Université Paris 7, Master 1 de Mathématiques Année 2007/2008

Corrigé de l'examen du 5 mai 2008

Durée : 3 heures. Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1

Soit $\mathcal{H}$ un espace Hilbert complexe séparé et $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ un opérateur (compact) *auto-adjoint* et *positif*. On note $0 < \cdots \leq \lambda_n \leqq \lambda_{n-1} \leq \cdots \leq \lambda_1 \leq \lambda_0$ les valeurs propres de T (répétées s'il y a des valeurs propres multiples). On note $(g_k, f_n)_{k\in K; n\in\mathcal{N}}$ une base hilbertienne hermitienne de $\mathcal{H}$, telle que $(g_k)_{k\in K}$ soit une base hilbertienne de Ker$T$, $(f_n)_{n\in\mathcal{N}}$ soit une base de $\overline{\text{Im}T}$ et, $\forall n \in \mathcal{N} \subset \mathbb{N}$, $Tf_n = \lambda_n f_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{H}$ de dimension n. Enfin on note $F_0 := \{0\} \in \mathcal{F}_0$, $F_n := \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, \cdots, f_{n-1}) \in \mathcal{F}_n$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall x \in F_n^\perp \setminus \{0\}$, $\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle} \leq \lambda_n$. En déduire que :

$$\sup_{x\in F_n^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle} = \lambda_n.$$

Solution — Tout vecteur $x \in F_n^\perp$ peut s'écrire comme la somme hilbertienne $x = \sum_{k\in K} x_k^0 g_k + \sum_{j\geq n} x_j f_j$ et alors

$$\langle x,x\rangle = \sum_{k\in K} |x_k^0|^2 + \sum_{j\geq n} |x_j|^2 \geq \sum_{j\geq n} |x_j|^2 \quad \text{et} \quad \langle x,Tx\rangle = \sum_{j\geq n} \lambda_j |x_j|^2 \leq \lambda_n \sum_{j\geq n} |x_j|^2,$$

d'où l'on déduit l'inégalité $\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle} \leq \lambda_n$. Mais par ailleurs, l'égalité a lieu pour $x = f_n \in F_n^\perp$, on en déduit donc $\sup_{x\in F_n^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle} = \lambda_n$.

b) Soit $F \in \mathcal{F}_n$. Montrer que $F^\perp \cap F_{n+1} \neq \{0\}$. En déduire que : $\exists x \in F^\perp \setminus \{0\}$ tel que $\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle} \geq \lambda_n$ et, ensuite, que :

$$\inf_{F\in\mathcal{F}_n} \sup_{x\in F^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle} \geq \lambda_n.$$

Solution — Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de F et considérons $\alpha \in \mathcal{L}(F_{n+1}, \mathbb{R}^n)$ défini par $x \longmapsto (\langle e_j, x\rangle)_{1\leq j\leq n}$. Alors $F^\perp \cap F_{n+1} = \text{Ker}\alpha$ est de dimension supérieure ou égale à 1 à cause de l'identité $\text{dimKer}\alpha + \text{dimIm}\alpha = n+1$. Donc $F^\perp \cap F_{n+1} \neq \{0\}$. Donc, $\forall F \in \mathcal{F}_n$, $\exists x \in (F^\perp \cap F_{n+1}) \setminus \{0\}$. Alors $x = \sum_{j=0}^n x_j f_j$, si bien que :

$$\langle x,Tx\rangle = \sum_{j=0}^n \lambda_j |x_j|^2 \geq \lambda_n \sum_{j=0}^n |x_j|^2 = \langle x,x\rangle,$$

et donc $\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle} \geq \lambda_n$. Ainsi on a : $\forall F \in \mathcal{F}_n$, $\sup_{x\in F^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle} \geq \lambda_n$ et on en déduit le résultat demandé en passant à l'infimum sur tous les $F \in \mathcal{F}_n$.

c) Montrer que :

$$\lambda_n = \inf_{F\in\mathcal{F}_n} \sup_{x\in F^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle}. \qquad (1)$$

Solution — On a montré que $\inf_{F\in\mathcal{F}_n}\sup_{x\in F^\perp\setminus\{0\}}\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle}\geq\lambda_n$ à la question b) et on déduit de la question a) qu'il y a égalité pour $\mathcal{F}_n\ni F=F_n$.

d) Montrer que : $\inf_{x\in F_{n+1}\setminus\{0\}}\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle}=\lambda_n$.

