Corrigé de l'exercice V

On rappelle que la droite projective $P\mathbb{R}$ est l'ensemble des droites du plan $\mathbb{R}^2$ qui passent par l'origine. Si $(\xi^0, \xi^1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on note $[\xi^0 : \xi^1] \in P\mathbb{R}$ la droite engendrée par (ξ^0, ξ^1). On munit $P\mathbb{R}$ de la topologie la moins fine qui rend la projection $(\xi^0, \xi^1) \longmapsto [\xi^0 : \xi^1]$ continue. Sur les deux ouverts $U_0 := \{[\xi^0 : \xi^1] | \ \xi^0 \neq 0\}$ et $U_1 := \{[\xi^0 : \xi^1] | \ \xi^1 \neq 0\}$, on définit les cartes locales

$$x_0 : \begin{array}{ccc} U_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\xi^0 : \xi^1] & \longmapsto & \frac{\xi^1}{\xi^0} \end{array} \quad \text{et} \quad x_1 : \begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\xi^0 : \xi^1] & \longmapsto & \frac{\xi^0}{\xi^1} \end{array}.$$

L'application de recollement

$$\varphi := x_1 \circ x_0^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

étant analytique réelle, $P\mathbb{R}$ est une variété analytique réelle.

1 — On considère le champ de vecteur X_0 défini sur $\mathbb{R}$ par $X_0(x) = x^2$. Déterminer $\varphi_* X_0$, l'image de X_0 par φ.

Réponse : $\varphi_* X_0$ est défini sur $\varphi(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad (\varphi_* X_0)(\varphi(x)) = d\varphi_x(X_0(x)).$$

Or $d\varphi_x = -\frac{dx}{x^2}$ dont $d\varphi_x(X_0(x)) = -\frac{X_0(x)}{x^2} = -\frac{x^2}{x^2} == -1$. Donc

$$(\varphi_* X_0)(\varphi(x)) = -1,$$

c'est à dire $\varphi_x X_0$ est le champ de vecteur constant $-\frac{d}{dy}$.

2 — Montrer que l'on peut étendre le champ de vecteur X_0 en un champ de vecteur régulier X sur $P\mathbb{R}$ (où l'on a fait la convention que $\mathbb{R}$ est inclus dans $P\mathbb{R}$ via x_0^{-1}). En d'autres termes, il s'agit de montrer qu'il existe un champ de vecteur régulier X sur $P\mathbb{R}$ tel que $(x_0)_* X = X_0$.

Réponse[1] : ici, grâce à la définition de X_0 sur $\mathbb{R}$, on s'est donné un champ de vecteur régulier $X_{|U_0}$ sur U_0 défini par $(x_0)_* X = X_0$. Ce champ de vecteur admet une extension régulière sur $P\mathbb{R}$ ssi on peut étendre la restriction $X_{|U_0 \cap U_1}$ sur U_1. Cela revient à savoir si on peut étendre $(x_1)_*(X_{|U_0 \cap U_1})$ (défini sur $\mathbb{R}^*$) sur $x_1(U_1) = \mathbb{R}$. Mais on a vu à la question précédente que $(x_1)_*(X_{|U_0 \cap U_1}) = \varphi_x X_0$ est le champ de vecteur égal à -1 sur $\mathbb{R}^*$. Ce champ de vecteur admet bien évidemment une extension régulière sur $\mathbb{R}$ (par -1) et donc on en déduit le résultat.

3 — On pose $X_1 := (x_1)_* X$. Déterminer e^{tX_1}. En déduire, pour tout $[\xi^0 : \xi^1] \in P\mathbb{R}$, ce que vaut $e^{tX}\left([\xi^0 : \xi^1]\right)$. Le champ de vecteurs X est-il complet ?

[1] Remarque : un champ de vecteur X régulier sur $P\mathbb{R}$ est un champ de vecteur tel que $X_0 := (x_0)_* X$ et $X_1 := (x_1)_* X$ soient des champs de vecteur réguliers sur $\mathbb{R}$. Et alors X_0 et X_1 sont liés par la relation $\varphi_* X_0 = X_1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Réponse : d'après la question précédente, X_1 est le champ de vecteur constant égal à -1 sur $\mathbb{R}$. Son flot est :

$$e^{tX_1}(t) = y - t.$$

On remarque au passage que, contrairement à X_0, X_1 est complet. On utilise alors la relation :

$$\forall [\xi^0 : \xi^1] \in U_1, \quad x_1(e^{tX}([\xi^0 : \xi^1])) = e^{tX_1}(x_1([\xi^0 : \xi^1])),$$

qui nous donne :

$$\forall [\xi^0 : \xi^1] \in U_1, \quad x_1(e^{tX}([\xi^0 : \xi^1])) = e^{tX_1}\left(\frac{\xi^0}{\xi^1}\right) = \frac{\xi^0}{\xi^1} - t$$

et donc

$$\forall [\xi^0 : \xi^1] \in U_1, \quad e^{tX}([\xi^0 : \xi^1]) = \left[\frac{\xi^0}{\xi^1} - t : 1\right] = [\xi^0 - t\xi^1 : \xi^1].$$

Enfin on constate que, pour tout temps $t \in \mathbb{R}$, l'application $[\xi^0 : \xi^1] \longmapsto [\xi^0 - t\xi^1 : \xi^1]$ est définie et régulière sur tout $P\mathbb{R}$. On peut vérifier que

$$\frac{d}{dt}[\xi^0 - t\xi^1 : \xi^1] = X([\xi^0 : \xi^1])$$

partout (notament $x_0([\xi^0 - t\xi^1 : \xi^1]) = \frac{\xi^1}{\xi^0 - t\xi^1}$ est bien solution de $y' = y^2$).