Corrigé de l'examen du 8 janvier 2010

Sujet du groupe D (cours par F. Hélein, TD par J. Deserti, I. Kharroubi, J. Sohier et M. Stienon)
Durée : 3 heures. Les documents sont interdits, téléphones portables et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. *Questions de cours*

1. 1) Énoncer le théorème de Rolle.
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue sur** $[a, b]$, **dérivable sur** $]a, b[$. Alors si $f(a) = f(b)$, on a :

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0.$$

1. 2) Calculer les dérivées partielles $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par : $f(x, y) = y^x$.
On prend $y \in]0, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$ (car on ne peut définir la puissance réelle d'un réel y que si y est positif). Alors $f(x, y) = e^{x \log y}$. Cette fonction admet des dérivées partielles car l'exponentielle et le logarithme son dérivables.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (\log y)e^{x \log y} = (\log y)y^x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{y}e^{x \log y} = xy^{x-1}. \end{aligned}$$

Exercice 2.
On note $P(x) = x^6 - 1$ et $Q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.

2. 1) Effectuer la division euclidienne de P par Q.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} x^6 & & & & & & -1 & x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 \\ \cline{8-8} -[x^6 & +x^5 & +x^4 & +x^3 & +x^2 & +x] & & x - 1 \\ & -x^5 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & -x & -1 & \end{array}$$

Donc $P(x) = Q(x)(x - 1)$.

2. 2) Factoriser le polynôme Q dans $\mathbb{C}$ (en particulier, on donnera ses racines dans $\mathbb{C}$).
Comme $P(x) = x^6 - 1$, on sait (grâce au cours) que les racines de P sont les racines sixièmes de l'unité. Notons $\theta := e^{i\pi/3}$, alors

$$P(x) = (x - 1)(x - \theta)(x - \theta^2)(x - \theta^3)(x - \theta^4)(x - \theta^5).$$

On déduit de la question précédente que les racines de Q sont :

$$\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5\} \setminus \{1\} = \{\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5\}.$$

Donc

$$Q(x) = (x - \theta)(x - \theta^2)(x - \theta^3)(x - \theta^4)(x - \theta^5).$$

Exercice 3.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace F et le sous-espace G définis par
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \ \text{ et } \ 3x - y - z = 0 \ \}$.
- G est engendré par la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, -1, 2)$, $v_2 = (4, -1, 3)$ et $v_3 = (1, 2, -3)$.

3. 1) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F ; en déduire la dimension de F.

F est défini par deux équations linéaires homogènes : il est donc facile de montrer qu'une combinaison linéaire de deux vecteurs dans F est encore dans F. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Cherchons une base de F : on résoud le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 0 \\ 3x-y-z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2y+z &=& -x \\ -y-z &=& -3x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -4x \\ -z &=& -7x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -4x \\ z &=& 7x \end{array}\right.,$$

si bien que $(x,y,z) = x(1,-4,7)$. Donc une base de F est $\mathcal{B}_1 := \{(1,-4,7)\}$ et $\dim F = 1$.

3. 2) Montrer que G admet pour équation $x - 5y - 3z = 0$.

Une méthode possible est de partir du fait qu'un vecteur (x,y,z) est dans G si et seulement si il existe des coefficients λ, μ, ν tels que $(x,y,z) = \lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3$ et d'éliminer λ, μ, ν, pour obtenir que (x,y,z) doit satisfaire la relation $x - 5y - 3z = 0$. Cela revient à étudier le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \lambda + 4\mu + \nu \\ y &=& -\lambda - \mu + 2\nu \\ z &=& 2\lambda + 3\mu - 3\nu \end{array}\right.$$

Une autre méthode, qui nécessite moins de calculs (et qui permet de répondre à la question suivante avec aussi très peu de calculs) est la suivante :
a) on vérifie d'abord que le rang de (v_1, v_2, v_3) est supérieur ou égal à 2, car si on choisit deux vecteurs dans $\{v_1, v_2, v_3\}$, on s'aperçoit qu'ils sont linéairement indépendants. Donc $\dim G \geq 2$.
b) on vérifie ensuite que v_1, v_2 et v_3 sont tous les trois solutions de l'équation $x - 5y - 3z = 0$, ce qui est immédiat. