Corrigé de l'examen du 29 mars 2016

Durée : 4 heures. Les notes de cours sont autorisées.

1 Exercice : variété symplectique

Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension $2n$. On appelle *forme symplectique* sur $\mathcal{M}$ une 2-forme $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$ qui satisfait les deux propriétés suivantes : (a) $d\omega = 0$; (b) en tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, l'application $V \longmapsto V \lrcorner\, \omega_{\mathrm{M}}$ est un isomorphisme de $T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$ vers $T^*_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$. On dit alors que $(\mathcal{M}, \omega)$ est une *variété symplectique*.

(i) Sur $\mathbb{R}^{2n}$ muni des coordonnées $(x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n)$, on considère la 2-forme $\omega = dp_i \wedge dx^i$ (où le signe $\sum_{=1}^n$ est sous-entendu). Montrer que ω est une forme symplectique.
Réponse — Pour tout $V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + w_i \frac{\partial}{\partial p_i}$, $V \lrcorner\, \omega = w_i dx^i - v^i dp_i$, donc l'application $V \longmapsto V \lrcorner\, \omega_{\mathrm{M}}$ est clairement un isomorphisme.

(ii) Soit $(\mathcal{M}, \omega)$ une variété symplectique quelconque. Montrer que, pour toute fonction $F \in \Omega^0(\mathcal{M})$, il existe un unique champ de vecteur, que l'on notera X_F, tel que $dF + X_F \lrcorner\, \omega = 0$.
Réponse — C'est une conséquence de la propriété (b) : pour tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$, il existe un unique $X_F(\mathrm{M}) \in T_{\mathrm{M}}\mathcal{M}$ tel que $X_F(\mathrm{M}) \lrcorner\, \omega = -dF_{\mathrm{M}}$.

(iii) Dans le cas où $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ et $\omega = dp_i \wedge dx^i$, expliciter $X_F = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \psi_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ en fonction de F.
Réponse — Nous reprenons les calculs de la question (i). La condition sur X_F s'écrit $\frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i + \psi_i dx^i - \xi^i dp_i = 0$. En en déduit que $X_F = \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$.

(iv) Montrer que, sur une variété symplectique quelconque $(\mathcal{M}, \omega)$, pour toute fonction $F \in \Omega^0(\mathcal{M})$, $L_{X_F}\omega = 0$.
Réponse — On utilise la formule de Cartan : $L_{X_F}\omega = d(X_F \lrcorner\, \omega) + X_F \lrcorner\, d\omega = d(-dF) + X_F \lrcorner\, 0 = 0$.

Dans la suite, sur une variété symplectique quelconque $(\mathcal{M}, \omega)$, on définit le *crochet de Poisson* de deux fonctions $F, G \in \Omega^0(\mathcal{M})$ comme étant la fonction $\{F, G\} \in \Omega^0(\mathcal{M})$ définie par $\{F, G\} := \omega(X_F, X_G)$.

(v) Calculer de deux façons différentes (sans utiliser les coordonnées) la dérivée de Lie $L_{X_G}(X_F \lrcorner\, \omega)$.
Réponse — Première façon, en utilisant la règle de Leibniz pour la dérivée de Lie :

$$L_{X_G}(X_F \lrcorner\, \omega) = (L_{X_G} X_F) \lrcorner\, \omega + X_F \lrcorner\, (L_{X_G}\omega) = -[X_F, X_G] \lrcorner\, \omega + X_F \lrcorner\, 0 = -[X_F, X_G] \lrcorner\, \omega.$$

Deuxième façon, en utilisant la formule de Cartan :

$$L_{X_G}(X_F \lrcorner\, \omega) = d(X_G \lrcorner\, (X_F \lrcorner\, \omega)) + X_G \lrcorner\, d(X_F \lrcorner\, \omega) = d(\omega(X_F, X_G)) + X_G \lrcorner\, F(-dF) = d\{F, G\}.$$

(vi) En déduire une expression pour $d\{F, G\}$.
Réponse — $d\{F, G\} = -[X_F, X_G] \lrcorner\, \omega$.

(vii) A partir de la question précédente, déterminer $X_{\{F,G\}}$.
Réponse — $X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G]$, par unicité de la solution de $d\{F, G\} + [X_F, X_G] \lrcorner\, \omega = 0$.

2 Exercice : transformée de Legendre

Soit V un espace vectoriel réel muni d'un système de coordonnées linéaires $x = (x^1, \cdots, x^n)$. Pour tout ouvert $U \subset V$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ à valeurs réelles, on note U^* l'image de U par $df : U \longrightarrow V^*$, et on définit, *dans les cas où cela a un sens*, la *transformée de Legendre de* f comme étant l'application $\overline{f} \in \mathcal{C}^\infty(U^*)$ telle que

$$\overline{f}(\overline{x}) = \langle \overline{x}, x \rangle - f(x) = \overline{x}_i x^i - f(x), \text{ si } \overline{x} = df_x. \quad \forall x \in U, \tag{1}$$

(i) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. A quelle condition sur les dérivées partielles secondes de f est-il possible de définir *localement* la transformée de Legendre ?
Réponse — Cela est possible si, pour tout $\overline{x} \in U^*$, il existe un unique $x \in U$ tel que $\overline{x} = df_x$. Il suffit donc que $x \longmapsto df_s$ soit un difféomorphisme. Cette propriété est vraie localement, en vertu du théorème d'inversion locale, si la différentielle de cette application est inversible. Cela siginifie que la matrice hessienne $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j})_{i,j}$ est inversible.

Dans la suite nous supposerons que la transformée de Legendre de $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ est bien définie.

(ii) Déterminer la transformée de Legendre, si elle existe, de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2]$. Même question pour $f(x) = \frac{1}{2}[a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2]$, où $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Réponse — L'application $x \longmapsto df_x$ s'écrit ici $(x^1, x^2) \longmapsto x^1dx^1 + x^2dx^2$, on a donc $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (x^1, x^2)$ et $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \overline{x}_i x^i - f(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - \frac{1}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2] = \frac{1}{2}[(\overline{x}_1)^2 + (\overline{x}_2)^2]$.
Si $f(x) = \frac{1}{2}[a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2]$, $x \longmapsto df_x$ s'écrit ici $(x^1, x^2) \longmapsto a_1x^1dx^1 + a_2x^2dx^2$. Cette application est inversible ssi $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$. Alors $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 - \frac{1}{2}[a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2] = \frac{1}{2}[\frac{1}{a_1}(\overline{x}_1)^2 + \frac{1}{a_1}(\overline{x}_2)^2]$.

On note $W := V \oplus \mathbb{R} \oplus V^* \oplus \mathbb{R}$, avec les coordonnées $(x, y, \overline{x}, \overline{y}) = (x^1, \cdots, x^n, y, \overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n, \overline{y})$. On introduit $J^1(V, \mathbb{R})$, l'espace des jets des fonctions définies sur V, muni des coordonnées (x, y, p) et de la forme de contact $\theta = dy - p_i dx^i$ et $J^1(V^*, \mathbb{R})$, l'espace des jets des fonctions définies sur V^*, muni des coordonnées $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ et de la forme de contact $\overline{\theta} = d\overline{y} - \overline{p}^i d\overline{x}_i$. On considère les applications

$$\begin{array}{rccc} \pi : & W & \longrightarrow & J^1(V, \mathbb{R}) \\ & (x, y, \overline{x}, \overline{y}) & \longmapsto & (x, y, \overline{x}) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \overline{\pi} : & W & \longrightarrow & J^1(V^*, \mathbb{R}) \\ & (x, y, \overline{x}, \overline{y}) & \longmapsto & (\overline{x}, \overline{y}, x) \end{array}$$

(id est $(x, y, p) \circ \pi = (x, y, \overline{x})$ et $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) \circ \overline{\pi} = (\overline{x}, \overline{y}, x)$).

