des coefficients Γ^r_{st}. Nous indiquerons ici la marche du calcul en nous inspirant d'une recherche parallèle faite par E. Cartan [8].

Nous avons, grâce à (9.10) et (10.17),

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_{rst} = \Gamma^*_{rst} - \Gamma^*_{tsr} &= \Gamma_{rst} - \Gamma_{tsr} \\ &- \frac{1}{2}\mathrm{A}_{rsuv}(l^{uw}\,\Gamma^v_{wt} + l^{wv}\,\Gamma^u_{wt}) \\ &+ \frac{1}{2}\mathrm{A}_{tsuv}(l^{uw}\,\Gamma^v_{wr} + l^{wv}\,\Gamma^u_{wr}). \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Posons

$$\Gamma_{rst} = \gamma_{rst} + \mathrm{S}_{rst} \tag{12.2}$$

avec

$$\gamma_{rst} = \gamma_{tsr},\ \mathrm{S}_{rst} + \mathrm{S}_{srt} = 0.$$

---

[8] E. CARTAN (6), supplément, pp. 1-7.

En vertu de (12.2), les conditions (8.12) deviennent

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial z^t} = \gamma_{rst} + \gamma_{tsr}, \tag{12.3}$$

relations qui donnent

$$\gamma_{rst} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial z^t} + \frac{\partial g_{ts}}{\partial z^r} - \frac{\partial g_{tr}}{\partial z^s}\right). \tag{12.4}$$

Si nous posons, d'autre part,

$$G^{rs}_{t} = l^{rv}\,\Gamma^{s}_{vt} + l^{vs}\,\Gamma^{r}_{vt}, \tag{12.5}$$

nous aurons pour (9.10) l'expression plus simple

$$\Gamma^{*}_{rst} = \Gamma_{rst} - \frac{1}{2}\,A_{rsuv}\,G^{uv}_{t}. \tag{12.6}$$

Dans le cas d'un espace régulier où, outre (8.12), nous avons

$$\Gamma^{*}_{rst} = \Gamma^{*}_{tsr}, \tag{12.7}$$

nous en déduisons

$$\Gamma^{*}_{rst} + \Gamma^{*}_{srt} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial z^t} - A_{rsuv}\,G^{uv}_{t}. \tag{12.8}$$

Nous aurons alors, par une transformation semblable à la transformation classique qui s'applique pour le calcul des coefficients γ_{rst},

$$\Gamma^{*}_{rst} = \gamma_{rst} - \frac{1}{2}\,A_{rsuv}\,G^{uv}_{t} - \frac{1}{2}\,A_{stuv}\,G^{uv}_{r} + \frac{1}{2}\,A_{rtuv}\,G^{uv}_{s}. \tag{12.9}$$

Le calcul de la connexion se ramène donc au calcul des composantes « antisymétriques » S_{rst}.

Nous poserons tout d'abord

$$\sqrt{g}\,B_{rs}{}^{tu} = A_{rs\overline{tu}} \tag{12.10}$$

et

$$\sqrt{g}\,B^{tu} = A_{\overline{tu}}. \tag{12.11}$$

Réunissant (12.1), (12.2) et (12.10), nous pourrons écrire

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{rst} = S_{rst} - S_{tsr} - \frac{1}{2}\,B_{rsuv}\,(n^{uw}\,S^{v}_{wt} + n^{wv}\,S^{u}_{wt}) \\
+ \frac{1}{2}\,B_{tsuv}\,(n^{uw}\,S^{v}_{wt} + n^{wv}\,S^{u}_{wr}) - \frac{1}{2}\,B_{rsuv}\,(n^{uw}\,\gamma^{v}_{wt} + n^{wv}\,\gamma^{u}_{wt}) \\
+ \frac{1}{2}\,B_{tsuv}\,(n^{uw}\,\gamma^{v}_{wr} + n^{wv}\,\gamma^{u}_{wr}).
\end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

On vérifiera sans peine les identités

$$\mathfrak{T}_{rst} + \mathfrak{T}_{str} + \mathfrak{T}_{trs} = 0, \tag{12.13}$$

$$\mathrm{S}_{rst} + \mathrm{S}_{str} + \mathrm{S}_{trs} = 0. \tag{12.14}$$

Si donc nous posons

$$\xi^{rs}_{\ t} = n^{rv}\,\mathrm{S}^{s}_{vt} + n^{vs}\,\mathrm{S}^{r}_{vt} \tag{12.15}$$

et

$$\bar{\gamma}^{rs}_{\ t} = n^{rv}\,\gamma^{s}_{vt} + n^{vs}\,\gamma^{r}_{vt}, \tag{12.16}$$

(12.12) pourra se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{rst} = \mathrm{S}_{rts} &- \frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{rsuv}\,\xi^{uv}_{\ \ t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{tsuv}\,\xi^{uv}_{\ \ r} \\ &- \frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{rsuv}\,\bar{\gamma}^{uv}_{\ \ t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{tsuv}\,\bar{\gamma}^{uv}_{\ \ r}. \end{aligned} \tag{12.17}$$

Les formules (12.17) ramènent donc le calcul des S_{rst} au calcul des $\xi^{uv}{}_{t}$.

Grâce à (12.10) et (12.12), nous pouvons déduire un système d'équations linéaires en les $\xi^{rs}{}_{t}$; on a

$$\left.\begin{aligned} \xi^{rs}_{\ t} &- \frac{1}{2}\,n^{rv}\,\mathrm{B}^{s}_{tpq}\,\xi^{pq}_{\ \ v} + \frac{1}{2}\,n^{rv}\,\mathrm{B}_{vtpq}\,\xi^{pqs} \\ &- \frac{1}{2}\,n^{vs}\,\mathrm{B}^{r}_{tpq}\,\xi^{pq}_{\ \ v} + \frac{1}{2}\,n^{vs}\,\mathrm{B}_{vtpq}\,\xi^{pqr} \\ &- \frac{1}{2}\,n^{rv}\,\mathrm{B}^{s}_{tpq}\,\bar{\gamma}^{pq}_{\ \ v} + \frac{1}{2}\,n^{rv}\,\mathrm{B}_{vtpq}\,\bar{\gamma}^{pqs} \\ &- \frac{1}{2}\,n^{vs}\,\mathrm{B}^{r}_{tpq}\,\bar{\gamma}^{pq}_{\ \ v} + \frac{1}{2}\,n^{vs}\,\mathrm{B}_{vtpq}\,\bar{\gamma}^{pqr} = n^{rv}\,\mathfrak{T}^{s}_{vt} + n^{vs}\,\mathfrak{T}^{r}_{vt} \end{aligned}\right\} \tag{12.18}$$

Nous ne poursuivrons pas ici la discussion de ce système; nous le rencontrerons à nouveau sous une forme simplifiée au chapitre suivant.

Remarquons cependant que la détermination d'une connexion régulière exige que le système (12.13) soit compatible; cette détermination est donc subordonnée à une condition qui porte sur le rang d'un système d'équations linéaires.

CHAPITRE III

ÉQUIVALENCE PONCTUELLE DES VARIÉTÉS A MÉTRIQUE BIDIMENSIONNELLE GÉNÉRALISÉE. — MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

§ 13. Équivalence ponctuelle des variétés à métrique bidimensionnelle généralisée. — Préliminaires algébriques.

Nous nous proposons d'appliquer la méthode de M. E. Cartan au problème de l'équivalence ponctuelle des variétés sur lesquelles se trouve définie une aire bidimensionnelle dS_2 (1). Nous supposerons que cette aire est définie comme nous l'avons fait au début de ce travail; nous supposerons plus précisément qu'on peut définir une métrique bivectorielle $g_{rs,\,tu}$. Nous retrouverons alors la classe des problèmes métriques L_M, la métrique vectorielle généralisée et la connexion euclidienne. Nous pourrons donner une justification des hypothèses que nous avons introduites au chapitre précédent en vue de déterminer la connexion.

Le problème que nous posons est donc le suivant : étant données deux variétés à quatre dimensions en chaque point desquelles se trouve définie une aire bidimensionnelle élémentaire dS_2, rechercher les conditions nécessaires et suffisantes de l'équivalence ponctuelle de ces variétés (l'équivalence ponctuelle est entendue dans le groupe des transformations analytiques non singulières).

Ce problème est équivalent à celui de la recherche des invariants d'une variété V_4 sur laquelle est définie une aire élémentaire dS_2. Nous avons établi au chapitre I que la donnée de l'aire élémentaire dS_2 est équivalente à celle d'une certaine forme quadratique alternée

$$\Omega = \frac{1}{2}\, L_{rs}(z, q)\cdot[dz^r\, dz^s]. \tag{13.1}$$

Nous traiterons de l'équivalence de semblables formes quadratiques. Nous traiterons par le fait même, à la fois, de l'équivalence des intégrales doubles associées aux formes Ω.

---

(1) E. CARTAN (8), p. 113; (2), chap. I; (5).

Nous ferons sur la fonction L et ses dérivées jusqu'au troisième ordre les conventions qui ont été faites, sans y revenir, et nous raisonnerons toujours sur la variété K.

Il est aisé de vérifier qu'à la forme Ω est adjointe d'une manière invariante la forme (cf. 4.15)

$$\varpi = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{g}}{L} q^{rs}\, d\sigma_{rs}, \tag{13.2}$$

où $\sqrt{g}$ a la valeur tirée de

$$g^3 = \det \left| \frac{\partial^2 \frac{1}{2} L^2}{\partial p^{rs}\, \partial p^{tu}} \right|. \tag{13.3}$$

Nous voyons dès l'abord que nous aurons à traiter de l'*équivalence d'un couple de formes quadratiques alternées.*

Quelles sont les propriétés de ces formes ? Tout d'abord Ω et ϖ sont deux formes de rang 2; elles sont à huit variables indépendantes : quatre variables z et quatre variables indépendantes q^{rs} (les q^{rs} sont des points de K et interviennent comme des coordonnées homogènes).

