Corrigé de l'examen du mercredi 31 mai 2006

Durée : 3 heures

Barème indicatif : I = 4 ; II = 4 ; 1ère partie du III = 4
(la 2ème partie est hors barème) ; IV = 4 ; V =4

L'utilisation de calculatrices, téléphones portables et documents est interdite.

I

On considère la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^3$ dont l'expression dans les coordonnées (x, y, z) dans la base canonique sont :

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - z^2 + 2xy - 4yz.$$

1) Ecrire la matrice de Q dans la base canonique.

Réponse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Réécrire $Q(x, y, z)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

Réponse : en utilisant la méthode de Gauss, on trouve par exemple :

$$Q(x, y, z) = (x + y)^2 + 2(y - z)^2 - 3z^2$$

$$\text{ou bien} \quad Q(x, y, z) = (x + y)^2 - (2y + z)^2 + 6y^2.$$

3) Quel est le rang de Q ? Quelle est la signature de Q ?

Réponse : à la vue de la réduction obtenue à la question précédente, on voit que le rang de Q est 3 et sa signature est $(2, 1)$.

II

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ canonique (de sorte que la base (e_1, e_2, e_3) est orthonormée). On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 11 & -2 & -8 \\ -2 & 2 & -10 \\ -8 & -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Réponse : la matrice A de f est symétrique, donc un théorème du cours nous garantit le résultat.

2) Déterminer les valeurs propres de f.

Réponse : on calcule le polynôme caractéristique et on trouve ses racines : $-1, 1, 2$.
En fait le calcul n'était pas évident et une approche brutale conduisait à de gros calculs. Pour les éviter il faut essayer de retrancher des lignes et des colonne. Voici un exemple de procédé, où l'on ne fait que retrancher des lignes. Tout d'abord on remarque l'existence du facteur $\frac{1}{9^3}$ dans le déterminant de $A - \lambda 1_3$. Comme on s'attend à des expressions simples

pour les valeurs propres, la première tâche va consister à faire apparaître des facteurs 9 dans le déterminant. Commençons donc par ajouter la deuxième ligne à la première :

$$
\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 11-9\lambda & -2 & -8 \\ -2 & 2-9\lambda & -10 \\ -8 & -10 & 5-9\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \rightarrow \times 1 \\ \cdot \end{matrix} \\
&= \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix} 9(1-\lambda) & -9\lambda & -18 \\ -2 & 2-9\lambda & -10 \\ -8 & -10 & 5-9\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{9^2}\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & -2 \\ -2 & 2-9\lambda & -10 \\ -8 & -10 & 5-9\lambda \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Puis nous multiplions la troisième ligne par 2 et nous divisons le déterminant simultanément par 2, avant d'ajouter à la nouvelle troisième ligne la deuxième ligne.

$$
\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \frac{1}{9^2}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & -2 \\ -2 & 2-9\lambda & -10 \\ -16 & -20 & 10-18\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot \\ \rightarrow \times 1 \\ \leftarrow + \end{matrix} \\
&= \frac{1}{9^2}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & -2 \\ -2 & 2-9\lambda & -10 \\ -18 & -18-9\lambda & -18\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2\cdot 9}\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & -2 \\ -2 & 2-9\lambda & -10 \\ -2 & -2-\lambda & -2\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \times 1 \\ \cdot \\ \leftarrow + \end{matrix} \\
&= \frac{1}{2\cdot 9}\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & -2 \\ -2 & 2-9\lambda & -10 \\ -1-\lambda & -2-2\lambda & -2-2\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1+\lambda}{2\cdot 9}\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & -2 \\ -2 & 2-9\lambda & -10 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot & \leftarrow + \\ \leftarrow + & \uparrow \\ \rightarrow \times(-5) & \rightarrow \times(-1) \end{matrix} \\
&= \frac{1+\lambda}{2\cdot 9}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 12-9\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{(1+\lambda)(2-\lambda)}{2\cdot 9}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 12-9\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= -\frac{(1+\lambda)(2-\lambda)}{9}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 12-9\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\frac{(1+\lambda)(2-\lambda)}{9}(9-9\lambda) \\
&= (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1).
\end{aligned}
$$

3) Trouver une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est diagonale.

Réponse :

$$
A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.
$$

III, première partie

On note E l'espace vectoriel des polynômes réels dont le degré est inférieur ou égal à 3 et on note (X^0, X^1, X^2, X^3) la base de E définie par $X^0(x) = 1$, $X^1(x) = x$, $X^2(x) = x^2$, $X^3(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On définit sur E le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

1)Déterminer $\langle X^p, X^q\rangle$ en fonction de $p+q$, pour $p, q = 0, 1, 2, 3$.