Solution — Pour tout $x\in F_{n+1}\setminus\{0\}$ on a $x=\sum_{j=0}^n x_jf_j$ et $Tx=\sum_{j=0}^n\lambda_jx_jf_j$, donc on en déduit que $\forall x\in F_{n+1}\setminus\{0\}$, $\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle}\geq\lambda_n$ comme au b). Donc $\inf_{x\in F_{n+1}\setminus\{0\}}\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle}\geq\lambda_n$. La borne inférieure dans cette inégalité est atteinte pour $x=f_n$, d'où le résultat.

e) Soit $F\in\mathcal{F}_{n+1}$. Montrer que $F\cap F_n^\perp\neq\{0\}$. En déduire que : $\exists x\in F\setminus\{0\}$ tel que $\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle}\leq\lambda_n$ et, ensuite, que :

$$\sup_{F\in\mathcal{F}_{n+1}}\inf_{x\in F\setminus\{0\}}\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle}\leq\lambda_n.$$

Solution — On a : $F\cap F_n^\perp\neq\{0\}$ pour la même raison qu'à la question b) : le fait d'être dans $F_n^\perp$ impose au plus n contraintes linéairement indépendantes dans F, qui est de dimension $n+1$, donc cette intersection est de dimension au moins égale à 1. Donc, pour tout $F\in\mathcal{F}_{n+1}$, choisissons $x\in F\cap F_n^\perp\neq\{0\}$ et appliquons lui le résultat de la question a). On obtient ainsi l'inégalité $\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle}\leq\lambda_n$. Cela entraîne a fortiori que, $\forall F\in\mathcal{F}_{n+1}$, $\inf_{x\in F\setminus\{0\}}\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle}\leq\lambda_n$, qui entraîne à son tour le résultat.

f) Montrer que :

$$\lambda_n=\sup_{F\in\mathcal{F}_{n+1}}\inf_{x\in F\setminus\{0\}}\frac{\langle x,Tx\rangle}{\langle x,x\rangle}. \tag{2}$$

Solution — Le raisonnement est le même qu'à la question c) : (2) est une conséquence de l'inégalité démontrée à la question précédente et de l'inégalité inverse, qui elle-même découle du résultat de la question d).

Exercice 2

On considère $\mathcal{H}:=\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})\simeq\ell^2(\mathbb{Z})$ et on note $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base hilbertienne canonique (hermitienne) de $\mathcal{H}$ (i.e. ϵ_n est la suite qui s'annule pour tout entier relatif, sauf pour n, où elle prend la valeur 1). On note $L,R\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ les opérateurs définis par :

$$L\epsilon_n=\epsilon_{n-1}\quad\text{et}\quad R\epsilon_n=\epsilon_{n+1},\quad\forall n\in\mathbb{Z}$$

et $A:=L+R\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

a) Déterminer L^* et R^*. En déduire que A est auto-adjoint.

Solution — Pour tout $x=\sum_{n\in Z}x_n\epsilon_n$ et $y=\sum_{n\in Z}y_n\epsilon_n$, on a $Ly=\sum_{n\in Z}y_n\epsilon_{n-1}=\sum_{n\in Z}y_{n+1}\epsilon_n$ et donc :

$$\langle x,Ly\rangle=\sum_{n\in Z}x_ny_{n+1}=\sum_{n\in Z}x_{n-1}y_n=\langle Rx,y\rangle,$$

car $Rx=\sum_{n\in Z}x_n\epsilon_{n+1}=\sum_{n\in Z}x_{n-1}\epsilon_n$. Donc $L^*=R$. De même on obtient que $R^*=L$. On en déduit tout de suite que A est auto-adjoint.

b) On note $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ l'isométrie inversible définie par : $(U\epsilon_n)(\theta) = e^{i2\pi n\theta}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (isomorphisme de la série de Fourier). Pour toute fonction $m \in L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ on note $\widehat{m} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$ l'opérateur (dit de multiplication) défini par :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \quad (\widehat{m}f)(\theta) = m(\theta)f(\theta), \quad \text{p.p.}$$

Déterminer ULU^{-1} et URU^{-1} et montrer qu'il coïncident avec des opérateurs de multiplication que l'on précisera. En déduire UAU^{-1}.