(iii) Calculer $\pi^*\theta$ et $\overline{\pi}^*\overline{\theta}$. Que peut-on dire de la somme de ces deux formes ?
Réponse — $\pi^*\theta = dy - \overline{x}_i dx^i$ et $\overline{\pi}^*\overline{\theta} = d\overline{y} - x^i d\overline{x}_i$. Donc $\pi^*\theta + \overline{\pi}^*\overline{\theta} = dy + d\overline{y} - \overline{x}_i dx^i - x^i d\overline{x}_i = d(y + \overline{y} - \overline{x}_i x^i)$. Donc $\pi^*\theta + \overline{\pi}^*\overline{\theta}$ est exacte.

(iv) On considère la sous-variété $\mathcal{H} := \{(x, y, \overline{x}, \overline{y}) \in W;\, y + \overline{y} = \langle \overline{x}, x \rangle\}$, où $\langle \overline{x}, x \rangle := \overline{x}_i x^i$ et on note $\theta^1 := \pi^*\theta|_{\mathcal{H}}$ et $\theta^2 := \overline{\pi}^*\overline{\theta}|_{\mathcal{H}}$. Montrer que $\theta^1 + \theta^2 = 0$.
Réponse — La fonction $y + \overline{y} - \overline{x}_i x^i$ est constante sur $\mathcal{H}$, par définition. Donc, d'après la question précédente, $\theta^1 + \theta^2 = (\pi^*\theta + \overline{\pi}^*\overline{\theta})|_{\mathcal{H}} = d(y + \overline{y} - \overline{x}_i x^i)|_{\mathcal{H}} = 0$.

(v) Montrer que les restrictions de π et $\overline{\pi}$ à $\mathcal{H}$ sont des difféomorphismes.
Réponse — L'inverse de $\pi|_{\mathcal{H}}$ est définie par $(x, y, p) \longmapsto (x, y, p, p_i x^i - y)$, l'inverse de $\overline{\pi}|_{\mathcal{H}}$ par $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) \longmapsto (\overline{p}, \overline{p}^i \overline{x}_i - \overline{y}, \overline{x}, \overline{y})$.

(vi) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. On définit la sous-variété $\Gamma := (\pi|_{\mathcal{H}})^{-1} \circ j^1 f(U)$ et on pose $\overline{\omega} := d\overline{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{x}_n$. A quelle condition sur f a-t-on $\overline{\omega}|_\Gamma \neq 0$?
Réponse — On a $j^1 f(U) = \{(x, f(x), df_x);\, x \in U\}$, donc $\Gamma = \{(x, f(x), df_x, \langle df_x, x \rangle - f(x));\, x \in U\}$. La condition $\overline{\omega}|_\Gamma \neq 0$ signifie que $[(\pi|_{\mathcal{H}})^{-1} \circ j^1]^*\overline{\omega} \neq 0$, id est

$$d\frac{\partial f}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge d\frac{\partial f}{\partial x^n} = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j} \right)_{i,j} \neq 0,$$

donc que la matrice hessienne de f est inversible. On retrouve la même condition que celle trouvée à la question (i) pour la transformée de Legendre de f soit localement définie.

(vii) On suppose que $\overline{\omega}|_\Gamma \neq 0$. Montrer $(\overline{\pi}|_{\mathcal{H}})(\Gamma)$ est le 1-graphe d'une fonction que l'on précisera (on pourra montrer que $\theta^1|_\Gamma = 0$).
Réponse — Comme $\pi|_{\mathcal{H}}$ est un difféomorphisme,

$$((\pi|_{\mathcal{H}})^{-1} \circ j^1 f)^*\theta^1 = (j^1 f)^*((\pi|_{\mathcal{H}})^{-1})^*\theta^1 = (j^1 f)^*((\pi|_{\mathcal{H}})^{-1})^*(\pi|_{\mathcal{H}})^*\theta = (j^1 f)^*\theta = 0.$$

Donc $\theta^1|_\Gamma = 0$. Mais comme $\theta^1 + \theta^2 = 0$, on a aussi $\theta^2|_\Gamma = 0$; donc $(\overline{\pi}|_{\mathcal{H}})^*\overline{\theta}|_\Gamma = d\overline{y} - x^i d\overline{x}_i|_\Gamma = 0$.