On a de plus

$$[\Omega \cdot \varpi] = \sqrt{g}\, [dz^1\, dz^2\, dz^3\, dz^4] \tag{13.4}$$

et

$$[d\,\Omega \cdot \varpi] = 0. \tag{13.5}$$

Les formes Ω et ϖ étant de rang 2 et ne faisant intervenir que les différentielles dz^r, nous poserons

$$\Omega = [\omega^1 \cdot \omega^2], \tag{13.6}$$
$$\varpi = [\omega^3 \cdot \omega^4], \tag{13.7}$$

où les ω^r sont quatre formes linéaires en les différentielles dz^r à coefficients fonctions de (z, q) homogènes et de degré zéro en les q. Les quatre formes ω^r sont linéairement indépendantes, $\sqrt{g}$ étant différent de zéro.

Nous allons effectuer maintenant quelques transformations formelles. Précisons tout d'abord une convention relative aux notations : les indices latins

$$a, b, c, \ldots j, k, l = 1, 2$$

prendront les valeurs 1, 2;

Les indices latins

$$m, n, p, q, r, s, t, \ldots = 1, 2, 3, 4,$$

les valeurs 1, 2, 3, 4;

enfin les indices grecs

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots = 3, 4,$$

les valeurs 3, 4.

Posons ensuite

$$\omega^r = a^r_s\,(z, q)\,.\,dz^s, \tag{13.8}$$

avec

$$\frac{\partial a^r_s}{\partial p^{uv}}\, l^{uv} = \frac{\partial a^r_s}{\partial p^{uv}}\, n^{uv} = 0. \tag{13.9}$$

Nous avons, grâce à (13.4),

$$\det |a^r_s| = \sqrt{g}. \tag{13.10}$$

Nous poserons encore

$$[\omega^r\,\omega^s] = \frac{1}{2}\, a^{rs}_{tu}\,[dz^t\,dz^u], \tag{13.11}$$

c'est-à-dire

$$a^{rs}_{tu} = a^r_t\, a^s_u - a^r_u\, a^s_t. \tag{13.12}$$

Nous représenterons par

$$dz^r = \mathrm{A}^r_s \cdot \omega^s \tag{13.13}$$

les relations inverses des relations (13.8).

Nous aurons encore

$$[dz^r\,dz^s] = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}^{rs}_{tu}\,[\omega^t\,\omega^u], \tag{13.14}$$

où

$$\mathrm{A}^{rs}_{tu} = \mathrm{A}^r_t\,\mathrm{A}^s_u - \mathrm{A}^r_u\,\mathrm{A}^s_t. \tag{13.15}$$

On peut vérifier que l'on a

$$\sqrt{g}\;\mathrm{A}^{\overline{rs}}_{\overline{tu}} = a^{tu}_{rs}, \tag{13.16}$$

soit

$$[\overline{dz^r\,dz^s}] = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}^{\overline{rs}}_{\overline{tu}}\,[\overline{\omega^t\,\omega^u}] = \frac{1}{2\sqrt{g}}\, a^{tu}_{rs}\,[\overline{\omega^t\,\omega^u}]. \tag{13.17}$$

Revenons à Ω et ϖ; si nous tenons compte des expressions (4.14) et (4.15) de Ω et ϖ, nous aurons

$$\left.\begin{array}{ll} a^{12}_{rs} = l_{rs}, & a^{34}_{rs} = n_{rs}, \\ A^{rs}_{12} = l^{rs}, & A^{rs}_{34} = n^{rs}. \end{array}\right\} \quad (13.18)$$

Ces préliminaires acquis, reprenons le calcul des formes $d\Omega$ et $d\varpi$ qui sont attachées d'une manière invariante à Ω.

Rappelons que l'on a (cf. 3.32)

$$d\,\Omega = \frac{1}{4}\, g_{rstu}\,[dl^{rs}\, dz^t\, dz^u] + \frac{1}{2\,L}\,\frac{\partial LL_{rs}}{\partial z^t}\,[dz^t\, dz^r\, dz^s] \quad (13.19)$$

et

$$d\,\varpi = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,[dl^{rs}\, d\,\tau_{rs}] + \frac{1}{2}\left[(A_{rs}\, dl^{rs} + \frac{2}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial z^t}\, dz^t)\,\varpi\right]. \quad (13.20)$$

Posons alors

$$\theta^{tu} = \frac{1}{2}\, a^{tu}_{rs}\, dl^{rs}, \quad (13.21)$$

soit

$$dl^{rs} = \frac{1}{2}\, A^{rs}_{tu}\, \theta^{tu}. \quad (13.22)$$

Nous avons donc

$$\theta^{12} = \frac{1}{2}\, l_{rs}\, dl^{rs} = -\frac{1}{2}\, l^{rs}\, dl_{rs} = -\frac{1}{2}\, l^{rs}\,\frac{\partial\, l_{rs}}{\partial z^p}\, dz^p \quad (13.23)$$

et

$$\theta^{34} = \frac{1}{2}\, n_{rs}\, dl^{rs} = 0, \quad (13.24)$$

en vertu de (3.3).

Les formes $d\Omega$ et $d\varpi$ pourront alors s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} d\,\Omega = \dfrac{1}{16}\, g_{rstu}\, A^{rs}_{pq}\, A^{tu}_{vw}\,[\theta^{vw}\cdot\omega^p\,\omega^q] \\ \qquad + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{L}\,\dfrac{\partial\,(LL_{rs})}{\partial\, z^t}\, A^t_p\, A^{rs}_{uv}\,[\omega^p\,\omega^u\,\omega^v] \end{array}\right\} \quad (13.25)$$

et

$$d\,\varpi = \frac{1}{2}\,[\theta^{tu}\,\omega^t\,\omega^u] + \left[\left(\frac{1}{4}\, A_{rs}\, A^{rs}_{uv}\,\theta^{uv} + \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\, z^p}\, A^p_t\,\omega^t\right)\varpi\right]. \quad (13.26)$$

Nous allons simplifier les expressions que nous venons d'obtenir. A cette fin nous modifierons les formes θ^{rs} par des combinaisons linéaires des ω^i. Nous pourrons avant tout supposer

$$\theta^{12} = 0\,; \tag{13.27}$$

c'est ce que nous ferons dorénavant. Nous aurons donc, à la place des six variables dl^{rs}, quatre formes de Pfaff linéairement indépendantes $\theta^{i\alpha}$.

D'autre part, si nous tenons compte de (13.18), nous voyons que la forme quadratique qui constitue le premier terme du second membre de (13.25) est de rang 4, et en disposant au besoin des formes $\theta^{i\alpha}$, nous mettrons $d\Omega$ sous la forme

$$\boxed{d\,\Omega = g_{i\alpha,j\beta}\,[\theta^{i\alpha}\,\omega^j\,\omega^\beta]}\,. \tag{13.28}$$

Nous avons

$$g_{i\alpha,j\beta} = \frac{1}{4}\,g_{rs,tu}\,\mathrm{A}^{rs}_{i\alpha}\,\mathrm{A}^{tu}_{j\beta}. \tag{13.29}$$

Nous aurons, d'autre part, pour $d\varpi$ une expression de la forme

$$d\,\varpi = [\theta^{i\alpha}\,\overline{\omega^i\,\omega^\alpha}] + [(\mathrm{A}_{i\alpha}\,\theta^{i\alpha} + \sigma_i\,\omega^i)\,\varpi], \tag{13.30}$$

où

$$\mathrm{A}_{i\alpha} = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}_{rs}\,\mathrm{A}^{rs}_{i\alpha}.$$

Cette réduction effectuée, nous aurons à considérer le groupe des transformations linéaires opérant sur les 8 formes ω^r, $\theta^{i\alpha}$ qui conservent la forme des relations (13.6), (13.7), (13.28) et (13.30). D'une manière plus précise, les couples de formes ω^1, ω^2 et ω^3, ω^4 sont déterminées, grâce à (13.6) et (13.7), à une transformation unimodulaire près :

$$\left.\begin{aligned} \omega'^i &= \mu^i_j\,.\,\omega^j \quad \det|\mu^i_j| = 1,\\ \omega'^\alpha &= \nu^\alpha_\beta\,\omega^\beta \quad \det|\nu^\alpha_\beta| = 1. \end{aligned}\right\} \tag{13.31}$$

Les formules de transformations opérant sur les formes $\theta^{i\alpha}$ peuvent s'écrire

$$\theta'^{i\alpha} = \rho^{i\alpha}_{j\beta}\,.\,\theta^{j\beta} + v^{i\alpha}_j\,\omega^j + v^{i\alpha}{}_\beta\,\omega^\beta. \tag{13.32}$$

Les transformations (13.32) devront, modulo ω^r, laisser invariante, grâce à (13.30), l'expression

$$[\theta^{i\alpha}\,\overline{\omega^i\,\omega^\alpha}]. \tag{13.33}$$

On en déduit sans peine que les formes $\theta^{i\alpha}$ se transforment, modulo ω^r, comme les produits extérieurs $[\omega^i\,\omega^\alpha]$. Nous aurons simplement

$$\rho^{i\alpha}_{j\beta} = \mu^i_j \cdot \nu^\alpha_\beta. \tag{13.34}$$

Il en résulte que $d\Omega$ se transformera comme le fait la forme quadratique

$$g_{i\alpha,j\beta} \cdot X^{i\alpha}\,X^{j\beta} \tag{13.35}$$

pour les transformations

$$X'^{i\alpha} = \mu^i_j\,\nu^\alpha_\beta\,X^{j\beta}. \tag{13.36}$$

L'ensemble de ces transformations constitue un groupe isomorphe au groupe $\mathcal{G}'_k$ que nous avons considéré au paragraphe 6. C'est le groupe produit des deux groupes de transformations linéaires unimodulaires définis par (13.31).

Le problème d'équivalence que nous traitons ici est donc subordonné à celui de la classification des formes quadratiques à quatre variables dans le groupe $\mathcal{G}'_k$.

Nous limiterons notre étude, pour les raisons qui ont été développées au chapitre I, à la classe L_M des problèmes L pour lesquels la forme (13.35) est équivalente dans le groupe $\mathcal{G}'_k$ à

$$(X^{13})^2 + (X^{14})^2 + (X^{23})^2 + (X^{24})^2. \tag{13.37}$$

Nous pourrons alors disposer des formes ω^r de manière à donner à $d\Omega$ la forme réduite

$$d\,\Omega = [\theta^{i\alpha}\,\omega^i\,\omega^\alpha]. \tag{13.38}$$

Nous limiterons alors le groupe $\mathcal{G}'_k$ à un sous-groupe $\mathcal{G}''_k$, le sous-groupe des transformations qui conservent à la fois (13.33) et (13.38); il est composé du *produit des groupes des rotations opérant sur les couples* (ω^1, ω^2) et (ω^3, ω^4).