Solution — Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dont la série de Fourier est $f(\theta) = \sum_{n\in Z} a_n e^{i2\pi n\theta}$, on a $U^{-1}f = \sum_{n\in Z} a_n\epsilon_n$ et donc $LU^{-1}f = \sum_{n\in Z} a_n\epsilon_{n-1}$, ce qui entraîne que :

$$ULU^{-1}f(\theta) = \sum_{n\in Z} a_n e^{i2\pi(n-1)\theta} = e^{-i2\pi\theta}\sum_{n\in Z} a_n e^{i2\pi n\theta} = e^{-i2\pi\theta}f(\theta).$$

Donc ULU^{-1} coïncide avec l'opérateur de multiplication par la fonction $\theta \longmapsto e^{-i2\pi\theta}$. De même, URU^{-1} coïncide avec l'opérateur de multiplication par la fonction $\theta \longmapsto e^{i2\pi\theta}$. On en déduit que $UAU^{-1} = ULU^{-1} + URU^{-1}$ coïncide avec l'opérateur de multiplication par la fonction $\theta \longmapsto e^{i2\pi\theta} + e^{-i2\pi\theta} = 2\cos(2\pi\theta)$, i.e. $UAU^{-1} = 2\,\widehat{\cos(2\pi\theta)}$.

c) Soit $\psi \in \mathcal{H}$ non nul et $g := U\psi$. On note :

$$F_\psi := \{P(A)\psi |\ P \in \mathbb{C}[X]\} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{A^n\psi |\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Démontrer que UF_ψ, l'image de F_ψ par U, est égale à : $\mathcal{P}_+g := \{fg |\ f \in \mathcal{P}_+\}$, où

$$\mathcal{P}_+ := \left\{\left[\theta \longmapsto \sum_{-N\leq n\leq N} a_n e^{i2\pi n\theta}\right] \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) |\ N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}, a_{-n} = a_n\right\}.$$

Caractériser l'adhérence de $\mathcal{P}_+$ dans $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Solution — Une conséquence de la question précédente est que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U(A^n\psi) = UA^nU^{-1}U\psi = (UAU^{-1})^n g = (2\cos(2\pi\theta))^n g,$$

donc, plus généralement, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $U(P(A)\psi) = P(2\cos(2\pi\theta))g$. On en déduit que UF_ψ coïncide avec $\{P(2\cos(2\pi\theta))g |\ P \in \mathbb{C}[X]\}$. Ainsi il suffit de vérifier que l'ensemble $\mathcal{Q} := \{P(2\cos(2\pi\theta)) |\ P \in \mathbb{C}[X]\}$ coïncide avec $\mathcal{P}_+$: pour cela, démontrons par récurrence sur N que l'ensemble $\mathcal{P}_N := \left\{\sum_{-N\leq n\leq N} a_n e^{i2\pi n\theta} |\ a_n \in \mathbb{C}, a_{-n} = a_n\right\}$ est identique à $\mathcal{Q}_N := \{P(2\cos(2\pi\theta)) |\ \text{deg}P \leq N\}$. Pour $N = 0$, le résultat est immédiat. Supposons donc que $\mathcal{P}_{N-1} = \mathcal{Q}_{N-1}$ et montrons que $\mathcal{P}_N = \mathcal{Q}_N$. Nous utilisons l'identité :

$$(e^{i2\pi\theta} + e^{-i2\pi\theta})^N = \sum_{j=0}^{N} \frac{N!}{(N-j)!j!} e^{i2\pi(2j-N)\theta} = e^{i2\pi N\theta} + e^{-i2\pi N\theta} + \mathcal{R}_N(\theta), \qquad (3)$$

où $\mathcal{R}_N(\theta) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{N!}{(N-j)!j!} e^{i2\pi(2j-N)\theta}$. Il est clair que $\mathcal{R}_N \in \mathcal{P}_{N-1} = \mathcal{Q}_{N-1}$ (noter en particulier que $\mathcal{R}_N(\theta) = \mathcal{R}_N(-\theta)$). On en déduit que $e^{i2\pi N\theta} + e^{-i2\pi N\theta} \in \mathcal{Q}_N$ et $(e^{i2\pi\theta} +$

$e^{-i2\pi\theta})^N \in \mathcal{P}_N$. Et tout élément de $\mathcal{P}_N$ s'écrit $a(e^{i2\pi N\theta}+e^{-i2\pi N\theta})+\alpha(\theta)$, où $\alpha \in \mathcal{P}_{N-1}$, et est donc contenu aussi dans $\mathcal{Q}_N$. De même tout élément de $\mathcal{Q}_N$ s'écrit $b(e^{i2\pi\theta}+e^{-i2\pi\theta})^N+\beta(\theta)$, où $\beta \in \mathcal{Q}_{N-1}$, et est donc contenu aussi dans $\mathcal{P}_N$.

Enfin l'adhérence de $\mathcal{P}_+$ dans $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est l'ensemble des fonctions *paires* de la variable θ.

d) Soit ψ et g comme dans la question précédente. On définit $h \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ par :

$$h(\theta) = 2i\sin(2\pi\theta)\overline{g(-\theta)}.$$

Montrer que, $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{P}_+$, $\langle f_1 g, f_2 h\rangle_{L^2} = 0$.

Solution — Pour toutes fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{P}_+$, on a :

$$\langle f_1 g, f_2 h\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \overline{f_1(\theta)g(\theta)} f_2(\theta) 2i\sin(2\pi\theta)\overline{g(-\theta)}d\theta,$$

qui s'annule car les fonctions $\theta \longmapsto \overline{f_1(\theta)}f_2(\theta)$ et $\theta \longmapsto \overline{g(\theta)g(-\theta)}$ sont paires et la fonction $\theta \longmapsto 2i\sin(2\pi\theta)$ est impaire, si bien que $\langle f_1 g, f_2 h\rangle_{L^2}$ est la valeur de l'intégrale d'une fonction impaire.

e) Déduire des deux questions précédentes que A n'admet pas de vecteur cyclique.

Solution — Pour tout $\psi \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$, soit $g := U\psi$ et soit $\chi := U^{-1}h \in \mathcal{H}$, où h est défini à partir de g comme à la question précédente. Alors, en vertu de l'identité de Parseval, pour tous polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[X]$,

$$\langle P_1(A)\psi, P_2(A)\chi\rangle = \langle UP_1(A)\psi, UP_2(A)\chi\rangle_{L^2} = \langle f_1 g, f_2 h\rangle_{L^2},$$

où $f_1, f_2 \in \mathcal{P}_+$ sont tels que $\widehat{f_1} = UP_1(A)U^{-1}$ et $\widehat{f_2} = UP_2(A)U^{-1}$ (rappel : on note $\widehat{f}$ l'opérateur de multiplication par la fonction f). Donc, d'après le résultat de la question précédente, $\langle P_1(A)\psi, P_2(A)\chi\rangle = 0$. Cela entraîne que $F_\psi \perp F_\chi$. Comme $F_\chi \neq \{0\}$, on en déduit que F_ψ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$, c'est à dire que ψ n'est pas cyclique pour A.

f) Soit $\psi_1 := \epsilon_0$ et $\psi_2 := \epsilon_1 - \epsilon_{-1}$. Identifier UF_{ψ_1} et UF_{ψ_2}. En déduire que $\mathcal{H} = \overline{F_{\psi_1}} \oplus \overline{F_{\psi_1}}$.

Solution — On remarque tout de suite que $g_1 := U\psi_1$ est la fonction constante égale à 1 et $g_2 := U\psi_2$ est la fonction définie par $g_2(\theta) = 2i\sin(2\pi\theta)$. Donc

$$UF_{\psi_1} = \mathcal{P}_+ \quad \text{et} \quad UF_{\psi_1} = \{f 2i\sin(2\pi\theta) |\ f \in \mathcal{P}\}$$

et, d'après le résultat de la question c), l'adhérence de UF_{ψ_1} dans $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est l'ensemble des fonctions paires, tandis que,de façon similaire, l'adhérence de UF_{ψ_2} est l'ensemble des fonctions impaires. Donc $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \overline{UF_{\psi_1}} \oplus \overline{UF_{\psi_2}}$ (puisque toute fonction sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se décompose de façon unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire). Donc, comme U est unitaire, on en déduit que $\mathcal{H} = \overline{F_{\psi_1}} \oplus \overline{F_{\psi_2}}$.

g) Construire une isométrie inversible $S : \mathcal{H} \longrightarrow L^2([-2,2],\mathbb{C}) \oplus L^2([-2,2],\mathbb{C})$ telle que

$$\forall (f_1, f_2) \in L^2([-2,2],\mathbb{C}) \oplus L^2([-2,2],\mathbb{C}), \quad \left(SAS^{-1}\right)(f_1, f_2) = (\widehat{x}f_1, \widehat{x}f_2).$$

Solution — Suivant le cours, on définit l'opérateur $S_1 : F_{\psi_1} \longrightarrow L^2([-2,2], d\mu_{\psi_1})$ (où $d\mu_{\psi_1}$ est la mesure sur $[-2,2]$ définie par $\langle \psi_1, f(A)\psi_1\rangle = \int_{-2}^{2} f(x)d\mu_{\psi_1}$) comme étant l'application qui, à $P(A)\psi_1$ (où $P \in \mathbb{C}[X]$), associe $P|_{[-2,2]}$. Cet opérateur est une isométrie de F_{ψ_1} dans $L^2([-2,2], d\mu_{\psi_1})$ qui s'étend en un isomorphisme isométrique, que nous noterons toujours S_1, entre $\overline{F_{\psi_1}}$ et $L^2([-2,2], d\mu_{\psi_1})$. De plus S_1 satisfait la propriété $S_1(Au) = \widehat{x} S_1 u$, $\forall u \in \overline{F_{\psi_1}}$. De même on construit un opérateur $S_2 : \overline{F_{\psi_2}} \longrightarrow L^2([-2,2], d\mu_{\psi_1})$ en remplaçant ψ_1 par ψ_2 et qui possède des propriétés analogues. Alors, comme d'après la question suivante, $\mathcal{H} = \overline{F_{\psi_1}} \oplus \overline{F_{\psi_2}}$, on peut fabriquer un opérateur $S : \mathcal{H} \longrightarrow L^2([-2,2], d\mu_{\psi_1}) \oplus L^2([-2,2], d\mu_{\psi_2})$ en posant $Su = (S_1 u_1, S_2 u_2)$ pour tout $u \in \mathcal{H}$, avec $u = u_1 + u_2$ et $(u_1, u_2) \in \overline{F_{\psi_1}} \times \overline{F_{\psi_2}}$. Cet opérateur possède les propriétés requises.

Exercice 3

On se donne une fonction $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (i.e. de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$) et, plus précisément, on suppose que son support est inclus dans $[-1, 1]$. On considère l'opérateur non borné $A = \left(H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), -\frac{d^2}{dx^2} + u\right)$, dont le domaine est l'espace $H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui admettent des dérivées premières et secondes f' et f'' au sens des distributions, dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et qui est défini par :

$$\forall f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u\right) f = -f'' + uf.$$

a) Montrer que A est un opérateur auto-adjoint.
Remarque : il y avait une erreur dans l'énoncé, où l'on demandait de montrer que A et positif, alors que ce n'est pas le cas en général puisque, manifestement, l'énoncé de la question c) signifie que c'est l'opérateur $A + \alpha$ qui est positif.
Solution — Nous devons d'abord déterminer le domaine de A^*, c'est à dire :

$$D(A^*) := \{g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) |\ \exists C > 0, \forall f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), |\langle g, Af\rangle| \leq C||f||_{L^2}\}.$$

Comme $\langle g, Af\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} \left(-f''(x) + u(x)f(x)\right) dx$ et comme on a toujours :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} u(x) f(x) dx\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|\, ||g||_{L^2} ||f||_{L^2},$$

on en déduit que $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ appartient à $D(A^*)$ si et seulement si $\exists C > 0$, $\forall f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\left|\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} f''(x) dx\right| \leq C||f||_{L^2}$, c'est à dire si $H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ni f \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} f''(x) dx$ s'étend en une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'après le théorème de Riesz, cela équivaut au fait qu'il existe $h \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tel que $\forall f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} f''(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{h(x)} f(x) dx$. Cela signifie exactement que $g \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que la dérivée seconde faible de g, que l'on notera g'', coïncide avec h. Donc $D(A^*) = H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = D(A)$. Enfin, après cette discussion, il est clair que : $\forall f, g \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$\langle g, Af\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} \left(-f''(x) + u(x)f(x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(-\overline{g''(x)} + u(x)\overline{g(x)}\right) f(x) dx = \langle Ag, f\rangle,$$

donc A est auto-adjoint.
b) Montrer que A est fermé.
Solution — Il s'agit de montrer que le graphe de A :

$$Gr(A) := \{(f, -f'' + uf) | \ f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})\} \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

est fermé. Soit donc $(f_n, -f_n'' + uf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $Gr(A)$ qui converge vers (f, g) dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors on déduit du fait que $f_n \to f, L^2$ que $uf_n \to uf, L^2$ et donc que $f_n'' = uf_n - (-f_n'' + uf_n) \to uf - g, L^2$.

A présent on écrit le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n'' est la dérivée faible seconde de f_n, c'est à dire $\int_{\mathbb{R}} (\varphi f_n'' + \varphi'' f_n)\, dx = 0$, $\forall \varphi \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et on fait tendre $n \to \infty$. On obtient ainsi : $\int_{\mathbb{R}} (\varphi(uf - g) + \varphi'' f)\, dx = 0$, $\forall \varphi \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On en déduit que $f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, avec $f'' = uf - g \iff g = -f'' + uf$. Donc $(f, g) \in Gr(A)$.
c) On se donne une constante $\alpha > 0$ telle que $u + \alpha \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. On pose $T := A + \alpha + \varepsilon$. Montrer que :

$$\forall f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \langle f, Tf \rangle_{L^2} \geq \varepsilon ||f||_{L^2}^2.$$

En déduire que : $\forall f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $||Tf||_{L^2} \geq \varepsilon ||f||_{L^2}$.
Solution — Pour tout $f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a $\int_{\mathbb{R}} \overline{f}(-f'')dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{f'} f' dx = \int_{\mathbb{R}} |f'|^2 dx$, donc

$$\langle f, Tf \rangle = \langle f, -f'' + uf + \alpha f + \varepsilon f \rangle = ||f'||_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}} (u + \alpha)|f|^2 dx + \varepsilon ||f||_{L^2}^2 \geq \varepsilon ||f||_{L^2}^2.$$

Cela entraîne immédiatement

$$||f||_{L^2} ||Tf||_{L^2} \geq \langle f, Tf \rangle \geq \varepsilon ||f||_{L^2}^2$$

en utilisant Cauchy–Schwarz et donc $||Tf||_{L^2} \geq \varepsilon ||f||_{L^2}$, en simplifiant par $||f||_{L^2}$.
d) (i) montrer que T est injectif ;
Solution — Cela revient à montrer que $\forall f \in D(T)$, $Tf = 0$ entraîne $f = 0$, ce qui est une conséquence immédiate de l'inégalité $||Tf||_{L^2} \geq \varepsilon ||f||_{L^2}$.

(ii) montrer que $\mathrm{Im} T$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;
Solution — Nous allons montrer que $(\mathrm{Im} T)^{\perp} = \{0\}$, ce qui entraîne que $\mathrm{Im} T$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par un résultat du cours. Nous utiliserons, pour cela, le fait que T^* est injectif, qui est une conséquence immédiate du fait que T est auto-adjoint et du résultat de la question précédente. En effet, soit $g \in (\mathrm{Im} T)^{\perp}$, c'est à dire tel que :

$$\forall f \in D(T), \quad \langle g, Tf \rangle = 0. \tag{4}$$

Une première conséquence de (4) est que $g \in D(T^*)$, d'après la définition même de $D(T^*)$. Cela nous permet de réécrire (4) sous la forme :

$$\forall f \in D(T), \quad \langle T^* g, f \rangle = 0, \tag{5}$$

qui signifie que $T^* g \in D(T)^{\perp}$. Comme $D(T) = H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on en conclut que $T^* g = 0$ et donc que $g = 0$, puisque T^* est injectif.