Réponse : on a

$$\begin{aligned}
\langle X^p, X^q\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^p x^q dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^{p+q} dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2(p+q+1)}\left(1-(-1)^{p+q+1}\right).
\end{aligned}$$

Et comme $-(-1)^{p+q+1} = (-1)^{p+q}$ vaut 1 si $p+q$ est pair et -1 si $p+q$ est impair, on trouve que

$$\langle X^p, X^q\rangle = \frac{1}{p+q+1}, \quad \text{si } p+q \text{ est pair,}$$

$$\langle X^p, X^q\rangle = 0, \quad \text{si } p+q \text{ est impair,}$$

2) Ecrire la matrice de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans la base (X^0, X^1, X^2, X^3).

Réponse : en utilisant les calculs de la question précédente, on obtient tout de suite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

3) On note E_+ le sous-espace de E constitué des polynômes pairs et E_- le sous-espace de E constitué des polynômes impairs. Démontrer que E_+ est orthogonal à E_-.

Réponse : c'est la conséquence d'une propriété générale : si f est un polynôme pair et si g est un polynôme impair, alors le produit fg est un polynôme impair et donc son intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle. Donc $\langle f, g\rangle = 0$. Autrement dit, en particulier, $\forall f \in E_+$, $\forall g \in E_-$, $\langle f, g\rangle = 0$.

4) a) Fabriquer une base orthonormée de E_+.

Réponse : d'abord il est clair qu'une base de E_+ est (X^0, X^2). Pour construire une base orthonormée de E_+, il suffit donc d'appliquer l'algorithme de Gram–Schmidt à cette base. On construit d'abord une base orthogonale (v_0, v_2) en posant $v_0 = X^0$ et $v_2 = X^2 - \frac{\langle X^2, X^0\rangle}{||X^0||^2}X^0 = X^2 - \frac{1}{3}X^0$. Puis on normalise cette base et on obtient comme base orthonormée (u_0, u_2) avec $u_0 = v_0 = X^0$ et $u_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}v_2 = \sqrt{5}\left(\frac{3X^2}{2} - \frac{X^0}{2}\right)$.

b) Fabriquer une base orthonormée de E_-.

Réponse : d'abord il est clair qu'une base de E_- est (X^1, X^3). Pour construire une base orthonormée de E_-, il suffit donc d'appliquer l'algorithme de Gram–Schmidt à cette base. On construit d'abord une base orthogonale (v_1, v_3) en posant $v_1 = X^1$ et $v_3 = X^3 - \frac{\langle X^3, X^1\rangle}{||X^1||^2}X^1 = X^3 - \frac{3}{5}X^1$. Puis on normalise cette base et on obtient comme base orthonormée (u_1, u_3) avec $u_1 = \sqrt{3}v_1 = \sqrt{3}X^1$ et $u_3 = \frac{5\sqrt{7}}{2}v_3 = \sqrt{7}\left(\frac{5X^3}{2} - \frac{3X^1}{2}\right)$.

c) En déduire une base orthonormée (u_0, u_1, u_2, u_3) de E (on ordonnera les vecteurs u_0, u_1, u_2, u_3 selon le degré de ces polynômes).

Réponse : puisqu'on sait que $E_+ \perp E_-$, il suffit de prendre la réunion d'une base orthonormée de E_+ et d'une base orthonormée de E_-.

III, deuxième partie, hors barème

5) Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie et soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel de dimension finie k. Soit $(e_1, \cdots, e_k)$ une base orthonormée de F et soit $p : H \longrightarrow F$ la projection orthogonale sur F. Rappeler, sans donner de preuve, la formule qui donne, pour tout $x \in H$, la projection $p(x)$ en fonction de x et de $e_1, \cdots, e_k$. (Rappelons que cette formule reste valable si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace vectoriel de dimension **infinie** muni d'un produit scalaire et si E est de dimension **finie**.)
Réponse : $p(x) = \langle e_1, x\rangle e_1 + \cdots + \langle e_k, x\rangle e_k$.
6) On considère l'espace vectoriel H des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

et on désigne à présent par E le sous-espace vectoriel de H constitué par les fonctions polynomiales sur $[-1, 1]$ dont le degré est inférieur ou égal à 3. On note p la projection orthogonale de H vers E. Soit $f \in H$ la fonction définie par $f(x) = |x|$, $\forall x \in [-1, 1]$. Déterminer $p(f)$.
Réponse : on applique le résultat de la question précédente, avec la base $(u_0, u_1, u_2 u_3)$ construite à la question 4c). On obtient

$$p(f) = \langle u_0, f\rangle u_0 + \langle u_1, f\rangle u_1 + \langle u_2, f\rangle u_2 + \langle u_3, f\rangle u_3.$$

Et il faut donc calculer les produits scalaires $\langle u_p, f\rangle$, pour $p = 0, 1, 2, 3$. Mais comme f est une fonction paire, on peut tout de suite écrire que $\langle u_1, f\rangle = \langle u_3, f\rangle = 0$. Par ailleurs

$$\langle u_0, f\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 \cdot |x|dx = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\langle u_2, f\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1) \cdot |x|dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^3 - x)dx = \left[\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{8}.$$

Donc $p(f) = \frac{1}{2}u_0 + \frac{\sqrt{5}}{8}u_2 = \frac{1}{2}X^0 + \frac{5}{16}(3X^2 - X^0) = \frac{15}{16}X^2 + \frac{3}{16}X^0$. C'est à dire,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad p(f)(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}.$$

7) Tracer, avec le maximumde soin, sur la même figure, le graphe de f et de $p(f)$.