La forme

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2 \tag{13.39}$$

est alors invariante, elle n'est autre que l'*élément linéaire généralisé.*

On peut vérifier, et le calcul a été fait au paragraphe 6, que la forme

$$(ds)^2 = g_{rs}(z, q) \cdot dz^r \, dz^s \tag{13.40}$$

se réduit à (15.39), grâce à la réduction que nous avons opérée.

On a

$$g_{rs} \cdot A^r_u \, A^s_v = \delta^u{}_v \tag{13.41}$$

et

$$g_{rs} = \sum_t a^t_r \, a^t_s. \tag{13.42}$$

En résumé, des considérations algébriques portant sur Ω, $d\Omega$, ϖ *et* $d\varpi$ nous ont permis de retrouver, d'une part, la classe L_M et, d'autre part, l'élément linéaire généralisé.

§ 14. Équivalence.

Introduisons maintenant les formes ω'^r et $\theta'^{i\alpha}$ qui se déduisent des formes ω^r et $\theta^{i\alpha}$ par la transformation linéaire la plus générale qui conserve les expressions

$$[\omega^1 \omega^2], \quad [\omega^3 \omega^4], \quad [\theta^{i\alpha} \cdot \omega^i \omega^\alpha], \quad [\theta^{i\alpha} \, \overline{\omega^i \omega^\alpha}]. \tag{14.1}$$

Nous avons vu que les couples de formes (ω^1, ω^2) et (ω^3, ω^4) sont déterminés à une rotation près; que les formes $\theta^{i\alpha}$ sont, modulo ω^r, également déterminées à une rotation près, la rotation induite sur les produits alternés $[\omega^i \omega^\alpha]$ par les rotations opérant sur les couples ω^1, ω^2 et ω^3, ω^4. Faisant abstraction de cette rotation, nous aurons

$$\theta'^{i\alpha} = \theta^{i\alpha} + v^{i\alpha}{}_j \cdot \omega^j + v^{i\alpha}{}_\beta \, \omega^\beta. \tag{14.2}$$

Les paramètres v, au nombre de 16, sont soumis aux conditions suivantes :

$$v^{i\alpha}_\beta - v^{i\beta}_\alpha = 0, \qquad v^{i\alpha}_j - v^{j\alpha}_i = 0, \tag{14.3}$$

qui assurent la conservation de la forme $[\theta^{i\alpha} \omega^i \omega^\alpha]$, et

$$\sum_i v^{i\alpha}_i = 0, \tag{14.4}$$

qui assure la conservation de la forme $[\theta^{i\alpha} \, \overline{\omega^i \omega^\alpha}]$.

Les paramètres v sont donc au nombre de 10 indépendants. En conclusion, les formes ω'^r et $\theta'^{i\alpha}$ dépendent, outre des variables z, q et de leurs différentielles, de 12 variables auxiliaires. En particulier les formes ω^r dépendent des variables (z, q), des différentielles dz^r et de deux variables auxiliaires. Nous avons alors à calculer les différentielles des formes invariantes ω'^r et à les exprimer à l'aide des formes ω'^s et $\theta'^{i\alpha}$. Dans les formules qui suivent nous n'écrirons pas les accents qui devraient affecter les formes ω^r et $\theta^{i\alpha}$, afin de ne pas alourdir l'écriture; retenons cependant que ces formules se rapportent à des formes quelconques ω^r, $\theta^{i\alpha}$ qui se déduisent d'un système de formes particulier par une transformation linéaire du type de celles que nous venons de caractériser.

Compte tenu des formules (13.30) et (13.38), nous obtenons les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} d\,\omega^i &= [\omega^j \pi_j^i] + (-1)^{i+1}[\omega^\alpha \theta^{i+1\alpha}] + A^i_{jk\beta}[\omega^j \theta^{k\beta}] + \mathfrak{T}^i_{j\beta}[\omega^j \omega^\beta], \\ d\omega^\alpha &= [\omega^\beta \pi^\alpha_\beta] - (-1)^{i+1}[\omega^i \theta^{i+1\alpha}] + A^\alpha_{\gamma k\beta}[\omega^\gamma \theta^{k\beta}] + \mathfrak{T}^\alpha_{j\beta}[\omega^j \omega^\beta]; \end{aligned}\right\} \quad (14.5)$$

dans ces formules, où

$$\pi^i_j + \pi^j_i = 0, \qquad \pi^\beta_\alpha + \pi^\alpha_\beta = 0, \tag{14.6}$$

π^i_j et π^α_β sont deux formes de Pfaff nouvelles qui dépendent en outre des différentielles des paramètres de la rotation qui agit sur ω^r; les coefficients A et $\mathfrak{T}$ sont des fonctions de (z, q) qui vérifient les relations suivantes :

$$\sum_i A_{ik\beta}^{\,i} = 0, \qquad \sum_\alpha A_{\alpha k\beta}^{\,\alpha} = A_{k\beta}, \tag{14.7}$$

$$\sum_i \mathfrak{T}^i_{i\beta} = 0, \qquad \sum_\alpha \mathfrak{T}^\alpha_{i\alpha} = \sigma_i. \tag{14.8}$$

On pourra toujours, en modifiant au besoin les formes π^i_j et π^α_β, faire en sorte que l'on ait

$$A_{jK\beta}^{\,i} = A_{iK\beta}^{\,j}, \qquad A_{\alpha K\gamma}^{\,\beta} = A_{\beta K\gamma}^{\,\alpha}, \tag{14.9}$$
$$\mathfrak{T}^i_{j\beta} = \mathfrak{T}^j_{i\beta}, \qquad \mathfrak{T}^\alpha_{j\beta} = \mathfrak{T}^\beta_{j\alpha}. \tag{14.10}$$

Nous allons profiter de l'indétermination des formes $\theta^{i\alpha}$ pour chercher à simplifier encore les formules (14.5). Voyons l'effet de la substitution (14.2) sur les formules (14.5). Nous obtiendrons, tout en conservant les conditions déjà satisfaites, des formules de même forme avec des coefficients modifiés, que nous désignerons par des lettres surlignées; on aura en particulier

$$\overline{\mathfrak{T}}_{j\beta}^{i} = -(-1)^{i+1} v_{j}^{i+1\,\beta} + A_{jk\gamma}^{i} v_{\beta}^{k\gamma} + \mathfrak{T}_{j\beta}^{i}, \tag{14.11}$$

$$\overline{\mathfrak{T}}_{j\beta}^{\alpha} = -(-1)^{j+1} v_{\beta}^{j+1\,\alpha} - A_{\beta k\delta}^{\alpha} v_{j}^{k\delta} + \mathfrak{T}_{j\beta}^{\alpha}. \tag{14.12}$$

Nous voyons donc qu'il sera toujours permis de supposer, par exemple, les coefficients $\mathfrak{T}_{j\beta}^{i}$ nuls et de conserver cette propriété. Nous aurons alors

$$(-1)^{i+1} v_{j}^{i+1\,\beta} = A_{jk\gamma}^{i} v_{\beta}^{k\gamma}. \tag{14.13}$$

Il nous restera les relations suivantes :

$$\overline{\mathfrak{T}}_{j\beta}^{\alpha} = -(-1)^{j+1} v_{\beta}^{j+1\,\alpha} - (-1)^{k+1} A_{\beta k\delta}^{\alpha} A_{jl\gamma}^{k+1} v_{\delta}^{l\gamma} + \mathfrak{T}_{j\beta}^{\alpha}. \tag{14.14}$$

Pour déterminer les formes $\theta^{i\alpha}$, nous avons à déterminer les huit quantités $v_{\beta}^{j\alpha}$ liées par les 2 relations $(14.3)_1$, c'est-à-dire six quantités. L'annulation des $\overline{\mathfrak{T}}_{j\beta}^{\alpha}$ nous fournit précisément six relations. Considérées comme équations en les $v_{\beta}^{i\alpha}$, les relations (14.14) constituent un système de six équations linéaires à 6 inconnues. Si ce système est de rang 6, nous dirons avoir affaire à un *problème régulier* et nous pourrons donner aux équations (14.5) la forme

$$\boxed{\begin{aligned} d\,\omega^{i} &= [\omega^{j}\,\pi_{j}^{i}] + (-1)^{i+1}[\omega^{\alpha}\,\theta^{i+1\,\alpha}] + A_{jk\beta}^{i}[\omega^{j}\,\theta^{k\beta}], \\ d\,\omega^{\alpha} &= -(-1)^{i+1}[\omega^{i}\,\theta^{i+1\,\alpha}] + [\omega^{\beta}\,\pi_{\beta}^{\alpha}] + A_{\gamma k\beta}^{\alpha}[\omega^{\gamma}\,\theta^{k\beta}]. \end{aligned}} \tag{14.15}$$

Sans supposer que le système (14.14) soit de rang 6, une réduction partielle peut être possible. Par sommation on déduit de (14.14), grâce à $(14.7)_2$ et $(14.8)_2$, les relations suivantes :

$$\sum_{\alpha} \overline{\mathfrak{T}}_{j\alpha}^{\alpha} = -(-1)^{j+1} \sum_{\alpha} v_{\alpha}^{j+1\,\alpha} - (-1)^{k+1} A_{k\delta} A_{jl\gamma}^{k+1} v_{\delta}^{l\gamma} + \sigma_{j}. \tag{14.16}$$

On pourra alors chercher à annuler les expressions

$$\sum_{\alpha} \mathfrak{T}_{j\alpha}^{\alpha} = \sigma_{j}. \tag{14.17}$$

Nous avons en (14.16) un système de 2 équations linéaires à six inconnues. Si en particulier

$$A_{k\delta} = 0, \tag{14.18}$$

ce sera toujours un système de rang 2 et les conditions (14.17) pourront toujours être satisfaites.

On voit encore aisément que

$$\det \mid \delta_l^j + (-1)^{l+k+1} A_{k+1\delta+1} A_{jl+1}^{k\delta+1} \mid \neq 0 \tag{14.19}$$

est une condition suffisante pour que le système (14.16) soit de rang 2.

Dans le cas des problèmes réguliers, l'étude de l'équivalence s'achève par les formules (14.15). Aux formules (14.15) il faut adjoindre les formules qui donnent les expressions $d\theta^{i\alpha}$; l'ensemble des formules obtenues fournit les invariants cherchés. La méthode de Cartan ([2]) permet d'obtenir simplement tous les invariants du système de formes ω^r, $\theta^{i\alpha}$. La forme même des équations obtenues dans le cas d'un espace régulier montre que l'ensemble des transformations qui transforme en lui-même un espace régulier donné forme un groupe continu fini.

Dans le cas des espaces non réguliers, il peut se faire qu'il soit impossible d'éliminer les variables auxiliaires v; c'est précisément ce qui se passe si la forme Ω ou l'élément d'aire dS_2 admet un groupe infini de transformations.

§ 15. Retour à la connexion. — Repère mobile.

Nous avons à dessein ignoré jusqu'ici l'interprétation géométrique des considérations que nous avons développées aux paragraphes 13 et 14.

Nous allons abandonner ce parti pris. Les formules que nous avons obtenues en (14.15) suffisent à montrer qu'on peut regarder la variété V_4, à laquelle est attaché un élément de surface de la classe L_M, comme un *espace non holonome à groupe fondamental, l'élément générateur de l'espace étant l'élément de contact bidimensionnel et le groupe fondamental le groupe des déplacements euclidiens de l'espace à quatre dimensions.*

Supposons tout d'abord nuls les invariants qui apparaissent dans les formules (14.15); on obtient ainsi les équations

$$\left.\begin{aligned} d\,\omega^i &= [\omega^j \pi_j^i] + (-1)^{i+1} [\omega^\alpha \theta^{i\alpha}], \\ d\,\omega^\alpha &= -(-1)^{i+1} [\omega^i \theta^{i+1\alpha}] + [\omega^\beta \pi_\beta^\alpha], \end{aligned}\right\} \tag{15.1}$$

([2]) E. Cartan (8), pp. 113-136.

équations que nous pouvons condenser en

$$d\omega^r = [\omega^s \varpi_s^r], \tag{15.2}$$

où

$$\varpi_s^r + \varpi_r^s = 0. \tag{15.3}$$

Si nous adjoignons à (15.2) les équations

$$d\,\varpi_s^r = [\varpi_s^t \varpi_t^r] \tag{15.4}$$

qui s'en déduisent par différentiation, nous retrouvons en (15.2) et (15.4) les équations de structure de l'espace euclidien E_4. (15.1) sont précisément les équations qu'on obtient en associant à chaque bivecteur de l'espace euclidien E_4 un repère rectangulaire ou 4-èdre dont un biplan est situé dans le biplan du bivecteur, le biplan normal achevant de déterminer le 4-èdre. (15.1) sont alors les formules de « raccord » ou de connexion de ces 4-èdres entre eux. Le système d'équations

$$\omega^r = d\,X^r, \qquad \varpi_s^r = 0 \tag{15.4^1}$$

est complètement intégrable grâce à (15.2) et (15.4); on pourra donc associer les différents points des repères équipollents entre eux, d'une manière indépendante du chemin suivi.

Les équations (15.1) sont celles qu'on obtient si l'on part de l'élément d'aire bidimensionnelle euclidienne

$$d\,\mathfrak{S}_2 = \left(\sum (q^{rs})^2\right)^{\frac{1}{2}} du^1\,du^2. \tag{15.5}$$

La donnée de l'élément d'aire euclidienne conduit au même espace que la donnée de l'élément linéaire. Cela tient à une propriété générale des espaces holonomes, espaces à groupe fondamental et intégrables. L'espace euclidien est un exemple d'espace holonome, le groupe fondamental étant précisément celui des déplacements euclidiens. Soit que nous considérions comme élément générateur de l'espace euclidien E_4, le point, l'élément de contact à 1, 2, 3 dimensions, nous définirons toujours le même espace E_4. La donnée de l'élément linéaire, de l'élément d'aire bidimensionnelle ou tridimensionnelle permet d'associer à chaque élément, point, et élément de contact uni- ou bi- ou tridimensionnel un espace euclidien E_4. Si l'on connecte euclidiennement, dans tous les cas, ces différents espaces entre eux, on retrouve l'espace E_4 dont on est parti.

Passons maintenant au cas général où les équations de structure ont la forme (14.15). Nous pourrons regarder ces équations comme les équations de structure d'un espace d'éléments de contact bidimensionnels non holonome à connexion euclidienne. A chaque élément (z, q) nous associerons un repère $R_1(z, q)$ formé d'un 4-èdre rectangulaire $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_4)$:

$$\vec{e}'_r \cdot \vec{e}'_s = \delta_{rs}, \tag{15.6}$$

le raccord entre deux repères associés aux éléments voisins : z, q et $z + dz$, $q + dq$, se faisant grâce aux formules

$$\left.\begin{aligned} \vec{d\mathrm{M}} &= \omega^r \vec{e}_r, \\ d\vec{e}'_r &= \varpi^s_r \vec{e}'_s, \end{aligned}\right\} \tag{15.7}$$

où

$$\varpi^i_j = \pi^i_j, \qquad \varpi^\alpha_\beta = \pi^\alpha_\beta, \qquad \varpi^i_\alpha = (-)^{i+1}\theta^{i\alpha}. \tag{15.8}$$

Nous définissons ainsi, associé à la variété d'éléments (z, q) sur laquelle est définie une aire bidimensionnelle de la classe L_M, une variété localement euclidienne : l'espace euclidien associé à un élément (z, q) est tel que la longueur du vecteur (dz^r) est donnée dans le repère $R_1(z, q)$ par

$$(ds)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2. \tag{15.9}$$

La connexion est définie par (15.7) et (15.8); elle est euclidienne. Mais ici l'espace obtenu est non holonome, en ce sens que le raccordement de deux espaces euclidiens associés à deux éléments quelconques dépend du chemin suivi pour passer de l'un à l'autre; ce raccordement n'est pas intégrable; les équations (15.4)[1] ne sont plus complètement intégrables.

Il est aisé de rattacher ces considérations à celles que nous avons développées au chapitre II. Nous avons en effet

$$\vec{d\mathrm{M}} = \omega^s \vec{e}'_s = (a^s_r \vec{e}'_s)\, dz^r = dz^r \vec{e}_r, \tag{15.10}$$

où

$$\vec{e}_r = a^s_r \vec{e}'_s. \tag{15.11}$$

Les formules (15.11) ne sont autres que les formules de passage du repère naturel $R(z, q)$ au repère $R_1(z, q)$. Aux formes ω^r que nous avons introduites au paragraphe précédent correspond le repère le plus général qui soit : 1° rectangulaire; ce sont les conditions (15.6) ou (13.42); 2° tel que le biplan sous-tendu par $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$ soit confondu avec le biplan tangent l^{rs}; ce sont les conditions $(13.18)_1$; 3° tel que le biplan soit sous-tendu par $(\vec{e'}_3, \vec{e'}_4)$, soit confondu avec le biplan normal n^{rs}; ce sont les conditions $(13.18)_2$. C'est enfin le repère le plus général, en ce sens qu'il se déduit par la rotation la plus générale d'un repère particulier qui satisfait aux conditions que nous venons d'énoncer. C'est le repère mobile adapté à notre problème.

Les relations (15.11) s'inversent sous la forme

$$\vec{e}'_s = A^r_s \, \vec{e}_r. \tag{15.12}$$

Un vecteur dont les composantes dans le repère naturel sont X^r :

$$\vec{X} = X^r \, \vec{e}_r,$$

aura pour composantes relatives au repère R_1 : X'^r avec

$$\vec{X} = X'^r \, \vec{e}'_r = (X'^r A^s_r) \, \vec{e}_s,$$

soit

$$X^r = X'^s A^r_s \cdot \quad \text{ou} \quad X'^s = a^s_r X^r.$$

En particulier, les composantes relatives du bivecteur l^{rs} seront, grâce à

$$l'^{rs} = \frac{1}{2} a^{rs}_{tu} \cdot l^{tu} = \delta^r_1 \delta^s_2 - \delta^r_2 \delta^s_1,$$

c'est-à-dire précisément que le biplan $\vec{e'}_1$, $\vec{e'}_2$ est confondu avec le biplan l^{rs}.

Les formules que nous avons développées au chapitre précédent sont relatives au repère naturel. Celles que nous avons établies ici sont relatives au repère mobile. En particulier, les formes $\theta^{i\alpha}$ sont les composantes relatives au repère mobile du bivecteur $\mathrm{D}l^{rs}$*; on a*

$$\theta^{rs} = \frac{1}{2} a^{rs}_{tu} \, \mathrm{D}l^{tu}. \tag{15.13}$$

Nous allons tout d'abord vérifier l'identité suivante :

$$d\,\omega^r + [\omega^s \varpi^r_s] = a^r_s \, \Omega^s, \tag{15.14}$$

c'est-à-dire que « les écarts » entre les expressions des équations de structure dans le cas général et dans le cas holonome ne sont autres que les composantes relatives au repère mobile R_1, de la torsion telle qu'elle a été définie au chapitre précédent. C'est là une propriété évidente à priori, étant donnée la signification géométrique du vecteur de torsion $\vec{\Omega}$. Un simple calcul permet de le vérifier :

nous avons

$$\left.\begin{aligned} d\vec{e}'_r &= d\mathrm{A}_r^s\,\vec{e}_s + \mathrm{A}_r^s\,d\vec{e}_s = (d\mathrm{A}_r^t + \mathrm{A}_r^s\,\omega_s^t)\,\vec{e}_t \\ &= a_u^s\,(d\,\mathrm{A}_r^u + \mathrm{A}_r^t\,\omega_t^u)\,\vec{e}'_s. \end{aligned}\right\} \quad (15.15)$$

Nous aurons donc

$$\varpi_r^s = a_u^s\,(d\,\mathrm{A}_r^u + \mathrm{A}_r^t\,\omega_t^u) = a_u^s\,\mathrm{D}\,\mathrm{A}_r^u = -\,\mathrm{A}_r^u\,\mathrm{D}a_u^s \qquad (15.16)$$

(15.14) en résulte immédiatement.

De plus, de

$$\mathrm{D}l^{tu} = \mathrm{D}\,(\mathrm{A}_1^t\,\mathrm{A}_2^u - \mathrm{A}_2^t\,\mathrm{A}_1^u)$$

nous déduisons (15.13), grâce à (15.16).

On en déduit sans peine, grâce à (15.16) et (15.8),

$$\left.\begin{aligned} \theta^{i\alpha} &= (-1)^{i+1}\,\varpi_\alpha^{i'}, \\ \theta^{12} &= \theta^{34} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (15.17)$$

Le raccord se fait donc entièrement entre les résultats du chapitre II et ceux de ce chapitre.

Les résultats actuels éclairent diverses conventions que nous avons faites sur la torsion au chapitre précédent. Nous avons supposé, en (8.20),

$$\mathrm{A}_{rs,tu} = \mathrm{A}_{sr,tu}. \qquad (15.18)$$

Nous avons vu en (14.9) que les composantes relatives du tenseur A_{rstu} dans le repère mobile peuvent toujours être supposées remplir ces conditions.

Quant au vecteur de torsion $\vec{\Omega}_*$, grâce à (14.10), nous voyons tout d'abord que les composantes $\mathfrak{S}_{12}^r$ et $\mathfrak{S}_{34}^r$ sont nulles dans le repère mobile; cela signifie que si le biplan support du cycle le long duquel on calcule la torsion est situé soit dans le biplan tangent où $\omega^1 = \omega^2 = 0$, soit dans le biplan normal où $\omega^3 = \omega^4 = 0$, le vecteur de torsion $\vec{\Omega}_*$ est nul. Ce sont là précisément les premières conventions que nous avons faites sur les connexions semi-intrinsèques.

Nous avons montré encore qu'il est toujours possible d'annuler les composantes $\mathfrak{T}^{i}_{j\beta}$ au tenseur $\mathfrak{T}$; cela signifie que le vecteur de torsion, quand il n'est pas nul, est situé dans le biplan normal. C'est là la seconde condition qui caractérise les connexions semi-intrinsèques.

L'étude du système (14.14) n'est autre que celle des conditions de régularité de l'espace. Si le rang du système (14.14) est 6, l'espace est régulier. Enfin, en (14.19) nous avons donné une condition suffisante pour que la connexion puisse entrer dans la classe Σ des connexions semi-intrinsèques. (14.19) s'écrit dans le repère naturel

$$\det. \left| g_{tu} + \frac{1}{2} B_{rs} B^{rs}_{tu} \right| \neq 0. \tag{15.19}$$

Cette condition ne suffit cependant pas pour que l'espace soit régulier (cf. § II).

Enfin, si nous avons en vue le problème d'équivalence, les conditions d'équivalence peuvent se formuler géométriquement : la condition nécessaire et suffisante d'équivalence ponctuelle de deux formes Ω ou des intégrales doubles associées est que les deux espaces qui leur sont associés sont géométriquement les mêmes, c'est-à-dire qu'il existe une transformation ponctuelle qui transforme la métrique et la connexion du premier espace en la métrique et la connexion du second espace. Ceci suppose les espaces réguliers afin que la connexion soit univoquement déterminée.

§ 16. Théorie des surfaces.

Nous pourrons regarder une surface S_2 dans notre espace généralisé comme une multiplicité à deux dimensions d'éléments de contact bidimensionnels : ses éléments de contact tangents [3].

Si

$$z^r = z^r(u^1, u^2) \tag{16.1}$$

(3) On peut se placer à un autre point de vue. Voir, à ce sujet, § 18.

sont les équations paramétriques de S_2 et si

$$z_i^r = \frac{\partial z^r}{\partial u^i}, \tag{16.2}$$

nous définirons sur S_2 un élément linéaire par

$$\left.\begin{aligned} &(ds)^2 = g_{rs}(z, q) \cdot z_i^r z_j^s \, du^i \, du^j, \\ \text{soit} \quad &(ds)^2 = g_{ij}(u^1, u^2) \, du^i \, du^j. \end{aligned}\right\} \tag{16.3}$$

(16.3) définit la première forme fondamentale de S_2.

Remarquons au passage que dans S_2 l'élément de variété $du^1 \, du^2$ a pour mesure

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\bar{g}} \, du^1 \, du^2, \\ \text{où} \quad &\bar{g} = \det |g_{ij}|. \end{aligned}\right\} \tag{16.4}$$

Or on a sur S_2

$$\left.\begin{aligned} &\det |g_{ij}| = \det |g_{rs} \cdot z_i^r z_j^s| = \frac{1}{4} g_{rs,tu} \, q^{rs} \cdot q^{tu} = L^2(z, q), \\ \text{soit} \quad &\sqrt{\bar{g}} \, du^1 \, du^2 = L \, du^1 \, du^2. \end{aligned}\right\} \tag{16.5}$$

Ce résultat cadre bien avec nos hypothèses initiales.

On peut obtenir d'autres formes fondamentales de la surface de la manière suivante : nous associerons à chaque élément de surface un repère R_1 rectangulaire, les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ étant situés dans le biplan tangent, les vecteurs $\vec{e}_3, \vec{e}_4$ dans le biplan normal. Cela étant, considérons un champ de vecteurs tangents; la différentielle absolue d'un vecteur tangent est donnée par

$$d(X^i \vec{e}_i) = (d X^i + X^k \varpi_k^i) \vec{e}_i + X^k \varpi_k^\alpha \vec{e}_\alpha. \tag{16.6}$$

Les composantes normales de cette différentielle absolue sont donc

$$X^k \varpi_k^\alpha. \tag{16.7}$$

Elles ne dépendent que du vecteur X^k attaché à l'élément (z, q) et non du vecteur X^k attaché à un élément voisin. Les composantes (16.7) font apparaître la *courbure eulérienne* généralisée de la variété. On arriverait à un résultat analogue en calculant les composantes tangentielles de la différentielle absolue d'un vecteur normal.

A la courbure eulérienne nous associerons les formes

$$\Phi_\alpha = \omega^k \varpi_k^\alpha.$$

On a

$$\Phi_\alpha = - \mathrm{D}\vec{e}_\alpha \cdot \overrightarrow{d\mathrm{M}}, \tag{16.8}$$

où

$$\overrightarrow{d\mathrm{M}} = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2.$$

Nous poserons sur S_2

$$\varpi_k^\alpha = \gamma^*_{k\alpha j}\, \omega^j, \tag{16.9}$$

soit

$$\Phi_\alpha = \gamma^*_{k\alpha j}\, \omega^k\, \omega^j. \tag{16.10}$$

Le vecteur

$$\vec{\Phi} = \Phi_\alpha\, \vec{e}_\alpha \tag{16.11}$$

normal à la surface est appelé *vecteur de courbure normale.*

Du vecteur de courbure normale nous déduisons par contraction le *vecteur de courbure moyenne :*

$$\vec{\Psi} = \sum_i \gamma^*_{i\alpha i} \cdot \vec{e}_\alpha. \tag{16.12}$$

Les formes Φ_α permettent de définir, exactement comme dans le cas d'un espace riemannien : lignes asymptotiques, tangentes principales, lignes de courbure (4).

Le vecteur de courbure moyenne va nous permettre de généraliser un résultat classique relatif aux surfaces minima :

THÉORÈME : *Dans une connexion semi-intrinsèque quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit extrémale est que le vecteur de courbure moyenne soit nul en chaque point.*

Nous avons en effet dans une connexion semi-intrinsèque quelconque :

$$d\,\Omega = d\,[\omega^1\, \omega^2] = [\theta^{i\alpha}\, \omega^i\, \omega^\alpha]. \tag{16.13}$$

Si nous nous reportons à (15.8) et (16.9), nous aurons, sur S_2, si les expressions entre crochets sont calculées sur S_2,

$$\{\theta^{i\alpha}\, \omega^i\, \omega^\alpha\} = -(-1)^{i+1}\, \gamma^*_{i+1\alpha j}\, \{\omega^j\, \omega^i\, \omega^\alpha\}, \tag{16.14}$$

soit, grâce à (16.12),

$$\{d\,\Omega\} = \vec{\Psi} \cdot \overrightarrow{d\mathrm{M}} \cdot \{\Omega\}. \tag{16.15}$$

(4) E. CARTAN (10), nos 207, 208, 209); (4), nos 44, 45, 46.

Le théorème en résulte immédiatement; en effet, si

$$\overrightarrow{\delta M} = \omega^r(\delta)\,\vec{e}_r \tag{16.17}$$

désigne « la variation » d'un point de S_2 et si l'on observe que $\omega^\alpha(d)=0$, la variation de l'aire, en supposant les variations nulles à la frontière, est donnée par

$$\{ E\, d\,\Omega \} = \vec{\Psi} \cdot \overrightarrow{\delta M}\, \{ \Omega \} \tag{16.18}$$

ou, sous forme intégrale, à frontière fixe,

$$\delta \int d\, \mathcal{S}_2 = \int \vec{\Psi} \cdot \overrightarrow{\delta M} \cdot \{ \Omega \}. \tag{16.19}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\delta M}$ étant arbitraire, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface S_2 soit extrémale est que l'on ait sur S_2

$$\vec{\Psi} = 0. \tag{16.20}$$

*
* *

On peut encore étudier les variétés S_2 à un autre point de vue, que l'on peut qualifier d'interne.

Nous regarderons S_2 comme une variété ponctuelle à deux dimensions sur laquelle est définie une métrique élémentaire donnée par (16.3), et une connexion, la connexion induite sur S_2 par la connexion de l'espace ambiant : la différentielle absolue d'un vecteur tangent à S_2 sera la projection sur le plan tangent à S_2 de la différentielle absolue de ce vecteur, telle qu'elle est donnée dans V_4.

Si à chaque point de S_2 nous associons un repère rectangulaire $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, nous aurons

$$\overrightarrow{dM} = \omega^i\, \vec{e}_i, \tag{16.21}$$

$$(ds)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \tag{16.22}$$

$$d\,\vec{e}_i = \varpi_i^j\, \vec{e}_j. \tag{16.23}$$

La surface S *est un espace ponctuel à deux dimensions, à connexion euclidienne, mais en général doué de torsion.*

Le vecteur de torsion est donné par

$$\vec{\Omega}_s = (d\,\omega^i - \omega^j\,\varpi_j^i)\,\vec{e}_i \tag{16.24}$$

et si l'on se reporte à (14.15) et (16.9), on trouve que

$$\Omega^i_S = (A_{jk\beta}^{\;i}\, \gamma^{*k\beta}_{\;l} - A_{jk\beta}^{\;i}\, \gamma^{*k\beta}_{\;l})\,[\omega^j\,\omega^l]. \tag{16.25}$$

La connexion euclidienne de S_2 n'est bien déterminée que si l'espace ambiant est régulier. Il existe cependant une classe de connexions semi-intrinsèques qui confèrent une connexion interne bien déterminée à toute surface S_2. Si nous nous reportons au paragraphe 14, nous avons vu que le choix (14.13) des indéterminées $v^{i\alpha}_j$ permettait d'annuler les composantes tangentielles du vecteur de torsion $\vec{\Omega}_*$. Avec ce choix des $v^{i\alpha}_j$, le vecteur $\vec{\Omega}_s$ contiendra les coefficients encore indéterminés $v^{i\alpha}_\beta$ dans les expressions suivantes :

$$(A_{jk\beta}^{\;i}\, A_{l\alpha\gamma}^{k+1} - A_{lk\beta}^{\;i}\, A_{j\alpha\gamma}^{k+1})\, v^{\alpha\gamma}_\beta\,[\omega^j\,\omega^l]. \tag{16.26}$$

Si donc

$$A_{jk\beta}^{\;i}\, A_{l\alpha\gamma}^{k+1} - A_{ljk\beta}^{\;i}\, A_{j\alpha\gamma}^{k+1} = 0, \tag{16.27}$$

les expressions Ω^i_S ne dépendront plus du choix d'une connexion semi-intrinsèque, et la connexion sur S_2 sera parfaitement déterminée [5].

---

[5] E. Cartan (6), pp. 43-44.

DEUXIÈME PARTIE

LES ESPACES METRIQUES A n DIMENSIONS FONDES SUR LA NOTION D'AIRE A m DIMENSIONS

§ 17. Esquisse d'une généralisation des résultats obtenus.

L'étude que nous avons faite dans un cas particulier, celui d'une variété à quatre dimensions dans laquelle on se donne à priori l'élément d'aire à deux dimensions, nous donne le moyen d'esquisser une généralisation au cas d'une variété à n dimensions dans laquelle on se donne l'élément d'aire à m dimensions. Plaçons-nous dans une variété analytique V_n. Si V_n est rapportée à un système de coordonnées $z^1, \ldots, z^n$, nous définirons un élément de variété m-dimensionnelle par la donnée d'un m-vecteur. Nous représenterons les m-vecteurs par leurs coordonnées pluckériennes. Cela étant, si

$$[dz^{r_1} \cdots dz^{r_m}] \qquad r_1, r_2 \cdots, r_m = 1, 2, \cdots, n \tag{17.1}$$

sont les composantes d'un m-vecteur élémentaire, la mesure d'une aire m-dimensionnelle élémentaire sera définie par la donnée d'une fonction L telle que

$$d\,\mathrm{S}_m = \mathrm{L}(z^r, [dz^{r_1} \cdots dz^{r_m}]). \tag{17.2}$$

Nous ferons sur L des hypothèses semblables que nous avons faites dans le cas particulier étudié :

1° $\mathrm{L} > 0$ pour les valeurs non toutes nulles des $[dz^{r_1} \ldots dz^{r_m}]$;

2° L positivement homogène et du premier degré en les $[dz^{r_1} \ldots dz^{r_m}]$;

3° L possède un minimum nul pour $[dz^{r_1} \ldots dz^{r_m}] = 0$.

Si

$$z^r = z^r(u^1, \cdots, u^m) \tag{17.3}$$

sont les équations paramétriques d'une variété à m dimensions S_m, nous poserons

$$q^{r_1 \dots r_m} = \frac{\partial (z^{r_1}, \cdots, z^{r_m})}{\partial (u^1, \cdots, u^m)}. \tag{17.4}$$

L'élément d'aire dS_m est alors donné par

$$d\,S_m = L(z, q)\, du^1 \cdots du^m. \tag{17.5}$$

Nous supposerons $L(z, q)$ définie pour toutes les valeurs des q considérés comme variables indépendantes. Pour éviter toute confusion, nous désignerons par $p^{r_1 \dots r_m}$ les composantes d'un tenseur complètement antisymétrique d'ordre m; nous réserverons $q^{r_1 \dots r_m}$ pour désigner les m-vecteurs.

On sait que les points $q^{r_1 \dots r_m}$ sont les points d'une variété de l'espace (p), la variété de Grassmann; nous la désignerons par G^n_m et nous dirons des fonctions calculées sur G^n_m qu'elles sont calculées module G^n_m.

Dans le calcul des dérivées successives de L sur G^n_m apparaîtront des indéterminations semblables à celles que nous avons rencontrées dans le cas particulier $n=4$, $m=2$; il conviendra de les lever par des conventions géométriques.

A la fonction L nous associerons *une métrique* m-*vectorielle* définie par

$$g_{r_1 \cdots r_m, s_1 \cdots s_m} = \frac{\partial^2 \frac{1}{2} L^2}{\partial p^{r_1 \cdots r_m} \partial p^{s_1 \cdots s_m}} \text{ mod. } G^n_m. \tag{17.6}$$

Nous nous limiterons à la classe des problèmes L pour lesquels l'équation

$$\frac{1}{(m\,!)^2}\, g_{r_1 \cdots r_m, s_1 \cdots s_m} X^{r_1 \cdots r_m} X^{s_1 \cdots s_m} = 0, \tag{17.7}$$

où $X^{r_1 \dots r_m}$ sont les coordonnées d'un m-plan, définit sur G^n_m, pour chaque élément (z, q), un ensemble de m-plans tangents à un hypercone d'équation

$$g_{rs}(z, q)\, X^r X^s = 0. \tag{17.8}$$

Les formes quadratiques des premiers membres de (17.7) et (17.8) seront supposées définies positives.

Ceci est équivalent à l'hypothèse suivante : la matrice symétrique d'ordre $\binom{n}{m}$

$$g_{r_1 \cdots r_m, s_1 \cdots s_m} \tag{17.9}$$

est une matrice composée d'ordre m d'une matrice symétrique d'ordre n

$$g_{rs}, \tag{17.10}$$

c'est-à-dire qu'il est supposé exister une matrice d'ordre n telle que

$$g_{r_1 \cdots r_m, s_1 \cdots s_m} = \begin{vmatrix} g_{r_1 s_1} \cdots & g_{r_1 s_m} \\ \vdots & \vdots \\ g_{r_m s_1} & g_{r_m s_m} \end{vmatrix}. \tag{17.11}$$

Nous définissons ainsi une *classe* d'aires élémentaires; nous l'appellerons la classe *métrique* et nous la désignerons par L_M.

Dans la classe L_M le calcul du tenseur g_{rs} à partir du tenseur $g_{r_1 \cdots r_m, s_1 \cdots s_m}$ peut se faire de la manière suivante :

La connaissance de tous les mineurs d'ordre m du déterminant g_{rs} permet d'en calculer tous les mineurs d'ordre $m+1$; par répétition nous en déduirons les mineurs d'ordre $n-1$, c'est-à-dire les gg^{rs}.

Si $m < \frac{n}{2}$, on peut, au lieu de partir du tenseur $g_{r_1 \cdots r_m, s_1 \cdots s_m}$ d'ordre $\binom{n}{m}$, partir du tenseur adjoint qui sera d'ordre $\binom{n}{p}$, où $p = n - m$; on aura bien alors $p > \frac{n}{2}$.

Il résulte des propriétés des matrices composées, que le déterminant

$$\det | g_{r_1 \cdots r_m, s_1 \cdots s_m} | \tag{17.12}$$

a la variance d'un multiplicateur; dans la classe L_M on aura d'ailleurs

$$g = \det | g_{rs} | = \det | g_{r_1 \cdots r_m, s_1 \cdots s_m} |^{\frac{1}{\binom{m-1}{n-1}}}. \tag{17.13}$$

Une variété V_n, dans laquelle on se donne un élément d'aire de la classe métrique, peut être regardée comme *une variété* *d'éléments de contact à* m-*dimensions* (z, q) *localement euclidienne;* en effet, un vecteur de l'espace linéaire tangent associé à un élément (z, q) possède une longueur donnée par

$$X^2 = g_{rs}(z, q)\, X^r X^s. \tag{17.14}$$

On peut donc associer à chaque élément (z, q) un espace euclidien qu'on pourra rapporter à un repère naturel $R(z, q)$ formé de n vecteurs $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. On aura dans $R(z, q)$

$$g_{rs} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_s \tag{17.15}$$

et

$$\overrightarrow{dM} = dz^r\, \vec{e}_r. \tag{17.16}$$

On pourra alors définir une *connexion euclidienne* par les formules

$$d\vec{e}_r = \omega_r^{\;s}\, \vec{e}_s, \tag{17.17}$$

où

$$\omega_r^{\;s} = \Gamma^s_{rt}\, dz^t + \frac{1}{m!}\, C^s_{rt_1 \ldots t_m}\, d\, q^{t_1 \ldots t_m}. \tag{17.18}$$

Les fonctions $C^s_{r\, t_1 \cdots t_m}$ se détermineront par les formules

$$\mathcal{C}_{rst_1 \ldots t_m} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial p^{t_1 \ldots t_m}}. \tag{17.19}$$

Quant aux fonctions Γ_{rt}, elles seront soumises aux conditions

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial z^t} = \Gamma_{rst} + \Gamma_{srt}, \tag{17.20}$$

conditions auxquelles il faudra adjoindre de nouvelles conditions pour achever la détermination de la connexion. Ces conditions porteront sur la torsion de l'espace. Nous obtiendrons donc un espace d'éléments de contact à m-dimensions à connexion euclidienne [1].

Nous voyons en conclusion *qu'il existe une large classe d'espaces à connexion euclidienne : ce sont les espaces qu'on obtient*

(1) Au point de vue de l'application de la méthode qui consiste à rechercher une différentielle absolue, cf. KAWAGUCHI (19, 20, 21).

en se donnant convenablement l'aire élémentaire d'une variété à m-*dimensions dans un espace à* n-*dimensions*.

Si à la place de l'élément d'aire on considère l'intégrale m-uple qui lui est associée, les espaces à connexions euclidiennes que nous venons de considérer sont associés à certains types d'intégrales que l'on considère en calcul des variations. Les cas extrêmes où $m=1$ et $m=n-1$ ont été étudiés par E. Cartan. Nous avons développé plus spécialement un cas intermédiaire où $m=2$ et $n=4$, et nous avons esquissé la généralisation.

Remarque. — M. Kawaguchi a donné, en collaboration avec S. Hokari, dans le cas où m et n sont premiers entre eux, des formules qui permettent le calcul du tenseur g_{rs} de la métrique unidimensionnelle à partir des composantes du tenseur $g_{r_1 \cdots r_m;\, s_1 \cdots s_m}$ de la métrique m-bidimensionnelle.

Supposons, par exemple, $m=2$, $n=5$ et soient

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} \cdots\cdots g_{15} \\ g_{51} \cdots\cdots g_{55} \end{vmatrix} \tag{17.21}$$

le tenseur métrique à construire et

$$g_{rs.\,tu} = \frac{\partial^2 \dfrac{1}{2} \mathrm{L}^2}{\partial p^{rs}\, \partial p^{tu}}, \qquad r,s,t,u = 1,2,3,4,5, \tag{17.22}$$

le tenseur connu. Si $g_{rs,\,tu}$ est formé des mineurs du second ordre de (17.21), nous voyons que le mineur gg^{rs} de g_{rs}, qui est un déterminant d'ordre 4, est connu; il pourra se calculer simplement en appliquant la règle de Laplace.

On aura, par exemple :

$$\left.\begin{aligned} gg^{11} = {} & g_{23.23} \cdot g_{45.45} + g_{23.24} \cdot g_{45.53} + g_{23.25} \cdot g_{45.34} \\ & + g_{23.45} \cdot g_{45.23} + g_{23.53} \cdot g_{45.24} + g_{23.34} \cdot g_{45.25}, \end{aligned}\right\} \tag{17.23}$$

C'est ainsi que Kawaguchi procède.

Dans le cas où m et n sont premiers entre eux et quelconques, si p et q désignent les plus petits entiers tels que

$$p \cdot m + 1 = q \cdot n, \tag{17..24}$$

nous voyons que dans la matrice g^q :

$$g^q = \begin{vmatrix} g & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g \end{vmatrix} \tag{17.25}$$

les produits de p termes $g_{r_1 \cdots r_m s_1 \cdots s_m}$ sont des termes du développement d'un mineur d'ordre $p.m = qn - 1$ de g^q, soit d'un mineur égal à $(gg^{rs})^q$. Nous en déduisons ainsi le tenseur de la métrique vectorielle.

Au lieu donc de procéder de m à $m+1$, de $m+1$ à $m+2$ et ainsi de suite, dans les cas où m et n sont premiers entre eux, nous pouvons simplifier le calcul et appliquer les formules de Kawaguchi. La méthode que nous avons suivie a l'avantage d'être valable dans tous les cas. Ajoutons que nous avons précisé à quelles classes de problèmes elle s'applique.

§ 18. Espaces d'éléments de contact m-uples et espaces d'éléments de contact n-m uples dans une variété à n dimensions (2).

La donnée de l'élément d'aire à m dimensions dans un espace à n dimensions permet de faire une théorie des surfaces à m dimensions. On regardera la surface comme lieu de ses éléments de contact m-uples, tangents. Elle permet également de faire une théorie des surfaces à $p = n - m$ dimensions.

En effet, à tout m-vecteur d'élément support (z, q), on peut associer un p-vecteur bien déterminé de même support, et réciproquement. Si $X^{r_1 \cdots r_m}$ sont les composantes contravariantes d'un m-vecteur, on lui associera le p-vecteur supplémentaire ou adjoint de composantes covariantes $Y_{s_1 \dots s_p}$ défini par

$$Y_{s_1 \dots s_p} = \sqrt{g}\, X^{r_1 \dots r_m}, \tag{18.1}$$

où $(r_1, \dots, r_m, s_1 \dots s_p)$ forme une suite à n nombres distincts,

(2) Le cas où $m=1$ a été considéré par E. Cartan (7), § 12; voir également R. Debever (13).

permutation paire de la suite (1, 2, ..., n). Remarquons que g peut, grâce à (17.13), se calculer directement à partir de L. Si le m-vecteur est donné par les composantes covariantes, les composantes contravariantes du p-vecteur associé seront

$$Y^{s_1 \dots s_p} = \frac{1}{\sqrt{g}} X_{r_1 \dots r_m}. \tag{18.2}$$

On vérifie sans peine que les multivecteurs adjoints ont même mesure. En particulier, le p-vecteur unitaire adjoint au m-vecteur unitaire tangent n'est autre que le p-vecteur unitaire transversal ou normal au m-vecteur tangent

$$n_{s_1 \dots s_p} = \sqrt{g}\; l^{r_1 \dots r_m}. \tag{18.3}$$

Grâce à cette correspondance entre m-vecteurs et p-vecteurs, nous pourrons regarder une surface à p dimensions comme un lieu de m-vecteurs; ce seront les m-vecteurs adjoints aux p-vecteurs tangents à la surface à p dimensions considérée. Soient, par exemple,

$$\bar{q}^{r_1 \dots r_p} = \frac{\partial (z^{r_1}, \dots, z^{r_p})}{\partial (v^1, \dots, v^p)} \tag{18.4}$$

les composantes contravariantes du p-vecteur tangent à V_p.

Les multivecteurs adjoints ayant même mesure

$$L^{-1} \cdot \bar{q}^{r_1 \dots r_p} \tag{18.4$'$}$$

sont les composantes du p-vecteur unitaire tangent à V_p. Nous l'identifierons alors au p-vecteur transversal à l'élément $(z, q^{r_1 \dots r_m})$, c'est-à-dire que nous poserons

$$\bar{q}^{r_1 \dots r_p} = \frac{L L_{s_1 \dots s_m}(z, q^{r_1 \dots r_m})}{\sqrt{g}}. \tag{18.5}$$

Les formules (18.5) définissent une correspondance entre les p-vecteurs $\bar{q}^{r_1 \dots r_p}$ et les m-vecteurs $q^{r_1 \dots r_m}$. Résolues par rapport aux composants du m-vecteur, elles nous permettent de définir une *aire* p-*dimensionnelle* L_p^* *associée à l'aire* m *dimensionnelle* L_m :

$$L_m \rightarrow L_p^*. \tag{18.6}$$

L_p^* sera défini par la formule

$$L^*(z, \overline{q}^{r_1 \dots r_p}) = L\left[z, q^{r_1 \dots r_m}(z, \overline{q}^{r_1 \dots r_p})\right], \tag{18.7}$$

où dans le second membre les $q^{r_1 \dots r_m}$ sont exprimés en fonction des $\overline{q}^{r_1 \dots r_p}$, grâce aux relations (18.5).

On vérifie que l'on a

$$\frac{\partial\, \overline{q}^{r_1 \dots r_p}}{\partial\, q^{t_1 \dots t_m}} = g_{s_1 \dots s_m, t_1 \dots t_m} - l_{s_1 \dots s_m} A_{t_1 \dots t_m}, \tag{18.8}$$

où

$$A_{t_1 \dots t_m} = \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial p^{t_1 \dots t_m}}. \tag{18.9}$$

Le déterminant de la transformation (18.5) est donné, grâce à (18.8), par

$$g^{\binom{n-1}{m-1} - \frac{1}{2}\binom{n}{m}}; \tag{18.10}$$

il est donc différent de zéro.

D'autre part, grâce à (18.8), nous aurons

$$\frac{\partial\, q^{t_1 \dots t_m}}{\partial\, \overline{q}^{r_1 \dots r_p}} = \sqrt{g}\,(g^{s_1 \dots s_m, t_1 \dots t_m} + l^{t_1 \dots t_m} \cdot A^{s_1 \dots s_m}). \tag{18.11}$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial L^*}{\partial\, \overline{q}^{r_1 \dots r_p}} = L^*_{r_1 \dots r_p} = \sqrt{g}\,(l^{s_1 \dots s_m} + A^{s_1 \dots s_m}). \tag{18.12}$$

L'aire p dimensionnelle élémentaire associée à L_p^* pourra se mettre sous la forme

$$\Omega_p^* = \frac{1}{m!} \sqrt{g}\,(l^{s_1 \dots s_m} + A^{s_1 \dots s_m})\, d\sigma_{s_1 \dots s_m}. \tag{18.13}$$

où

$$d\sigma_{s_1 \dots s_m} = [dz^{r_1} \cdots dz^{r_p}]. \tag{18.13'}$$

Rappelons que l'aire élémentaire à m dimensions est

$$\Omega_m = \frac{1}{m!}\, l_{s_1 \dots s_m} [dz^{s_1} \cdots dz^{s_m}], \tag{18.14}$$

et la forme adjointe à Ω_m,

$$\varpi_p = \frac{1}{p!}\, n_{r_1 \dots r_p} [dz^{r_1} \cdots dz^{r_p}] = \frac{1}{m!} \sqrt{g}\, l^{s_1 \dots s_m}\, d\sigma_{s_1 \dots s_m}. \tag{18.15}$$

Cela étant, dans quel cas l'espace fondé sur l'aire p-dimensionnelle Ω_p^* sera-t-il identique à l'espace fondé sur l'aire m-dimensionnelle Ω_m à laquelle Ω_p^* est associé ? En particulier, dans quel cas l'aire m-dimensionnelle Ω_m^{**}, associée à Ω_p^* comme Ω_p^* est associé à Ω_m, est-elle identique à Ω_m ?

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que la transversalité se conserve au cours de la transformation (18.5), c'est-à-dire que si partant du p-vecteur $q^{r_1 \cdots r_p}$, on passe au m-vecteur $q^{s_1 \cdots s_m}$ transversal pour L à $q^{r_1 \cdots r_p}$; il faut que le m-vecteur $q^{s_1 \cdots s_m}$ soit transversal au p-vecteur $q^{r_1 \cdots r_p}$ pour L*.