(iii) montrer que ImT est fermée dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$;

Solution — Nous considérons une suite $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui prend ses valeurs dans ImT et qui converge dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ vers une limite g. En particulier $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et on en déduit, à l'aide de l'inégalité $||f_n - f_m||_{L^2} \leq \varepsilon^{-1}||Tf_n - Tf_m||_{L^2}$, que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite f dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Donc $(f_n, Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (f,g) dans $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \times L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Comme $(f_n, Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $Gr(T)$, qui est fermé, on en déduit que $(f,g) \in Gr(T)$, i.e. $g = Tf \in$ ImT. Donc ImT est fermé.

(iv) conclure que T est surjectif et qu'il admet un inverse borné auto-adjoint que l'on notera $V \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}))$. Quelle est l'image de V ?

Solution — Les résultats des questions (ii) et (iii) entraînent que Im$T = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, i.e. que T est surjectif. En tenant compte en plus de (i), on conclut donc que T est une bijection entre $D(T)$ et $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Il admet donc un inverse de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ vers $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, dont l'image est $D(T)$ et qui est borné, puisque, à cause de l'inégalité montrée à la question c), on a $||T^{-1}g||_{L^2} \leq \frac{1}{\varepsilon}||g||_{L^2}$.

e) En appliquant à V le théorème spectral pour les opérateurs bornés auto-adjoints, donner une représentation spectrale de A.

Solution — Le théorème spectral s'applique à l'opérateur $V = (A+\alpha+\varepsilon)^{-1}$ et nous donne : il existe un espace X muni d'une mesure borélienne μ, un opérateur unitaire $U : L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longrightarrow L^2(X,\mu,\mathbb{C}) = L^2(X)$ et une fonction borélienne bornée h sur (X,μ) à valeurs réelles (en fait positive car T et donc V sont des opérateurs positifs) tels que :

$$\forall\varphi \in L^2(X), \quad (UVU^{-1}\varphi)(x) = h(x)\varphi(x), \quad \mu-\text{p.p.}$$

ou encore, en notant $\widehat{h} \in \mathcal{L}(L^2(X))$ l'opérateur de multiplication par h :

$$\forall\varphi \in L^2(X), \quad U(A+\alpha+\varepsilon)^{-1}U^{-1}\varphi = \widehat{h}\varphi. \tag{6}$$

Noter que, lorsque φ parcourt $L^2(X)$, $U^{-1}\varphi$ parcourt $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, donc $(A+\alpha+\varepsilon)^{-1}U^{-1}\varphi$ parcourt $\text{Im}(A+\alpha+\varepsilon)^{-1} = D(A+\alpha+\varepsilon) = D(A)$, donc $U(A+\alpha+\varepsilon)^{-1}U^{-1}\varphi$ parcourt $UD(A) := \{Uf|\ f \in D(A)\}$, l'image de $D(A)$ par U. Donc une conséquence de (6) est que :

$$UD(A) = \{\widehat{h}\varphi|\ \varphi \in L^2(X)\} = \{\psi \in L^2(X)|\ \widehat{h}^{-1}\psi \in L^2(X)\} = D(\widehat{h}^{-1}).$$

De plus, nous pouvons transformer (6) en :

$$\varphi = U(A+\alpha+\varepsilon)U^{-1}\widehat{h}\varphi.$$

Nous en déduisons une représentation spectrale de $A+\alpha+\varepsilon$ en appliquant la dernière relation à $\varphi = \widehat{h}^{-1}\psi$, où $\psi \in UD(A)$:

$$\widehat{h}^{-1}\psi = U(A+\alpha+\varepsilon)U^{-1}\psi \quad \Longleftrightarrow \quad (\widehat{h}^{-1}-\alpha-\varepsilon)\psi = UAU^{-1}\psi,$$

et donc

$$\forall\psi \in UD(A), \quad UAU^{-1}\psi = (\widehat{1/h-\alpha}-\varepsilon)\psi.$$

Nous pouvons remarquer en particulier que la fonction $g := 1/h - \alpha - \varepsilon$ telle que $UAU^{-1}\psi = \widehat{g}\psi$ satisfait $g \geq -\alpha - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, car h prend des valeurs positives. Donc $g \geq -\alpha$, ce qui signifie que le spectre de A est inclus dans $[-\alpha, +\infty[$.

f) On rappelle et on admet que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\exists! f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, solution de :

$$f(x_0) = a, \quad f'(x_0) = b \quad \text{et} \quad -f'' + uf = \lambda f. \tag{7}$$

Montrer que, si $\lambda \geq 0$, alors toute solution f de (7) qui appartient en même temps à $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est nécessairement nulle (indication : étudier la forme que prend la solution f de (7) sur $]-\infty, -1[$ ou $]1, +\infty[$).

