Corrigé de l'examen du jeudi 30 septembre 2004

Notations : *(i) On rappelle que le produit extérieur de la p-forme* $\alpha \in \Lambda^p V^*$ *par la q-forme* $\beta \in \Lambda^q V^*$ *est donné par* $\forall v_1, \cdots, v_{p+q}$,

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \cdots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{p!q!} \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \cdots v_{\sigma(p+q)}).$$

(ii) pour toute p-forme $\alpha \in \Lambda^p V^*$ *et pour tout vecteur* $X \in V$*, on note* $X \lrcorner \alpha \in \Lambda^{(p-1)} V^*$ *la* $(p-1)$*-forme définie par*

$$\forall X_2, \cdots, X_p \in V, \quad X \lrcorner \alpha(X_2, \cdots, X_p) = \alpha(X, X_2, \cdots, X_p).$$

On appelle « produit intérieur de α *par* X *» la* $(p-1)$*-forme* $X \lrcorner \alpha$.

1 Un peu d'algèbre multilinéaire

Dans ce problème $\alpha \in V^*$ *est une 1-forme et* $\gamma \in \Lambda^2 V^*$ *est une 2-forme.*
a) *Montrer que* $\forall u, v, w \in V$ *l'expression* $\alpha \wedge \gamma(u, v, w)$ *peut se simplifier comme la somme de trois termes.*
Une application directe de la formule rappelée en (i) plus haut donne

$$\alpha \wedge \gamma(u, v, w) = \frac{1}{2}\alpha(u)\left(\gamma(v, w) - \gamma(w, v)\right) + \frac{1}{2}\alpha(v)\left(\gamma(w, u) - \gamma(u, w)\right) + \frac{1}{2}\alpha(w)\left(\gamma(u, v) - \gamma(v, u)\right).$$

Puis en tenant compte du fait que γ est antisymétrique on obtient

$$\alpha \wedge \gamma(u, v, w) = \alpha(u)\gamma(v, w) + \alpha(v)\gamma(w, u) + \alpha(w)\gamma(u, v).$$

b) *Soit* $\alpha \in V^*$ *une 1-forme* non nulle. *On note* H *le noyau de* α. *Montrer qu'il existe* $u \in V$ *tel que* $\alpha(u) = 1$. *Ce vecteur* u *est-il unique ?*
Puisque α est non nulle, il existe $x \in V$ tel que $\alpha(x) \neq 0$. On prend alors $u = x/\alpha(x)$. Si $\dim V > 1$ alors u n'est pas unique puisque $\forall v \in H$, $\alpha(u + v) = \alpha(u) = 1$.
c) *On suppose dans cette question et dans la suite que* $\alpha \wedge \gamma = 0$. *Montrer que la restriction de* γ *à* H *est nulle (i.e.* $\forall v, w \in H$, $\gamma(v, w) = 0$*).*
Pour tout $v, w \in H$, on a

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha \wedge \gamma(u, v, w) \\ & =^{a)} & \alpha(u)\gamma(v, w) + \alpha(v)\gamma(w, u) + \alpha(w)\gamma(u, v) \\ & = & 1 \cdot \gamma(v, w) + 0 \cdot \gamma(w, u) + 0 \cdot \gamma(u, v) = \gamma(v, w). \end{array}$$

d) *On note* $\beta = u \lrcorner \gamma$*, où* u *a été introduit à la question b). Montrer que* $\gamma = \alpha \wedge \beta$.
Pour tout $v, w \in V$ on a

$$\begin{array}{rcl} \alpha \wedge \beta(v, w) & = & \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) \\ & = & \alpha(v)\gamma(u, w) - \alpha(w)\gamma(u, v) \\ & = & -\alpha(v)\gamma(w, u) - \alpha(w)\gamma(u, v) \\ & \overset{\alpha\wedge\gamma=0}{\underset{et\, a)}{=}} & \alpha(u)\gamma(v, w) \\ & = & \gamma(v, w). \end{array}$$

2 Le lemme de Cartan

Démontrer que, sur une variété $\mathcal{M}$, pour tout champs de vecteur X et Y sur $\mathcal{M}$ et pour toute 1-forme différentielle α sur $\mathcal{M}$,

$$d\alpha(X,Y) = L_X\alpha(Y) - L_Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]). \tag{1}$$

