Corrigé de l'examen du jeudi 22 septembre 2005

I

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni des coordonnées (x, z, p), où $x = (x^i) = (x^1, \cdots, x^n)$, $p = (p_i) = (p_1, \cdots, p_n)$ et $z \in \mathbb{R}$. On note $\theta := dz - p_i dx^i$ (sous la convention que $p_i dx^i = \sum_{i=1}^n p_i dx^i$). Soit $f_1, \cdots, f_n$ et g des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de la variable $x \in \mathbb{R}^n$. On considère

$$\Sigma := \{(x^i, g(x), f_i(x)) \in \mathbb{R}^{2n+1} | x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Noter que Σ est paramétrisée par $\varphi : x \longmapsto (x^i, g(x), f_i(x))$. On écrit que $\theta_{|\Sigma} = 0$ (la restriction de θ à Σ est nulle) ssi $j^*\theta = 0$, où $j : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ est l'application d'inclusion.
1) Montrer que $\theta_{|\Sigma} = 0$ ssi $\frac{\partial g}{\partial x^i} = f_i$, $\forall i$.
Réponse — *Comme la paramétrisation φ est un difféomorphisme, $j^*\theta = 0$ ssi $(j \circ \varphi)^*\theta = \varphi^*(j^*\theta) = 0$. Comme*

$$\varphi^*\theta \simeq= (j \circ \varphi)^*\theta = d(g(x)) - f_i(x) dx^i = \left(\frac{\partial g}{\partial x^i}(x) - f_i(x) \right) dx^i,$$

cette condition est donc bien équivalente à $\frac{\partial g}{\partial x^i} = f_i$, $\forall i$.
2) Soit $F : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Montrer qu'à chaque fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui est solution de

$$F\left(x^i, g(x), \frac{\partial g}{\partial x^i}\right) = 0$$

on peut associer une unique sous-variété Σ de $\mathbb{R}^{2n+1}$ telle que $\theta_{|\Sigma} = 0$ et $F_{|\Sigma} = 0$.
Réponse — *Il suffit d'associer à chaque $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ le graphe de l'application φ correspondante, i.e.*

$$\Sigma := \{(x^i, g(x), f_i(x)) | x \in \mathbb{R}\}.$$

D'après la question précédente θ s'annule sur Σ et F s'annule sur Σ ssi g est solution de l'équation différentielle. Réciproquement si Σ est une sous-variété qui est un graphe au-dessus de $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{n+1}$ telle que θ et F s'annulent sur Σ, alors il lui correspond une solution de l'équation considérée.
3) Soit X un champ de vecteur $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. On suppose pour simplifier que X est complet, c'est à dire que son ensemble de vie Δ_X est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n+1}$. On note $\left(e^{tX}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ la famille de difféomorphismes

$$\begin{array}{cccc} e^{tX}: & \mathbb{R}^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n+1} \\ & M & \longmapsto & e^{tX}(M) \end{array}$$

telle que $e^{0\cdot X} = Id$ et $\frac{\partial(e^{tX}(M))}{\partial t} = X(e^{tX}(M))$. On suppose que $L_X F = 0$. Montrer que pour toute sous-variété Σ de $\mathbb{R}^{2n+1}$ telle que $F_{|\Sigma} = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, $\left(F \circ e^{tX}\right)_{|\Sigma} = 0$. En déduire également que $\left(\left(e^{tX}\right)^* dF\right)_{|\Sigma} = 0$.
Réponse — *Pour tout point $M \in \mathbb{R}^{2n+1}$,*

$$\frac{d}{dt}\left(F \circ e^{tX}\right)(M) = dF_{e^{tX}(M)}\left(\frac{de^{tX}}{dt}(M)\right) = dF_{e^{tX}(M)}\left(X(e^{tX}(M))\right) = 0,$$

car $dF(X) = \frac{\partial F}{\partial x^i} X^i = L_X F = 0$. Donc $\left(F \circ e^{tX}\right)(M)$ est indépendant de t et est égal à $F(M)$. Et cette quantité s'annule si $M \in \Sigma$, par hypothèse. Donc $F \circ e^{tX}$ s'annule sur Σ.
On peut encore écrire cette propriété $j^*\left(\left(e^{tX}\right)^* F\right) = 0$ ou $\left(e^{tX} \circ j\right)^* F = 0$. Cela entraîne $0 = d\left(e^{tX} \circ j\right)^* F = \left(e^{tX} \circ j\right)^* dF$, donc $\left(\left(e^{tX}\right)^* dF\right)_{|\Sigma} = 0$.
4) On suppose dorénavant que

$$X = \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial z} p_i\right)\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Montrer que $L_X F = 0$.
Réponse — *C'est un simple calcul :*

$$L_X F = dF(X) = \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial z}p_i\right)\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0.$$

5) Soit Σ une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n+1}$ telle que $F_{|\Sigma} = 0$.
a) Calculer $L_X\theta$, où X est donné à la question 4) et où et on suppose que $\Delta_X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n+1}$.
Réponse — *On utilise une formule de Cartan :*

$$L_X\theta = X \lrcorner\, d\theta + d(X \lrcorner\, \theta).$$

Mais d'une part, on a :

$$X \lrcorner\, \theta = p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad \Longrightarrow d(X \lrcorner\, \theta) = 0.$$

D'autre part,

$$X \lrcorner\, d\theta = X \lrcorner\, (dp_i \wedge dx^i) = \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial z}p_i\right)dx^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}dp_i = dF - \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial z}p_i dx^i = dF - \frac{\partial F}{\partial z}\theta.$$

Donc

$$L_X\theta = dF - \frac{\partial F}{\partial z}\theta.$$

b) En déduire une équation sur $\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(e^{tX}\right)^*\theta\right)$.
Réponse —*On a :*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(e^{tX}\right)^*\theta\right) = \left(e^{tX}\right)^*(L_X\theta) = \left(e^{tX}\right)^*\left(dF - \frac{\partial F}{\partial z}\theta\right) = \left(e^{tX}\right)^* dF - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\circ e^{tX}\right)\left(e^{tX}\right)^*\theta.$$

c) Montrer que si $\theta_{|\Sigma} = 0$ alors $\theta_{|e^{tX}\Sigma} = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Réponse — *D'après la question 3), et en utilisant le fait que $F_{|\Sigma} = 0$,*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(j^*\left(e^{tX}\right)^*\theta\right) &= j^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(e^{tX}\right)^*\theta\right)\right) = j^*\left(\left(e^{tX}\right)^* dF\right) - j^*\left(\left(\frac{\partial F}{\partial z}\circ e^{tX}\right)\left(e^{tX}\right)^*\theta\right)\\
&= -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\circ e^{tX}\circ j\right)\left(j^*\left(e^{tX}\right)^*\theta\right).
\end{aligned}$$

Donc si $\theta_{|\Sigma} = 0$ ou encore $j^*(\theta) = 0$, on en déduit que $j^*\left(e^{tX}\right)^*\theta = 0$ pour tout temps, en utilisant le fait que l'équation différentielle précédente admet une unique solution valant 0 en 0.
6) Montrer que si $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ est telle que $F_{|\Sigma} = 0$ et $\theta_{|\Sigma} = 0$, alors Σ est invariante par le flot du champ de vecteur X défini à la question 4). Essayer de dégager une conclusion sur ce que cela signifie pour les solutions de l'équation différentielle introduite à la question 2).
Réponse — *Si l'on traduit le résultat obtenu aux questions précédentes, on en déduit que si Σ satisfait $F_{|\Sigma} = 0$ et $\theta_{|\Sigma} = 0$, alors son image par le flot e^{tX} satisfait encore les mêmes conditions pour tout temps t. Comme il existe une unique sous-variété qui est un graphe au-dessus de $\mathbb{R}^n$ et sur laquelle θ et F s'annulent, c'est donc que Σ est invariante par e^{tX}.*
On observe donc que Σ est feuilleté par les lignes de flot du champ de vecteur X. L'image de ces lignes par la projection $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \{0\}^n$ forme également un feuilletage du graphe de g. Ces lignes sont appelées les caractéristiques de Cauchy.

II

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son orientation et de son produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ canoniques. On note aussi $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 | \, |x| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.
Dans cet exercice on veut démontrer que tout champ de vecteur tangent régulier sur S^2 doit s'annuler en au moins un point. On suppose donc le contraire, c'est à dire qu'*il existe un champ de vecteur tangent régulier u sur S^2 qui ne s'annule en aucun point* et on cherche à obtenir une contradiction.
1) Démontrer que l'on peut construire trois applications régulières $e_1, e_2, e_3 : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telles $\forall x \in S^2$,

$(e_1, e_2, e_3)(x)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et de façon à ce que $e_3(x) = x$, $\forall x \in S^2$.
Réponse — *Il suffit de prendre* $e_1(x) := \frac{u(x)}{|u(x)|}$ *et* $e_2(x) = x \times e_1(x)$*, où* $\times$ *est le produit vectoriel dans* $\mathbb{R}^3$.
2) On note de_a (pour $a = 1, 2, 3$) les différentielles sur S^2 de l'application e_a (si $e_a = \sum_{i=1}^3 e_a^i \epsilon_i$ alors $de_a = \sum_{i=1}^3 de_a^i \epsilon_i$). On note $\omega_a^b := \langle de_a, e_b \rangle$. Montrer que

$$\omega_a^b + \omega_b^a = 0, \quad \forall a, b.$$

Réponse —*Noter que* $\omega_a^b = \sum_{i=1}^3 de_a^i e_b^i$*. On part du fait que* $\langle e_a, e_b \rangle$ *est constant (cela vaut* 1 *si* $a = b$ *et* 0 *sinon) et on différentie :*

$$0 = \langle de_a, e_b \rangle + \langle e_a, de_b \rangle.$$

Cela donne la relation.
3) Démontrer que $d\omega_a^b + \omega_c^b \wedge \omega_a^c = 0$ (on pourra partir de l'identité $de_a = \omega_a^b e_b$).
Réponse — *Comme indiqué, on part de la relation* $de_a = \langle de_a, e_b \rangle e_b = \omega_a^b e_b$ *et on applique* d *:*

$$0 = d\omega_a^b e_b - \omega_a^b \wedge de_b.$$

En réutilisant une deuxième fois $de_b = \omega_b^c e_c$,

$$0 = d\omega_a^b e_b - \omega_a^b \wedge \omega_b^c e_c = \left(d\omega_a^b + \omega_a^c \wedge \omega_b^c \right) e_b,$$

d'où le résultat en utilisant $\omega_a^c \wedge \omega_b^c = \omega_c^b \wedge \omega_a^c$.
4) Démontrer que $\omega_3^1 \wedge \omega_2^3(e_1, e_2) = -1$ sur S^2.
Réponse — *Puisque* $dx = de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2$*, on voit que* (ω_3^1, ω_3^2) *forme une base de* $T_x^* S^2$*, duale de* (e_1, e_2)*. Donc* $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2(e_1, e_2) = 1$*, d'où le résultat.*
5) Déduire de la question précédente la valeur de $\int_{S^2} \omega_3^1 \wedge \omega_2^3$.
Réponse — *La question précédente nous dit essentiellement que* $\omega_3^1 \wedge \omega_2^3$ *est l'opposé de la forme volume sur* S^2*. Donc*

$$\int_{S^2} \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = -4\pi.$$

6) Conclure à l'aide des questions 3) et 5) (sans oublier ... 2)).
Réponse — *On utilise la relation* $d\omega_a^b + \omega_c^b \wedge \omega_a^c = 0$ *obtenue au 3) pour* $b = 1$ *et* $a = 2$*. Cela donne, en tenant compte du résultat de 2) :*

$$d\omega_2^1 + \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

Donc

$$\int_{S^2} \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = -\int_{S^2} d\omega_2^1 = 0,$$

par le théorème de Stokes, et parce que $\partial S^2 = \emptyset$*. Nous avons ainsi calculé* $\int_{S^2} \omega_3^1 \wedge \omega_2^3$ *de deux façons différentes qui donnent des résultats contradictoires. Ainsi nous avons prouvé par l'absurde qu'il n'y avait pas de champ de vecteur tangent ne s'annulant pas sur* S^2.

III

Pour tous vecteurs $u = (u^1, u^2)$ et $v = (v^1, v^2)$ dans $\mathbb{R}^2$ on note $(u, v) := u^1 v^1 + u^2 v^2$ et $(u)^2 = (u, u)$.
1) Une application linéaire $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est dite *conforme* ssi :
– $\exists \rho > 0$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$, $(Au, Av) = \rho(u, v)$
– $\det A > 0$.
On identifie A avec sa matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que A soit conforme.
Réponse — *Il s'agit de résoudre le système d'équations :* $\exists \rho > 0$ *tel que*

$$\begin{cases} a^2 + b^2 &= \rho \\ c^2 + d^2 &= \rho \\ ac + bd &= 0 \\ ad - bc &> 0 \end{cases}$$

On trouve comme solution

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \textit{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

2) Soit

$$C : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x = (x^1, x^2) & \longmapsto & x^1 + ix^2 \end{array}.$$

Montrer que A est conforme ssi $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$, $A(x) = C^{-1}(\lambda C(x))$. Dans la suite on pourra identifier $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ et poser $x = (x^1, x^2) \simeq x^1 + ix^2$.
Réponse — *Le résultat de la question précédente peut se transcrire*

$$C \circ A(x) = (a+ib)C(x).$$

On a donc $\lambda = a + ib$ et par abus de notation $Ax = \lambda x$.
3) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Démontrer que si $d\varphi_x$ est conforme pour tout $x \in \Omega$ alors φ est holomorphe. Exprimer $\frac{\partial \varphi}{\partial x} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(\varphi^1 + i\varphi^2)$ en fonction de $d\varphi_x$.
Réponse — *Pour tout $x \in \Omega$, notons*

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

la matrice jacobienne de $d\varphi_x$. Alors les résultats de la question 1) entraînent en particulier que si $d\varphi_x$ est conforme alors $\frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1} = 0$, c'est à dire que φ satisfait le système d'équations de Cauchy–Riemmann en tout point. En d'autres termes φ est holomorphe. Alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} + i\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1} = a + ib.$$

4) On considère la variété riemannienne $\mathcal{M} := (\Omega, g)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (il n'y a donc pas besoin de carte locale ici) et où la métrique g est de la forme $g_{ij}(x) = e^{2f(x)}\delta_{ij}$. Pour toute application régulière $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$ on définit $\varphi^* g$ sur Ω par : pour tous champs de vecteur u et v sur Ω,

$$(\varphi^* g)_x (u(x), v(x)) = g_{\varphi(x)} (d\varphi_x(u(x)), d\varphi_x(v(x))).$$

On suppose que φ est une *isométrie directe* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$, c'est à dire : $\varphi^* g = g$ et $\det d\varphi_x > 0$ partout. Démontrer que φ est holomorphe et déterminer une équation satisfaite par $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en fonction de f.
Réponse — *La condition $\varphi^* g = g$ est équivalente à*

$$\forall x \in \Omega, \forall u, v \in \mathbb{R}^2, \quad e^{2f\circ\varphi(x)}(d\varphi_x(u), d\varphi_x(v)) = e^{2f(x)}(u,v),$$

ou encore $\forall x \in \Omega$,

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2, \quad (d\varphi_x(u), d\varphi_x(v)) = e^{2(f(x) - f\circ\varphi(x))}(u,v).$$

Comme on demande en plus que $\det d\varphi_x > 0$ cela signifie que $d\varphi_x$ est conforme partout, donc que φ est holomorphe. En tout point $x \in \Omega$, $d\varphi_x$ satisfait les conditions de la question 1) avec $\rho = e^{2(f(x) - f\circ\varphi(x))}$. Donc

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 = \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1}\right)^2 = \rho = e^{2(f(x) - f\circ\varphi(x))}.$$

Donc

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right| = e^{f(x) - f\circ\varphi(x)}.$$

5) Calculer les symbôles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita de g (on pourra admettre et utiliser les relations $\Gamma^1_{11} = -\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}$ et $\Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}$).
Réponse — *Nous n'avons besoin que de calculer deux symbôles :*

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}e^{-2f}\left(2\frac{\partial f}{\partial x^1}e^{2f} + 2\frac{\partial f}{\partial x^1}e^{2f} - 2\frac{\partial f}{\partial x^1}e^{2f}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^1}$$

et

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}e^{-2f}\left(2\frac{\partial f}{\partial x^2}e^{2f} + 2\frac{\partial f}{\partial x^2}e^{2f} - 2\frac{\partial f}{\partial x^2}e^{2f}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^2}.$$

Donc

$$\Gamma^1_{11} = -\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{\partial f}{\partial x^1},$$
$$\Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{\partial f}{\partial x^2}.$$

6) Ecrire l'équation différentielle satisfaite par un point critique de $\mathcal{L}[\gamma] := \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt$, définie sur l'ensemble des chemins $\gamma \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathcal{M})$ (on ne demande pas de redémontrer le résultat mais d'expliciter l'équation en coordonnées locales).
Réponse — *L'équation est le système :*

$$\left(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\right)^i = \ddot\gamma^i + \Gamma^i_{jk}\dot\gamma^j\dot\gamma^k = 0 \quad \textit{pour } i = 1, 2.$$

En tenant compte de ce qui précède, cela donne :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot\gamma^1 + \dfrac{\partial f}{\partial x^1}\left((\dot\gamma^1)^2 - (\dot\gamma^2)^2\right) + 2\dfrac{\partial f}{\partial x^2}\dot\gamma^1\dot\gamma^2 & = & 0 \\ \ddot\gamma^2 + 2\dfrac{\partial f}{\partial x^1}\dot\gamma^1\dot\gamma^2 + \dfrac{\partial f}{\partial x^2}\left((\dot\gamma^2)^2 - (\dot\gamma^1)^2\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