La condition $\overline{\omega}|_\Gamma \neq 0$ signifie que nous pouvons localement paramétriser Γ par les variables $\overline{x}$. Donc il existe des fonctions $\xi, \eta, \overline{f}$ définies sur un ouvert $U^* \subset V^*$ telles que $\Gamma = \{(\xi(\overline{x}), \eta(\overline{x}), \overline{x}, \overline{f}(\overline{x}));\ \overline{x} \in U^*\}$. Comme $d\overline{y} - x^i d\overline{x}_i|_\Gamma = 0$, on a donc $0 = d\overline{f} - \xi^i d\overline{x}_i = (\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}_i} - \xi^i) d\overline{x}_i$, donc $\xi^i = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}_i}$. Finalement $\Gamma = \{(d\overline{f}_{\overline{x}}, \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}_i}\overline{x}_i - \overline{f}(\overline{x}), \overline{x}, \overline{f}(\overline{x}));\ \overline{x} \in U^*\}$ et l'image de Γ par $\overline{\pi}|_{\mathcal{H}}$ est l'image de $j^1\overline{f}$, le 1-graphe de $\overline{f}$.

(viii) Déduire de ce qui précède une expression pour $d\overline{f}$ et de la transformée de Legendre de $\overline{f}$.
Réponse — En comparant les deux paramétrisations de Γ, on trouve que $x = d\overline{f}_{\overline{x}}$ et donc la valeur de la transformée de Legendre de $\overline{f}$ en $x = d\overline{f}_{\overline{x}}$ est $x^i \overline{x}_i - \overline{f}(\overline{x}) = x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) - [\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)x^i - f(x)] = f(x)$. Donc la transformée de Legendre de $\overline{f}$ est f. On peut aussi déduire ce résultat du caractère symétrique de notre construction :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{H} \arrow[dl, "\pi|_{\mathcal{H}}"', "\simeq"] \arrow[dr, "\overline{\pi}|_{\mathcal{H}}", "\simeq"'] & \\
J^1(V,\mathbb{R}) & & J^1(V^*,\mathbb{R}) \\
U \arrow[u, "j^1 f"'] & & U^* \arrow[u, "j^1 \overline{f}"]
\end{tikzcd}$$

3 Problème : transformations de contact

On étudie des applications Φ de $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ou d'un ouvert de $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$) dans lui-même. On notera (x,y,p) les coordonnées sur l'espace de départ de Φ et $(\overline{x},\overline{y},\overline{p})$ les coordonnées sur l'espace d'arrivée de Φ et $\theta := dy - pdx$ et $\overline{\theta} := d\overline{y} - \overline{p}d\overline{x}$ les formes de contacts sur ces deux espaces. On décomposera $\Phi(x,y,p) = (\xi(x,y,p), \eta(x,y,p), \psi(x,y,p))$. L'application Φ est appelée une *transformation de contact* s'il existe une fonction λ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne s'annule pas et telle que $\Phi^*\overline{\theta} = \lambda\theta$.

(i) Déterminer toutes les applications de contact Φ telles que $\frac{\partial \xi}{\partial p} = \frac{\partial \eta}{\partial p} = 0$. On pourra d'abord éliminer λ et exprimer p en fonction des fonctions ξ et η et de leurs dérivées, puis exprimer ψ en fonction des deux autres fonctions. L'application Φ est-elle définie partout ?
Réponse — L'hypothèse signifie que ξ et η ne dépendent que des variables (x,y). On écrit la relation $\Phi^*\overline{\theta} - \lambda\theta = 0$. Cela nous donne

$$0 = d\eta - \psi d\xi - \lambda(dy - pdx) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \psi\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda p\right)dx + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \psi\frac{\partial \xi}{\partial y} - \lambda\right)dy.$$

En éliminant λ, on obtient

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - \psi\frac{\partial \xi}{\partial x} + p\frac{\partial \eta}{\partial y} - p\psi\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0,$$

d'où l'on déduit que

$$\psi = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} + p\frac{\partial \eta}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x} + p\frac{\partial \xi}{\partial y}}.$$

Pourvu que $\frac{\partial \xi}{\partial x} + p\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$, cela définit ψ en fonction des fonctions ξ et η. Cette condition sur Ψ est nécessaire et suffisante pour que l'application Φ ainsi obtenue soit une transformation de contact.

On introduit l'espace de contact $J^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ muni des coordonnées $(x^1,x^2,x^3;z;p_1,p_2,p_3)$ et de la forme de contact $\Theta := dz - p_1dx^1 - p_2dx^2 - p_3dx^3$. A toute paire (Φ,λ) comme précédemment, on associe l'application $\Psi : J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ définie par

$$\Psi(x,y,p) = (x,y,\xi;\eta;-p\lambda,\lambda,\psi), \text{ où } \xi,\eta,\psi \text{ et } \lambda \text{ sont des fonctions de } (x,y,p).$$

(ii) Calculer $\Psi^*\Theta$. Montrer que toute transformation de contact Φ qui satisfait l'hypothèse $\frac{\partial \xi}{\partial p} \neq 0$ peut être décrite localement à l'aide d'une fonction f de trois variables réelles (x^1, x^2, x^3).
Réponse — On a

$$\Psi^*\Theta = d\eta + p\lambda dx - \lambda dy - \psi d\xi = d\eta - \psi d\xi - \lambda(dy - pdx) = \Phi^*\overline{\theta} - \theta.$$

On voit donc que Φ est une transformation de contact ssi $\Psi^*\Theta = 0$. Si $\frac{\partial \xi}{\partial p} \neq 0$, alors, par le théorème d'inversion locale, la transformation $(x, y, p) \longmapsto (x, y, \xi(x, y, p))$ est un difféomorphisme local. Si Γ est l'image de Ψ, on a donc $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3|_\Gamma \neq 0$ et on peut paramétriser Γ par les coordonnées (x^1, x^2, x^3). La condition $\Psi^*\Theta = 0$ entraîne que Γ est le 1-graphe d'une application f des variables (x^1, x^2, x^3) au dessus d'un ouvert $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^3$, id est

$$\{((x, y, \xi; \eta; -p\lambda, \lambda, \psi);\ (x, y, p) \in U\} = \{(x^1, x^2, x^3; f(x^1, x^2, x^3); df_{(x^1,x^2,x^3)});\ (x^1, x^2, x^3) \in \mathcal{O}\}.$$

En éliminant λ on trouve que $\xi(x, y, p)$, $\eta(x, y, p)$ et $\psi(x, y, p)$ sont définis implicitement par

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & x^1 \\ y & = & x^2 \\ p & = & -\frac{\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1,x^2,x^3)}{\frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1,x^2,x^3)} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccc} \xi(x, y, p) & = & x^3 \\ \eta(x, y, p) & = & f(x^1, x^2, x^3) \\ \psi(x, y, p) & = & \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1, x^2, x^3) \end{array}\right.$$

ou encore

$$\eta(x, y, p) = f(x, y, \xi(x, y, p)) \text{ et } \left\{\begin{array}{ccc} 0 & = & \frac{\partial f}{\partial x^1}(x, y, \xi(x, y, p)) + p\frac{\partial f}{\partial x^2}(x, y, \xi(x, y, p)) \\ \psi(x, y, p) & = & \frac{\partial f}{\partial x^3}(x, y, \xi(x, y, p)) \end{array}\right.$$