Nous travaillons dans un système de coordonnées locales $\left(x^i\right)$:

$$\alpha = \alpha_i dx^i,$$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Le terme de gauche est :

$$\begin{aligned} d\alpha(X,Y) &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j(X,Y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) \left(X^i Y^j - Y^i X^j\right) \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right) X^i Y^j. \end{aligned}$$

Le terme de droite est :

$$\begin{aligned} L_X\alpha(Y) - L_Y\alpha(Y) - \alpha([X,Y]) &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\alpha_j Y^j\right) - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\alpha_j X^j\right) - \alpha_j \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \\ &= X^i \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} Y^j + \alpha_j \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) - Y^i \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} X^j + \alpha_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \\ &\quad - \alpha_j \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \\ &= X^i Y^j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - X^i Y^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \\ &= X^i Y^j \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \right). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

3 Repère mobile orthonormé

Dans tout ce problème on pourra utiliser et admettre si nécessaire les relations (1), (2) et (3) dans certaines questions.

3.1 Cas général

Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété riemannienne de dimension n et de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $U \subset \mathcal{M}$ un ouvert sur lequel est défini un « repère orthonormé mobile », c'est à dire n champs de vecteur $\mathcal{C}^\infty$ $e_1, \cdots, e_n$ sur U tels que $\forall M \in \mathcal{M}$, $(e_1(M), \cdots, e_n(M))$ est une base orthonormée de $T_M\mathcal{M}$. On note $(\alpha_M^1, \cdots, \alpha_M^n)$ la base duale et on définit ainsi n 1-formes $\mathcal{C}^\infty$ sur U. On note ∇ la connexion de Levi-Civita sur $T\mathcal{M}$ et $\left(\omega_j^i\right)_{1\leq i,j\leq n}$ les formes de connexions, caractérisées par les relations

$$\nabla_u e_i = \omega_i^j(u) e_j, \quad \forall i \in [\![1, n]\!],$$

où u est un champ de vecteur quelconque.
a) *Démontrer que* $\omega^i_j + \omega^j_i = 0$, $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$.
On utilise le fait que la connexion de Levi-Civita respecte la métrique. Pour tout vecteur tangent u :

$$\begin{aligned} 0 &= L_u \delta_{ij} = L_u \left(g(e_i, e_j)\right) \\ &= g\left(\nabla_u e_i, e_j\right) + g\left(e_i, \nabla_u e_j\right) \\ &= g\left(e_k \omega^k_i(u), e_j\right) + g\left(e_i, e_k \omega^k_j(u)\right) \\ &= \omega^j_i(u) + \omega^i_j(u). \end{aligned}$$

b) *Démontrer que* $\forall i, j, k \in [\![1, n]\!]$,

$$\alpha^k([e_i, e_j]) = \omega^k_j(e_i) - \omega^k_i(e_j). \tag{2}$$

On utilise le fait que la connexion de Levi-Civita a une torsion nulle, c'est à dire $\nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] = 0$, pour tous champs de vecteurs u, v. Avec $u = e_i$ et $v = e_j$, cela donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i - [e_i, e_j] \\ &= e_k \omega^k_j(e_i) - e_k \omega^k_i(e_j) - [e_i, e_j]. \end{aligned}$$

Donc en prenant l'image de chaque expression dans cette identité par α^k, on obtient :

$$\alpha^k\left([e_i, e_j]\right) = \omega^k_j(e_i) - \omega^k_i(e_j).$$

c) *On définit le tenseur de courbure de Riemann R par la relation*

$$R(u, v) \cdot w := \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w,$$

pour tous champs de vecteur u, v, w sur U. Montrer que $\forall i, j, k \in [\![1, n]\!]$,

$$R(e_i, e_j) \cdot e_k = \left(d\omega^l_k + \omega^l_m \wedge \omega^m_k\right)(e_i, e_j) e_l. \tag{3}$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j) \cdot e_k &= \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{[e_i, e_j]} e_k \\ &= \nabla_{e_i} \left(\omega^l_k(e_j) e_l\right) - \nabla_{e_j} \left(\omega^l_k(e_i) e_l\right) - \omega^l_k([e_i, e_j]) e_l \\ &= L_{e_i} \left(\omega^l_k(e_j)\right) e_l + \omega^m_l(e_i) \omega^l_k(e_j) e_m \\ &\quad - L_{e_j} \left(\omega^l_k(e_i)\right) e_l - \omega^m_l(e_j) \omega^l_k(e_i) e_m \\ &\quad - \omega^l_k([e_i, e_j]) e_l \\ &\overset{}{=}_{\substack{lemme\,de \\ Cartan}} d\omega^l_k(e_i, e_j) e_l + \left(\omega^m_l(e_i) \omega^l_k(e_j) - \omega^m_l(e_j) \omega^l_k(e_i)\right) e_m \\ &= \left(d\omega^l_k + \omega^l_m \wedge \omega^m_k\right)(e_i, e_j) e_l. \end{aligned}$$

3.2 Cas d'une surface

On suppose dorénavant que $\mathcal{M}$ est une surface, i.e. $dim \mathcal{M} = n = 2$.
a) *Trouver une expression des formes ω^i_j en fonction de e_1, e_2, α^1 et α^2.*
Ici on peut commencer par remarque que le résultat démontré à la question 3.1-a) implique que

$$\omega^1_1 = \omega^2_2 = 0 \quad \text{et} \quad \omega^2_1 = -\omega^1_2.$$

Il suffit donc d'évaluer ω^1_2. Pour cela on applique la relation (2) avec $(i, j) = (1, 2)$ et pour $k = 1$ et 2 :

$$\begin{aligned} \alpha^1([e_1, e_2]) &= \omega^1_2(e_1) - \omega^1_1(e_2) &= \omega^1_2(e_1) \\ \alpha^2([e_1, e_2]) &= \omega^2_2(e_1) - \omega^2_1(e_2) &= \omega^1_2(e_2). \end{aligned}$$

Donc, puique $\omega_2^1 = \omega_2^1(e_1)\alpha^1 + \omega_2^1(e_2)\alpha^2$,

$$\omega_2^1 = \alpha^1([e_1, e_2])\alpha^1 + \alpha^2([e_1, e_2])\alpha^2.$$

Remarque : on pouvait chercher une réponse générale à la question, valable en toute dimension. Pour cela il fallait à nouveau utiliser le fait que $\omega_j^i = -\omega_i^j$ et (2) pour une certaine valeur de (i, j, k) et toutes ses permutations circulaires :

$$\begin{array}{rclcl} \alpha^k([e_i, e_j]) & = & \omega_j^k(e_i) - \omega_i^k(e_j) & = & \omega_j^k(e_i) + \omega_k^i(e_j) \\ \alpha^j([e_k, e_i]) & = & \omega_i^j(e_k) - \omega_k^j(e_i) & = & \omega_i^j(e_k) + \omega_j^k(e_i) \\ \alpha^i([e_j, e_k]) & = & \omega_k^i(e_j) - \omega_j^i(e_k) & = & \omega_k^i(e_j) + \omega_i^j(e_k). \end{array}$$

En sommant les deux premières relations et en soustrayant la troisième, on obtient

$$\omega_j^k(e_i) = \frac{1}{2}\left(\alpha^k([e_i, e_j]) + \alpha^j([e_k, e_i]) - \alpha^i([e_j, e_k])\right)$$

et donc

$$\omega_j^k = \frac{1}{2}\left(\alpha^k([e_i, e_j]) + \alpha^j([e_k, e_i]) - \alpha^i([e_j, e_k])\right)\alpha^i.$$

b) *Exprimer la « courbure de Gauss »*

$$K = g(R(e_1, e_2) \cdot e_2, e_1)$$

en fonction des ω_j^i et de e_1 et e_2.
Nous appliquons la formule (3) et à nouveau nous tenons compte du fait que $\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0$ et $\omega_1^2 = -\omega_2^1$:

$$\begin{array}{rcl} R(e_1, e_2) \cdot e_2 & = & \left(d\omega_2^l + \omega_m^l \wedge \omega_2^m\right)(e_1, e_2)e_l \\ & = & \left(d\omega_2^1 + \omega_1^1 \wedge \omega_2^1 + \omega_2^1 \wedge \omega_2^2\right)(e_1, e_2)e_1 \\ & & + \left(d\omega_2^2 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_2^2 \wedge \omega_2^2\right)(e_1, e_2)e_2 \\ & = & d\omega_2^1(e_1, e_2)e_1. \end{array}$$