7) On suppose que $\Omega = \mathbb{C}_+ := \{x \in \mathbb{C} | \mathrm{Im} x > 0\}$ et $e^{2f(x)} = \frac{1}{(\mathrm{Im} x)^2} = \frac{1}{(x^2)^2}$. Montrer que $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, l'application φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est une isométrie directe de $\mathcal{M}$.
En admettant le résultat d'analyse complexe suivant : les seuls difféomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}_+$ dans lui-même sont des homographies du type précédent, décrire toutes les isométries directes de $\mathcal{M}$.
Réponse — *Tout d'abord φ est bien un difféomorphisme holomorphe. Pour vérifier qu'il s'agit d'une isométrie directe de $\mathcal{M}$, il suffit donc de vérifier si φ est aussi solution de l'équation obtenue au 4) :*

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| = e^{f - f\circ\varphi}(x) = \frac{\varphi^2(x)}{x^2}.$$

D'une part,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} = \frac{1}{(cx+d)^2} \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right| = \frac{1}{|cx+d|^2}.$$

D'autre part,

$$\varphi(x) = \frac{(ax+b)(c\overline{x}+d)}{|cx+d|^2} = \frac{ac|x|^2 + adx + bc\overline{x} + bd}{|cx+d|^2} \quad\Longrightarrow\quad \varphi^2(x) = \frac{(ad-bc)x^2}{|cx+d|^2} = \frac{x^2}{|cx+d|^2}.$$

et on en déduit que φ est une isométrie. De plus le résultat d'analyse complexe énoncé implique qu'il n'y a pas d'autre isométrie.
8) Démontrer que les demi-droites $x^1 = C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante sont des géodésiques de $\mathcal{M}$, en déterminant les solutions correspondantes à l'équation obtenue en 6).
Réponse —*Nous devons trouver les solutions γ de l'équation des géodésiques telles que $\gamma^1 = C$. Le système se simplifie en*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \ddot\gamma^1 & = & 0 \\ \ddot\gamma^2 - \dfrac{1}{\gamma^2}\left((\dot\gamma^2)^2\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

Les solutions sont de la forme $\gamma(t) = i\alpha e^{\beta t}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, elles paramétrisent toutes les demi-droites verticales de $\mathbb{C}_+$.
9) Démontrer que pour toute isométrie directe φ de $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}[\varphi\circ\gamma] = \mathcal{L}[\gamma]$. En déduire d'autres solutions

de l'équation différentielle obtenue en 6).
Réponse — *Nous utilisons la propriété* $\varphi^* g = g$ *:*

$$\mathcal{L}[\varphi \circ \gamma] = \int_0^1 g_{\varphi\circ\gamma(t)} \left(d\varphi_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)), d\varphi_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \right) dt = \int_0^1 (\varphi^* g)_{\gamma(t)} \left(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \right) dt = \int_0^1 g_{\gamma(t)} \left(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \right) dt$$

et on obtient ainsi que $\mathcal{L}[\varphi \circ \gamma] = \mathcal{L}[\gamma]$*. Cela entraîne que* γ *est un point critique de* $\mathcal{L}$ *ssi* $\varphi \circ \gamma$ *est un point critique de* $\mathcal{L}$*. Donc, nous déduisons de la question précédente que toute courbe de* $\mathbb{C}_+$ *qui est l'image d'une demi-droite verticale par une transformation homographique correspondant à une matrice* $A \in SL(2, \mathbb{R})$ *est encore une géodésique.*
Question supplémentaire : quelle forme dans $\mathbb{C}_+$ ont ces géodésiques ?
Réponse — *En fait l'image d'une droite du plan complexe par une homographie complexe est soit une droite, soit un cercle (il suffit de le vérifier pour les homographies qui sont des translations, des dilatations et pour l'inversion* $x \longmapsto \frac{1}{x}$*). Les géodésiques de* $\mathbb{C}_+$ *ont donc la forme de segments de cercle. On peut montrer que ces segments de cercle rencontrent la droite réelle perpendiculairement (parce qu'une homographie est une transformation conforme et donc préserve les angles d'intersection entre deux courbes et parce que la droite réelle est préservée par* $SL(2, \mathbb{R})$*).*

Remarque : la variété $\mathcal{M} = \left(\mathbb{C}_+, \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{(x^2)^2} \right)$ *est appelée plan hyperbolique : c'est la seule variété de dimension deux simplement connexe de courbure constante égale à* -1*.*