Corrigé de l'examen du vendredi 29 septembre 2006 — durée : 2 heures

I : une belle formule d'Elie Cartan

On se propose de démontrer la formule suivante (Cartan) : pour toute variété $\mathcal{M}$, $\forall \alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$, $\forall X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ (champs de vecteurs),

$$d\alpha(X,Y) = L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]). \tag{1}$$

1) Démontrer (1) dans le cas où $\alpha = df$, avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \Omega^0(\mathcal{M})$.
Réponse — Si $\alpha = df$, le membre de droite de (1) s'annule puisque $dd\alpha = 0$, tandis que le membre de droite est égal à $L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) - L_{[X,Y]}f$, quantité qui s'annule par définition de $[X,Y]$.
2) On suppose que $\beta \in \Omega^1(\mathcal{M})$ satisfait (1). Montrer que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $\alpha := g\beta$ satisfait aussi (1).
Réponse — On a $d\alpha = dg \wedge \beta + gd\beta$, donc α satisfait (1) ssi

$$(dg \wedge \beta)(X,Y) + gd\beta(X,Y) = (L_X g)\beta(Y) + gL_X(\beta(Y)) - (L_Y g)\beta(X) - gL_Y(\beta(X)) - g\beta([X,Y]).$$

Or on a, par définition du produit extérieur : $(dg \wedge \beta)(X,Y) = (L_X g)\beta(Y) - (L_Y g)\beta(X)$, ce qui permet de réduire l'équation précédente à $gd\beta(X,Y) = gL_X(\beta(Y)) - gL_Y(\beta(X)) - g\beta([X,Y])$, qui est vraie puisque β satisfait (1).
3) Montrer (1) dans le cas général.
Réponse — Localement toute 1-forme α peut se décomposer selon $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$, où les x^i sont des fonctions coordonnées et les α_i sont aussi des fonctions. D'après le a), toutes les 1-formes dx^i satisfont (1) et, d'après le b), on en déduit que c'est aussi le cas pour toutes les formes $\alpha_i dx^i$. Le résultat pour α se déduit donc par additivité.

II : division d'une 2-forme par une 1-forme

Soit $\mathcal{M}$ une variété riemannienne de dimension 3. On considère des formes $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$, $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$ et des champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ qui satisfont les hypothèses :

1. $\alpha \neq 0$ partout
2. le rang de (X,Y) est égal à 2 partout
3. $\omega(X,Y) = 0$ partout
4. $\alpha(X) = \alpha(Y) = 0$ partout.

On fixe un point $M_0 \in \mathcal{M}$.
1) Montrer qu'il existe un voisinage U de M_0 dans $\mathcal{M}$ tel qu'il existe un champ de vecteur Z défini sur U avec $\alpha(Z) = 1$ sur U.
Réponse — Comme (X,Y) est de rang 2 partout, on peut compléter (X,Y) en $(X,Y,\widetilde{Z})$ de façon à avoir un repère mobile sur un voisinage U de M_0 (compléter $(X(M_0), Y(M_0))$ en une base de $T_{M_0}\mathcal{M}$ et étendre $\widetilde{Z}$ au voisinage de M_0). Montrons qu'alors $\alpha(\widetilde{Z}) \neq 0$ sur U. En effet si cela n'était pas vrai, il existerait un point $M \in U$ tel que $\alpha_M(\widetilde{Z}(M)) = 0$; mais comme $\alpha(X) = \alpha(Y) = 0$ cela signifierait que $\alpha_M = 0$, ce qui contredit l'hypothèse 1. Donc $\alpha(\widetilde{Z}) \neq 0$ sur U. Il suffit alors de prendre $Z = \widetilde{Z}/\alpha(\widetilde{Z})$.
2) Soit $\beta := Z \lrcorner\, \omega$. Montrer que $\omega = \alpha \wedge \beta$.
Réponse — Il suffit de vérifier cette identité pour chaque paire de vecteurs dans (X,Y,Z) :

- pour (X,Y) : d'un côté on a $\omega(X,Y) = 0$ par 3., de l'autre, on a $\alpha \wedge \beta(X,Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X) = 0 \cdot \beta(Y) - 0 \cdot \beta(X) = 0$ par 4.
- pour (X,Z) : d'un côté on a $\omega(X,Z) = -\omega(Z,X) = -Z \lrcorner\, \omega(X) = -\beta(X)$ par définition de β, de l'autre, on a $\alpha \wedge \beta(X,Z) = \alpha(X)\beta(Z) - \alpha(Z)\beta(X) = 0 \cdot \beta(Z) - 1 \cdot \beta(X) = -\beta(X)$.
- pour (Y,Z) : même raisonnement que pour pour (X,Z).

Conclusion : *si* $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$, $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$ *et* $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ *satisfont les hypothèses* 1 *à* 4, alors il existe un voisinage U de M_0 et une forme $\beta \in \Omega^1(U)$ telle que

$$\omega = \alpha \wedge \beta. \tag{2}$$

3) On suppose que $\mathcal{M}$ est compacte sans bord. Démontrer que (2) est vrai sur toute la variété $\mathcal{M}$.
Réponse — On démontre (2) sur un voisinage U_M de n'importe quel point $M \in \mathcal{M}$. On extrait du recouvrement $\mathcal{M} = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} U_M$ un recouvrement fini $(U_i)_{i\in I}$. Notons $\beta_i \in \Omega^1(U_i)$ la forme telle que $\omega = \alpha \wedge \beta_i$ sur U_i. Soit $(\chi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité associée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. On pose $\beta = \sum_{i\in I} \chi_i\beta_i$.

III : un cas particulier du théorème de Frobenius

Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension 3 et $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ des champs de vecteurs tels le rang de (X, Y) soit égal à 2 partout.
1) Montrer que, pout tout point $M_0 \in \mathcal{M}$, il existe un voisinage U de M_0 et une 1-forme α définie sur U telle que
– $\alpha \neq 0$ sur U
– $\alpha(X) = \alpha(Y) = 0$.
On pourra montrer d'abord ce résultat sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^3$.
Réponse — Comme suggéré dans l'énoncé, nous procédons en deux étapes.

1. sur un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$: on peut écrire $\alpha = A^1dx^1 + A^2dx^2 + A^3dx^3$. Alors, si $X = X^1\frac{\partial}{\partial x^1} + X^2\frac{\partial}{\partial x^2} + X^3\frac{\partial}{\partial x^3}$ et $Y = Y^1\frac{\partial}{\partial x^1} + Y^2\frac{\partial}{\partial x^2} + Y^3\frac{\partial}{\partial x^3}$, les conditions $\alpha(X) = \alpha(Y) = 0$ sont équivalentes à $\langle A, X\rangle = \langle A, Y\rangle = 0$. Il suffit de prendre $A = X \times Y$ (le produit vectoriel). Comme (X, Y) est de rang 2, le champ A (et donc α) ne s'annule jamais.
2. sur un voisinage de M_0 dans la variété $\mathcal{M}$: soit U un voisinage ouvert de M_0 tel qu'on ait une carte locale $x : U \longrightarrow \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$. On applique ce qui précède à la paire de champs de vecteurs (x_*X, x_*Y) définies sur $\mathcal{O}$, on obtient ainsi une forme β sur $\mathcal{O}$. On pose alors $\alpha = x^*\beta$.

Dans la suite on suppose qu'on s'est donné une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$ telle que $\alpha \neq 0$ et $\alpha(X) = \alpha(Y) = 0$ partout sur $\mathcal{M}$.

2) On suppose qu'il existe des fonctions $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ telles que

$$[X, Y] = aX + bY, \quad \text{partout.}$$

Montrer que $d\alpha(X, Y) = 0$. En déduire qu'il existe une 1-forme $\beta \in \Omega^1(\mathcal{M})$ telle que $d\alpha = \alpha \wedge \beta$.
Réponse — On utilise la formule de Cartan :

$$d\alpha(X, Y) = L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = L_X(0) - L_Y(0) - \alpha(aX + bY) = 0.$$

Et on utilise alors le résultat de la partie II.
3) Réciproquement, on suppose qu'il existe $\beta \in \Omega^1(\mathcal{M})$ telle que $d\alpha = \alpha \wedge \beta$, montrer qu'il existe des fonctions a, b telles que $[X, Y] = aX + bY$.
Réponse — On utilise encore la formule de Cartan, qui donne $d\alpha(X, Y) = -\alpha([X, Y])$. Donc, si $d\alpha = \alpha \wedge \beta$, alors on en déduit que $d\alpha(X, Y) = 0$ et donc que $\alpha([X, Y]) = 0$. Comme α est non nulle et $\dim\mathcal{M} = 3$, $\forall M \in \mathcal{M}$, le noyau de $\alpha_M \in T^*_M\mathcal{M}$ est un plan. Or (X, Y) est un système de rang 2 contenu dans ce noyau et donc est une base de $\mathrm{Ker}\alpha_M$. Donc[1] $[X, Y] \in \mathrm{Ker}\alpha$ entraîne : $\exists! a, b$, $[X, Y] = aX + bY$.

Dans tout ce qui suit, on supposera dorénavant que $[X, Y] = aX + bY$.

4) Soit $\varphi : B^3_r \longrightarrow U$, où $B^3_r := \{x \in \mathbb{R}^3 | \ |x| < r\}$, un difféomorphisme tel que $\varphi_*\frac{\partial}{\partial x^3} = X$. On pose $\lambda = \varphi^*\alpha$. Montrer qu'il existe une 1-forme $\mu \in \Omega^1(B^3_r)$ telle que :

$$d\lambda = \lambda \wedge \mu.$$

[1] Remarque : on peut aussi introduire le repère (X, Y, Z) construit à la question précédente, avec $\alpha(Z) = 1$; alors la base duale de (X, Y, Z) est de la forme $(\theta_1, \theta^2, \alpha)$ et il suffit de décomposer $[X, Y] = \theta_1([X, Y])X + \theta_2([X, Y])Z + \alpha([X, Y])Z$ avec $\alpha([X, Y]) = 0$.