(iii) On introduit la fonction H de quatre variables $(x, y, \overline{x}, \overline{y})$ défine par $H(x, y, \overline{x}, \overline{y}) := f(x, y, \overline{x}) - \overline{y}$, où f est la fonction obtenue à la question précédente. Montrer que le graphe de Φ dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec les coordonnées $(x, y, p, \overline{x}, \overline{y}, \overline{p})$ est défini implicitement par le système d'équations

$$H(x, y, \overline{x}, \overline{y}) = 0 \text{ et } \left\{\begin{array}{ccc} \frac{\partial H}{\partial x} + p\frac{\partial H}{\partial y} & = & 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \overline{x}} + \overline{p}\frac{\partial H}{\partial \overline{y}} & = & 0 \end{array}\right.$$

avec $\frac{\partial H}{\partial \overline{y}} \neq 0$ (Sophus Lie). Montrer la réciproque.
Réponse — La réponse à la première question est immédiate en utilisant le résultat de la question précédente et en remplaçant (x^1, x^2, x^3) par $(x, y, \overline{x})$. Montrons la réciproque. Soit H une fonction satisfaisant les propriétés énoncées. Comme $\frac{\partial H}{\partial \overline{y}} \neq 0$, on peut utiliser le théorème des fonctions implicites et trouver une fonction f des variables $(x, y, \overline{x})$ telle que $H(x, y, \overline{x}, \overline{y}) = 0$ ssi $\overline{y} = f(x, y, \overline{x})$. En dérivant la relation $H(x, y, \overline{x}, f(x, y, \overline{x})) = 0$ par rapport à x, on obtient

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[H(x, y, \overline{x}, f(x, y, \overline{x}))\right] = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \overline{x}, f(x, y, \overline{x})) + \frac{\partial H}{\partial \overline{y}}(x, y, \overline{x}, f(x, y, \overline{x}))\frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

On montre de même que $\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \overline{y}}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial H}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial H}{\partial \overline{y}}\frac{\partial f}{\partial \overline{x}} = 0$. On en déduit que

$$0 = \frac{\partial H}{\partial x} + p\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial \overline{y}}\frac{\partial f}{\partial x} - p\frac{\partial H}{\partial \overline{y}}\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial \overline{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

et

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \overline{x}} + \overline{p}\frac{\partial H}{\partial \overline{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \overline{y}}\frac{\partial f}{\partial \overline{x}} + p\frac{\partial H}{\partial \overline{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \overline{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}} - \overline{p}\right).$$

On obtient ainsi une fonction f des variables $(x, y, \overline{x})$ à partir de laquelle on peut produire une transformation de contact comme suit (pourvu que $\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}/\frac{\partial f}{\partial y}\right) \neq 0$).

On définit le sous-ensemble Γ de $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\times J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des points de coordonnées $(x,y,p,\overline{x},\overline{y},\overline{p})$, dans lesquelles $(p,\overline{y},\overline{p})$ sont des fonctions de $(x,y,\overline{x})$ définies par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\overline{x})+p\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\overline{x})=0$, $\overline{y}=f(x,y,\overline{x})$ et $\overline{p}=\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(x,y,\overline{x})$. Supposons que $dx\wedge dy\wedge dp|_\Gamma=-\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}/\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\wedge dy\wedge d\overline{x}\neq 0$, alors Γ se représente localement comme le graphe d'une fonction $\Phi=(\xi,\eta,\psi)$ des variables (x,y,p). De plus :

$$d\overline{y}-\overline{p}d\overline{x}|_\Gamma=df-\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}d\overline{x}|_\Gamma=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy|_\Gamma=-p\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy|_\Gamma=-\frac{\partial f}{\partial y}\left(dy-pdx\right)|_\Gamma.$$

On retrouve bien ainsi que Φ est une transformation de contact.

(iv) Qu'obtient-on pour $H(x,y,\overline{x},\overline{y})=y+\overline{y}-\overline{x}x$?
Réponse — Appliquant les relations obtenues à la question précédente avec H on obtient les relations $p=\overline{x}$, $\overline{p}=x$ et $y+\overline{y}-x\overline{x}=0$. On retrouve les relations qui définissaient la transformée de Legendre de l'exercice précédent. La transformation de Legendre est donc une transformation de contact.