Solution — Soit f une solution de (7). Alors satisfait $f'' + \lambda f = 0$ sur $\mathbb{R}\backslash[-1, 1]$ et donc, si $\lambda > 0$, il existe des constantes $a_G, a_D, b_G, b_D \in \mathbb{C}$ telles que $f(x) = a_G e^{i\sqrt{-\lambda}x} + b_G e^{-i\sqrt{-\lambda}x}$, $\forall x \in]-\infty, -1[$ et $f(x) = a_D e^{i\sqrt{-\lambda}x} + b_D e^{-i\sqrt{-\lambda}x}$, $\forall x \in]1, \infty[$. Manifestement les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} |f(x)|^2 dx$ et $\int_1^\infty |f(x)|^2 dx$ divergent toutes les deux et valent $+\infty$, sauf si $a_G = a_D = b_G = b_D = 0$, ce qui, d'après le résultat d'existence et d'unicité qui a été rappelé dans l'énoncé, n'est possible que si $f = 0$. Cela montre donc le résultat dans le cas où $\lambda > 0$. Si $\lambda = 0$, alors f est solution de $f'' = 0$ et donc on a $f(x) = a_G x + b_G$, $\forall x \in]-\infty, -1[$ et $f(x) = a_D x + b_D$, $\forall x \in]1, \infty[$, ce qui conduit au même résultat par un raisonnement similaire.

g) Montrer que, en revanche, l'argument précédent ne permet pas de conclure quoi que ce soit si $\lambda < 0$ (autrement dit, si $\lambda < 0$, rien n'interdit a priori qu'il existe une solution *non nulle* de (7)).

Solution — En effet, si $\lambda < 0$ et si f est solution de (7), alors, toujours par le même raisonnement, on montre qu'il existe des constantes $a_G, a_D, b_G, b_D \in C$ telles que $f(x) = a_G e^{\sqrt{-\lambda}x} + b_G e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $\forall x \in]-\infty, -1[$ et $f(x) = a_D e^{\sqrt{-\lambda}x} + b_D e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $\forall x \in]1, \infty[$. En général une telle solution n'est pas dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour la même raison qu'à la question précédente, sauf si $b_G = a_D = 0$ (puisque $\int_{-\infty}^{-1} e^{2\sqrt{-\lambda}x} dx$ et $\int_1^\infty e^{-2\sqrt{-\lambda}x} dx$ convergent). Donc ce raisonnement permet juste de conclure que $b_G = a_D = 0$, ce qui n'impose pas nécessairement que $f = 0$[1].

h) On admet que toute fonction $f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui est une solution faible de $-f'' + uf = \lambda f$ est $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que $\mathrm{VP}(A) \subset]-\infty, 0[$.

Solution — Si $f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution faible de $Af = \lambda f$, alors, d'après ce qui est écrit dans l'énoncé, f est une fonction régulière et est donc une solution de (7). On peut donc lui appliquer les conclusions de la question f) et en déduire que, si $\lambda \geq 0$, f est nécessairement nulle (à cause du fait que l'on s'impose $f \in H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). Donc A n'admet pas de valeur propre dans $[0, \infty[$. Cela implique donc le résultat. Noter, de surcroît, que, à cause du résultat de la question e), on a en fait $\mathrm{VP}(A) \subset [-\alpha, 0[$.

[1] Voici un exemple où il existe une solution non nulle de (7) dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: on choisit une valeur $\lambda < 0$ et une fonction $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\theta(x) = \sqrt{-\lambda}x$ si $x < -1$ et $\theta(x) = -\sqrt{-\lambda}x$ si $x > 1$. Alors $u := \lambda + \theta'' + (\theta)^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction à support compact, dans $[-1, 1]$ et $f := e^\theta \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une solution de $-f'' + uf = \lambda f$.