Que peut-on dire de $\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)$?
Réponse — $d\alpha = \alpha\wedge\beta$ entraîne $d(\varphi^*\alpha) = (\varphi^*\alpha)\wedge(\varphi^*\beta)$, on prend donc $\mu = \varphi^*\beta$.
De plus, on a

$$\lambda_x\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = (\varphi^*\alpha)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \alpha_{\varphi(x)}\left(d\varphi_x\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\right) = \alpha_{\varphi(x)}(X(\varphi(x))) = 0,$$

c'est à dire $\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = 0$.
5) Calculer $L_{\frac{\partial}{\partial x^3}}\lambda$. En déduire qu'il existe une fonction $f : B^3_r \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$L_{\frac{\partial}{\partial x^3}}\left(e^f\lambda\right) = 0.$$

Dans la suite on notera $\eta := e^f\lambda = e^f\varphi^*\alpha$.
Réponse — On utilise une (belle) formule de Cartan :

$$\begin{aligned} L_{\frac{\partial}{\partial x^3}}\lambda &= \frac{\partial}{\partial x^3}\lrcorner\, d\lambda + d\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\lrcorner\,\lambda\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^3}\lrcorner\,\lambda\wedge\mu + d\left(\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\right) \\ &= -\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\lambda. \end{aligned}$$

Soit donc

$$f(x^1,x^2,x^3) := \int_0^{x^3}\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)(x^1,x^2,t)dt.$$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x^3} = \mu\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)$ et donc en en déduit que $L_{\frac{\partial}{\partial x^3}}\left(e^f\lambda\right) = 0$.
6) On note

$$\eta_x = \eta_1(x^1,x^2,x^3)dx^1 + \eta_2(x^1,x^2,x^3)dx^2 + \eta_3(x^1,x^2,x^3)dx^3$$

la décomposition de η dans les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^3$. Traduire les conclusions des deux questions précédentes sur η^1, η^2 et η^3.
Réponse — D'abord on a $\eta\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = e^f\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = 0$. Donc $\eta^3 = 0$. Ensuite

$$\begin{aligned} L_{\frac{\partial}{\partial x^3}}\eta &= d\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\lrcorner\,\eta\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\lrcorner\, d\eta \\ &= d(0) + \frac{\partial}{\partial x^3}\lrcorner\left(\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial x^1} - \frac{\partial\eta_1}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2 + \frac{\partial\eta_1}{\partial x^3}dx^3\wedge dx^1 + \frac{\partial\eta_2}{\partial x^3}dx^3\wedge dx^2\right) \\ &= \frac{\partial\eta_1}{\partial x^3}dx^1 + \frac{\partial\eta_2}{\partial x^3}dx^2. \end{aligned}$$

Donc $L_{\frac{\partial}{\partial x^3}}\eta = 0$ entraîne alors que η^1 et η^2 ne dépendent pas de x^3. Nous en déduisons que :

$$\eta_x = \eta_1(x^1,x^2)dx^1 + \eta_2(x^1,x^2)dx^2.$$

7) Montrer qu'il existe un champ de vecteur V sur B^3_r tel que :
– en tout point x de B^3_r, $(\frac{\partial}{\partial x^3}, V)$ est une base de Kerλ_x
– $\left[\frac{\partial}{\partial x^3}, V\right] = 0$
– $dx^3(V) = 0$
Réponse — Il suffit de prendre par exemple

$$V = \eta_2(x^1,x^2)\frac{\partial}{\partial x^1} - \eta_1(x^1,x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Noter que $\alpha\neq 0 \Longrightarrow \lambda\neq 0 \Longrightarrow \eta\neq 0 \Longrightarrow V\neq 0$. Donc $(\frac{\partial}{\partial x^3}, V)$ est clairement un système de rang 2 partout. Par ailleurs, on vérifie immédiatement que ces deux vecteurs sont dans le noyau de $\eta = e^f\lambda$, donc de λ. La relation $\left[\frac{\partial}{\partial x^3}, V\right] = 0$ est, elle aussi, immédiate.
8) Montrer qu'au point $M_0\in\mathcal{M}$ passe une surface Σ telle que les restrictions des champs de vecteurs X et Y soient tangents à la surface Σ.

Réponse — On considère $X = \varphi_* \frac{\partial}{\partial x^3}$ et $T := \varphi_* V$. Comme $[X, T] = \varphi_*[\frac{\partial}{\partial x^3}, V] = 0$, on peut intégrer simultanément ces deux champs de vecteurs : il existe une application $\psi : A \longrightarrow U \subset \mathcal{M}$ telle que $\psi(0,0) = M_0$, $\frac{\partial \psi}{\partial t^1} = X(\psi)$ et $\frac{\partial \psi}{\partial t^2} = T(\psi)$. De plus, comme la paire de champ de vecteur (X, T) est de rang 2 partout, ψ est une immersion et son image est une surface. Enfin (X, T) forme une base de Kerα en tout point, donc α s'annule sur Σ. Cela est équivalent à dire que (X, Y) est une base du plan tangent à Σ en tout point.