IV

Dire si chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ est ouvert ? ou fermé ? ou ni l'un ni l'autre ? Justifier votre réponse.
1) $\mathbb{R}^2$.
Réponse : cet ensemble est à la fois ouvert et fermé, c'est un résultat du cours. On peut le retrouver de la façon suivante. D'une part, $\mathbb{R}^2$ est ouvert car, pour tout $a \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $r > 0$, on a bien entendu $B(a, r) \subset \mathbb{R}^2$. Il est aussi fermé car, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, si cette suite convergente, alors sa limite est bien sûr dans $\mathbb{R}^2$.
2) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; y > x^2\}$.
Réponse : cet ensemble est un ouvert, car il est l'image inverse de l'ouvert $]0, +\infty[$ par

l'application $f : (x,y) \longmapsto y - x^2$ et cette application est continue car elle est polynomiale. Mais A n'est pas fermé pour la raison suivante : la suite $\left((0, \frac{1}{1+n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans A et converge dans $\mathbb{R}^2$, mais sa limite, $(0,0)$, n'est pas dans A.
3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \geq x^2\}$.
Réponse : cet ensemble est un fermé, car il est l'image inverse ddu fermé $[0, +\infty[$ par l'application $f : (x,y) \longmapsto y - x^2$. Mais il n'est pas ouvert, car $\{(0,0)\} \in A$ mais, pour tout $r > 0$, la boule $B((0,0), r)$ n'est pas incluse dans A.
4) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > x^2\} \cup \{(0,-1)\}$.
Réponse : cet ensemble n'est ni fermé, ni ouvert (mais il est la réunion de l'ouvert $f^{-1}(]0,+\infty[)$ et du fermé $\{(0,-1)\}$). En effet il n'est pas ouvert pour la raison suivante : $(0,-1) \in A$, mais, quel que soit le réel $r > 0$, $B((0,-1), r)$ n'est pas contenu dans A. Et A n'est pas fermé pour la même raison qu'à la question 2.

V

Soit $a \in]0, +\infty[$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x(x^2 - a^2). \end{array}$$

1) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Réponse : f est un polynôme de deux variables et donc est $\mathcal{C}^2$.
2) Déterminer les points critiques de f.
Réponse : nous commençons par calculer la différentielle de f :

$$df_{(x,y)} = -\left(x^2 - \frac{a^2}{3}\right) dx + ydy.$$

Les points critiques sont les points où $df_{(x,y)}$ s'annule, c'est à dire les solutions du système $x^2 = \frac{a^2}{3}$ et $y = 0$, donc les points $(-a/\sqrt{3}, 0)$ et $(a/\sqrt{3}, 0)$.
3)Déterminer — s'ils existent — les extrema locaux de f.
Réponse : comme le domaine sur lequel f est défini est ouvert (c'est $\mathbb{R}^2$), si jamais f admet des extrema locaux, un résultat du cours nous garantit qu'il sont points critiques de f. Il s'agit donc d'étudier ce qui s'y passe. Calculons pour cela la matrice hessienne

$$\text{Hess}(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc en particulier

$$\text{Hess}(f)_{(-a/\sqrt{3},0)} = \begin{pmatrix} 2a/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } \text{Hess}(f)_{(a/\sqrt{3},0)} = \begin{pmatrix} -2a/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, comme $\text{Hess}(f)_{(-a/\sqrt{3},0)}$ est défini positif, $(-a/\sqrt{3}, 0)$ est un minimum local. Mais comme $\text{Hess}(f)_{(a/\sqrt{3},0)}$ est défini, mais n'a pas de signe, on ne peut pas conclure que $(a/\sqrt{3}, 0)$ est un extremum local. En réalité, c'est un point selle, puisque la restriction de f à la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ admet un maximum local en $(a/\sqrt{3}, 0)$, mais la restriction de f à la droite $\{a/\sqrt{3}\} \times \mathbb{R}$ admet un minimum local en $(a/\sqrt{3}, 0)$.
4) Que se passe-t-il si $a = 0$?

Réponse : on a alors un unique point critique, qui est $\{(0,0)\}$, mais le hessien de f en ce point est

$$\mathrm{Hess}(f)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et est donc non défini (en fait de rang 1). On ne peut donc rien conclure à partir de $\mathrm{Hess}(f)_{(0,0)}$. Cela dit on voit facilement que la restriction de f à la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ admet un point d'inflexion en $(0,0)$ et cela entraîne que $(0,0)$ ne peut pas être un extremum local.