Or, si nous revenons à (18,12), $L^*_{r_1 \cdots r_p}$ définit précisément un m-vecteur transversal pour L* à $q^{r_1 \cdots r_p}$; il faut donc qu'on ait

$$A_{r_1 \ldots r_m} = 0. \tag{18.16}$$

La condition (18.16) est également suffisante. On peut vérifier aisément que les métriques associées à L* et L sont identiques. D'autre part, on a

$$\Omega_p^* = \varpi_p, \tag{18.17}$$

et la forme ϖ_m^* adjointe à Ω_p^* est identique à Ω_m :

$$\varpi_m^* = \Omega_m; \tag{18.18}$$

enfin on a à la fois

$$[d\Omega_m \cdot \varpi_p] = [\Omega_m \cdot d\,\varpi_p] = 0. \tag{18.19}$$

Les formules (18.17), (18.18), (18.19) montrent bien le *caractère involutif* du passage $\Omega_m \longrightarrow \Omega_p \longrightarrow \Omega_m$; l'aire m-dimensionnelle Ω_m et l'aire p-dimensionnelle Ω_p jouent un rôle absolument symétrique, et l'on peut sans peine étudier en détail l'identification des espaces associés respectivement à Ω_m et ϖ_p.

C'est là une propriété remarquable des espaces à tenseur $A_{r_1 \cdots r_m}$ nul.

*
* *

Ces considérations prennent une forme curieuse si $m=p$, c'est-à-dire si $n=2m$ (c'est en particulier le cas dans la première partie de ce travail où $m=2$ et $n=4$).

Une fois définie l'aire m-dimensionnelle, on pourra définir une aire m-dimensionnelle adjointe. Si la première est l'aire d'une surface considérée comme lieu de ses éléments tangents, la seconde sera l'aire d'une surface considérée comme lieu de ses éléments normaux; en général les géométries associées à ces deux aires bidimensionnelles sont distinctes. Elles ne sont identiques que dans le cas où le tenseur $A_{r_1 \cdots r_m}$ est nul, et dans ce cas seulement.

L'existence de deux géométries distinctes n'est pas contradictoire, car un même élément de surface ne peut pas être considéré à la fois comme transversal et tangent à un m-plan donné. S'il en était ainsi, on aurait

$$n_{r_1 \dots r_m} = l_{r_1 \dots r_m}. \tag{18.20}$$

Or

$$n_{r_1 \dots r_m} l^{r_1 \cdots r_m} = 0. \tag{18.21}$$

$l^{r_1 \cdots r_m}$ et $n_{r_1 \cdots r_m}$ étant des m-vecteurs, (18.21) serait en contradiction avec la condition

$$l_{r_1 \dots r_m} l^{r_1 \cdots r_m} = 1,$$

qui exprime que (l) est un m-vecteur unitaire (l'existence du m-vecteur unitaire nécessite l'hypothèse $L > 0$ ou tout au moins $L \neq 0$).

*
* *

Il est enfin un dernier point sur lequel nous voudrions attirer l'attention. Nous avons toujours défini l'espace linéaire tangent à une variété à m dimensions par un m-vecteur. On peut aussi le définir par un p-vecteur.

Au m-vecteur $q^{r_1 \cdots r_m}$ contravariant nous pouvons associer une densité p-vectorielle que nous qualifierons de complémentaire par les formules

$$\varphi_{s_1 \dots s_p} = q^{r_1 \cdots r_m}. \tag{18.22}$$

On peut développer toutes les considérations qui précèdent en définissant une aire m-dimensionnelle à partir d'une mesure

$$L(z^r, \varphi_{s_1 \dots s_p}) \tag{18.23}$$

d'une densité p-vectorielle.

Dans les mêmes conditions, une aire p-dimensionnelle sera définie par la mesure d'une densité m-vectorielle

$$L^*(z, \varphi_{s_1 \dots s_m}). \tag{18.24}$$

Cette façon de faire peut être utile si $m > \frac{n}{2}$; c'est en particulier ce que l'on fera si $m = n - 1$; l'aire élémentaire sera définie par la mesure d'un vecteur (densité vectorielle covariante) :

$$L(z, \varphi_r). \tag{18.25}$$

On peut alors envisager les rapports entre la géométrie fondée sur l'aire m-dimensionnelle, et sur l'aire p-dimensionnelle comme liée au fait que dans un cas on se donne une mesure d'un m-vecteur contravariant, et dans l'autre cas une mesure d'un m-vecteur densité. C'est le point de vue de Schouten et Haantjes dans le cas où $m=1$ [3].

---

[3] SCHOUTEN et HAANTJES (31).

BIBLIOGRAPHIE

1. Carathéodory, C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, éd. B. G. Teubner, 1935.
2. Cartan, E., Les sous-groupes des groupes continus de transformations (*Ann. Éc. norm. sup.*, pp. 57-194, 1908).
3. — La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile (*Bull. Sc. math.*, t. XXXIV, pp. 250-284, 1910).
4. — La géométrie des espaces de Riemann (*Mém. Sc. math.*, fasc. 9, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1925).
5. — Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés (*Mathematica*, t. IV, pp. 114-136, 1930).
6. — Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire (*A.S.I.*, n° 72, éd. Hermann, Paris, 1933).
7. — Les espaces de Finsler (*Ibid.*, n° 79, éd. Hermann, Paris, 1934).
8. — Selecta, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1939.
9. — Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques (*A.S.I.*, n° 994, éd. Hermann, Paris, 1945).
10. — Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, 2e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1946.
11. Clebsch, A. et Lindeman, F., Vorlesungen über Geometrie, éd. Teubner, Leipzig, 1891.
12. Davies, E. T., The geometry of a multiple integral (*Journ. of London Math. Soc.*, vol. XX, pp. 163-171, 1945).
13. Debever, R., Sur quelques problèmes de géométries dérivées du calcul des variations (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., t. XXVIII, pp. 794-808, 1942).
14. De Donder, Th., Théorie des invariants intégraux, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1927.
15. — Théorie invariantive du calcul des variations, nouv. éd., Gauthier-Villars, Paris, 1935.
16. Delens, P. La métrique angulaire des espaces de Finsler et la géométrie différentielle projective (*A.S.I.*, n° 80, éd. Hermann, Paris, 1934).
17. Finsler, P., Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Raümen (*Dissert.*, Göttingen, 1918).
18. Kähler, E., Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, éd. Teubner, 1934.

19. KAWAGUCHI, A., Ein metrischer Raum der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist (*Monatshft. für Math. u. Phys.*, 43, pp. 289-297, 1936).

20. — Theorie des Raumes mit dem Zusammenhang der von Matrizen abhängig ist (*Ibid.*, 44, pp. 131-152, 1936).

21. — Ueber die n-dimensionalen metrischen Raüme mit von m-dimensionalen Flächenelement abhängigem Zusammenhang (*Journal Fac. Sc. of Hokkaido Imp. Univ.*, 9, pp. 153-188, 1940).

22. KAWAGUCHI, A. et HOKARI, S., Die Grundlegung der Geometrie der 5. dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des 2-dimensionalen Flächeninhalts (*Proc. Imp. Acad. Jap.*, 16, pp. 313-319, 1940).

23. — — Die Grundlegung der Geometrie der n-dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des K-dimensionalen Flächeninhalts (*Ibid.*, 16, pp. 320-325, 1940).

24. KNESER, H., Homogene Funktionen auf der Grassmanschen Mannigfaltigkeit (*Bull. Soc. Math. de Grèce*, 20, 101-103, 1940).

25. KOENIGS, G., La géométrie réglée et ses applications, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1895.

26. LEPAGE, TH., Champs stationnaires, champs géodésiques et formes intégrables (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., t. XXVIII, pp. 73-92, 247-265, 1942).

27. LIBOIS, P., De l'espace métrique à l'espace projectif (*Comptes rendus IIe Congrès National des Sciences*, pp. 97-104, Bruxelles, 1935).

28. — Les Espaces (Conf. du Séminaire de synthèse scientifique de l'U.L.B., mars 1946).

29. LORENT, R., L'électromagnétisme dans l'espace amorphe et dans certains espaces métriques (*Thèse*, Bruxelles, octobre 1944).

30. RIEMANN, B., Œuvres mathématiques (trad. Laugel), éd. Gauthier-Villars, Paris, 1898.

31. SCHOUTEN, J. et HAANTJES, A., Ueber die Festlegung von allgemein Maszbestimmung und Ubertragung in bezug auf Ko- und kontravariante Vektordichten (*Monatshft. für Math. u. Phys.*, 43, pp. 161-176, 1936).

32. VAN DANTZIG, D., The fundamental equations of electrodynamics independent of metrical geometry (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. XXX, pp. 421-427, 1934).

33. WEDDERBURN, J., Lectures on Matrices, éd. Am. Math. Soc. New York, 1934.

34. ZINDLER, K., Liniengeometrie mit anwendungen, 2 vol., éd. Göschen, Leipzig, 1902.

THÈSES

1. Il existe dans la classification des formes quadratiques alternées intégrables de classe 4 dans le groupe canonique, trois classes algébriquement distinctes, si on se limite aux formes en involution avec la forme fondamentale du groupe canonique. On peut les caractériser simplement, grâce à une propriété de divisibilité d'une forme cubique alternée.

*
* *

2. Le lemme algébrique suivant : Toute forme alternée de degré p qui s'annule sur tout p-plan et qui est simple est identiquement nulle, permet d'établir simplement des identités remarquables utiles à l'étude des problèmes paramétriques du calcul des variations.

*
* *

3. Il n'existe pas de fonction de six variables solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^4} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x^5} + \frac{\partial f}{\partial x^4} \frac{\partial f}{\partial x^6} = 0$$

qui satisfasse aux propriétés suivantes :

a) $f > 0$ pour les valeurs non toutes nulles des x;

b) f est deux fois différentiable et positivement homogène en les x;

c) la matrice $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right|$ est de rang 5.

Il en résulte qu'un théorème de H. Kneser (*Mathematische Zeitschrift*, 1936, p. 451) est sans objet.

TABLE DES MATIÈRES