4 Exercice : formes de contact et théorie de Cartan–Kähler

L'espace $J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ est muni des coordonnées (x^1,x^2,y,p_1,p_2), de la forme de contact $\theta:=dy-p_1dx^1-p_2dx^2$ et de la 2-forme $\omega:=dx^1\wedge dx^2$. On considère le système différentiel extérieur

$$\theta|_\Gamma=0\quad;\quad d\theta|_\Gamma=0\quad;\quad \omega|_\Gamma\neq 0 \tag{2}$$

(i) Le système (2) est-il fermé ? Quelle est la dimension des solutions Γ de (2) ?
Réponse — Ce système est fermé. Les conditions $\theta|_\Gamma=0$ et $d\theta|_\Gamma=0$ entraînent que $\dim\Gamma\leq 2$, la condition $\omega|_\Gamma\neq 0$ entraîne que $\dim\Gamma\geq 2$, donc $\dim\Gamma=2$.

(ii) Soit $\mathrm{M}\in J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $Gr_{\mathrm{M}}(\theta;\omega):=\{E\subset T_{\mathrm{M}}J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R});\ \theta_{\mathrm{M}}|_E=d\theta_{\mathrm{M}}|_E=0,\omega_{\mathrm{M}}|_E\neq 0\}$. Donner une paramétrisation de $Gr_{\mathrm{M}}(\theta;\omega)$. En déduire sa dimension $r_{(1)}$.
Réponse — La condition $\omega|_\Gamma\neq 0$ entraîne que tout élément E dans $Gr_{\mathrm{M}}(\theta;\omega)$ est un graphe au dessus du plan des (x^1,x^2). On peut donc trouver une base (u_1,u_2) sous la forme

$$u_1=\frac{\partial}{\partial x^1}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+p_{11}\frac{\partial}{\partial p_1}+p_{12}\frac{\partial}{\partial p_1}\quad\text{et}\quad u_2=\frac{\partial}{\partial x^2}+y_2\frac{\partial}{\partial y}+p_{21}\frac{\partial}{\partial p_1}+p_{22}\frac{\partial}{\partial p_1}.$$

Les conditions $\theta|_\Gamma=0$ et $d\theta|_\Gamma=0$ se traduisent par :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\theta(u_1)&=&0\\ \theta(u_2)&=&0\\ d\theta(u_1,u_2)&=&0\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}y_1&=&p_1\\ y_2&=&p_2\\ p_{12}-p_{21}&=&0\end{array}\right.$$

On obtient trois relations indépendantes sur les six paramètres $(y_1,p_{11},p_{12},y_2,p_{21},p_{22})$ donc $r^{(1)}=6-3=3$.

(iii) Ecrire le premier système polaire (complet) en un point pour un vecteur u_1 satisfaisant $(dx^1(u_1),dx^2(u_1))=(1,0)$. Expliciter les solutions de ce système.
Réponse — A nouveau on note $u_1=\frac{\partial}{\partial x^1}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+p_{11}\frac{\partial}{\partial p_1}+p_{12}\frac{\partial}{\partial p_1}$. La première équation polaire est $dy(u_1)=p_1dx^1(u_1)+p_2dx^2(u_1)=p_1$. Les solutions sont donc $u_1=\frac{\partial}{\partial x^1}+p_1\frac{\partial}{\partial y}+p_{11}\frac{\partial}{\partial p_1}+p_{12}\frac{\partial}{\partial p_1}$.

(iv) Ecrire le premier système polaire réduit et déterminer son rang s_0'.
Réponse — Le premier système polaire est $dy=0$, son rang est 1, donc $s_0'=1$.

(v) Ecrire le deuxième système polaire réduit et déterminer son rang $s_0'+s_1'$.
Réponse — On a $u_1 \lrcorner\, d\theta=dp_1-p_{12}dx^2$, donc le deuxième système polaire est : $dy=0$ et $dp_1=0$. Son rang est deux, donc $s_1'=1$.

(vi) Dire si le système est involutif, conclure.
Réponse — Nous effectuons le test de Cartan :

$\times$		
$\times$	$\times$	

Il reste trois cases vides, cela coïncide avec $r^{(1)}$. Donc le système étant fermé et le test de Cartan étant positif, le système est involutif.