D'où l'on déduit que

$$K = d\omega_2^1(e_1, e_2).$$

c) *Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], U)$ une immersion telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = M_0$. Pour tout $\theta \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ et pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on définit une base orthonormée $(v_1(t), v_2(t))$ de $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ (dépendant de façon régulière de t) par*

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_1(t) & = & \cos\theta(t)e_1(\gamma(t)) + \sin\theta(t)e_2(\gamma(t)) \\ v_2(t) & = & -\sin\theta(t)e_1(\gamma(t)) + \cos\theta(t)e_2(\gamma(t)). \end{array}\right.$$

Trouver une équation sur θ pour que l'on ait

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}v_1(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)}v_2(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

c'est à dire « v_1 et v_2 sont transportés parallèlement le long de γ ».
Ici un point semble avoir gêné tout le monde : pour donner un sens à par exemple $\nabla_{\dot\gamma}v_1$ et calculer cette quantité, on n'a pas d'autre ressource que d'essayer d'appliquer la relation

$$\nabla_{\dot\gamma}(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) = L_{\dot\gamma}(\cos\theta)e_1 + \cos\theta\nabla_{\dot\gamma}e_1 + L_{\dot\gamma}(\sin\theta)e_2 + \sin\theta\nabla_{\dot\gamma}e_2.$$

En ce qui concerne $\nabla_{\dot\gamma}e_1$ ou $\nabla_{\dot\gamma}e_2$, il suffit d'utiliser n'importe champ de vecteur u défini sur un voisinage de $M = \gamma(t)$ tel que $u(M) = \dot\gamma(t)$ et de poser $\nabla_{\dot\gamma(t)}e_1(\gamma(t)) = \nabla_{u(M)}e_1(M)$ et le résultat ne dépend que de la valeur de u en M (qui vaut $\dot\gamma(t)$).

Pour une quantité comme $L_{\dot\gamma}(\cos\theta)$, il semble que cela ait posé d'avantage de difficultés. En effet $L_{\dot\gamma}$ agit sur des fonctions définies sur (des sous-ensembles de) $\mathcal{M}$ alors que θ est une fonction sur $[0, 2\pi]$. C'est que d'une certaine façon on a identifié θ à une fonction sur (un sous-ensemble de) $\mathcal{M}$, et ce, d'une manière indépendante d'un choix de coordonnées. Comment ? Il n'y a essentiellement qu'une seule façon, qui de plus est conforme au sens géométrique de la situation, à savoir que l'on dérive suivant l'immersion γ : en se restreignant si nécessaire à un intervalle $I := [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ on peut toujours supposer que γ est un plongement. Alors on définit sur $\gamma(I)$ la fonction $\theta\circ\gamma^{-1}$. C'est ainsi qu'il faut comprendre que l'on a fait l'abus de notation $\theta\circ\gamma^{-1} \simeq \theta$ et que

$$L_{\dot\gamma}(\cos\theta) = L_{\dot\gamma}(\cos(\theta\circ\gamma^{-1})),$$

qui est bien définie puisque $\theta\circ\gamma^{-1}$ est défini sur la sous-variété $\gamma(I)$ et $\dot\gamma(t)$ esst tangent à $\gamma(I)$ en $\gamma(t)$. Il ne reste plus alors qu'à appliquer les règles de calcul différentiel. Posant $M = \gamma(t)$:

$$\begin{aligned}
L_{\dot\gamma(t)}(\cos\theta\circ\gamma^{-1}(M)) &= -\sin(\theta\circ\gamma^{-1}(M))d(\theta\circ\gamma^{-1})_M(\dot\gamma(t))\\
&= -\sin(\theta\circ\gamma^{-1}(M))d\theta_t\circ d\left(\gamma^{-1}\right)_M(\dot\gamma(t))\\
&= -\sin(\theta\circ\gamma^{-1}(M))d\theta_t\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right)\\
&= -\sin\theta(t)\,\dot\theta(t).
\end{aligned}$$

Après cette mise au point, il ne nous reste plus qu'à calculer :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot\gamma}v_1 &= -\sin\theta\,\dot\theta e_1 + \cos\theta\omega_1^2(\dot\gamma)e_2 + \cos\theta\,\dot\theta e_2 + \sin\theta\omega_2^1(\dot\gamma)e_1\\
&= -\sin\theta\left(\dot\theta - \omega_2^1(\dot\gamma)\right)e_1 + \cos\theta\left(\dot\theta + \omega_1^2(\dot\gamma)\right)e_2\\
&= \left(\dot\theta - \omega_2^1(\dot\gamma)\right)v_2.
\end{aligned}$$

Un calcul similaire donne

$$\nabla_{\dot\gamma}v_2 = -\left(\dot\theta - \omega_2^1(\dot\gamma)\right)v_1.$$

Donc l'équation recherchée est

$$\dot\theta - \omega_2^1(\dot\gamma) = 0.$$

d) *Résoudre cette équation en θ.*

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \omega_2^1(\dot\gamma(s))ds.$$

e) *Soit $\mathcal{B}\subset U$ un domaine fermé dont le bord $\partial\mathcal{B}$ est régulier. On suppose que γ est une paramétrisation directe de $\partial\mathcal{B}$ (modulo le fait que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$). Donner une relation entre $\theta(0)$, $\theta(2\pi)$ et la valeur de $K = g(R(e_1, e_2)\cdot e_2, e_1)$ à l'intérieur de $\mathcal{B}$.*
On a, en utilisant le théorème de Stokes,

$$\theta(2\pi) - \theta(0) = \int_0^{2\pi}\omega_2^1(\dot\gamma(t))dt = \int_0^{2\pi}\gamma^*\omega_2^1 = \int_{\partial\mathcal{B}}\omega_2^1 = \int_{\mathcal{B}} d\omega_2^1.$$

Et donc en utilisant le résultat de la question 3.2-b,

$$\theta(2\pi) - \theta(0) = \int_{\mathcal{B}} K\alpha^1\wedge\alpha^2.$$

Interprétation : en transportant de façon parallèle la base $(v_1(0), v(0))$ le long de γ, celle-ci a tourné d'un angle $\int_{\mathcal{B}} K\alpha^1\wedge\alpha^2$ lorsque l'on est revenu au point de départ.

3.3 Usage de coordonnées conformes

On suppose toujours $n = 2$. On considère une carte locale $x = (x^1, x^2) : U \longrightarrow \Omega$, où U est un ouvert de $\mathcal{M}$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On note $g_{ij}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. On fait l'hypothèse que x est conforme, *c'est à dire qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $g_{ij}(x) = e^{2f(x)}\delta_{ij}$, $\forall x \in \Omega$. On demande de déterminer dans les coordonnées (x^1, x^2) :*

a) *un repère mobile orthonormé (e_1, e_2) (le plus simple possible)*

On remarque que le champ de repère qui est canonique dans la carte x, c'est à dire $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)$, satisfait

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right) = e^{2f(x)} \quad \text{et} \quad g\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Il suffit donc de multiplier ces vecteurs par le facteur $e^{-f(x)}$:

$$e_1(x) = e^{-f(x)}\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad e_2(x) = e^{-f(x)}\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

b) *le corepère mobile (α^1, α^2) dual du repère mobile (e_1, e_2).*

$$\alpha^1 = e^{f(x)}dx^1, \quad \alpha^2 = e^{f(x)}dx^2.$$

c) *Les formes de connexion ω^i_j dans ce même repère.*

On applique le résultat de la question 3.2-a. Pour cela on calcule d'abord le crochet de Lie de e_1 et e_2 : pour toute fonction φ,

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= e^{-f}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(e^{-f}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right) - e^{-f}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(e^{-f}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right) \\
&= e^{-2f}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right) - e^{-2f}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right) \\
&= e^{-2f}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} - \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\alpha^1([e_1, e_2]) = e^{-f}\frac{\partial f}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \alpha^2([e_1, e_2]) = -e^{-f}\frac{\partial f}{\partial x^1}$$

et

$$\omega^1_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^1 - \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^2.$$

d) *La courbure de Gauss $K = g(R(e_1, e_2) \cdot e_2, e_1)$.*

On applique le résultat du 3.2-b :

$$K = d\omega^1_2(e_1, e_2).$$

Comme

$$d\omega^1_2 = -\Delta f\, dx^1 \wedge dx^2,$$

il vient :

$$K = -e^{-2f}\Delta f.$$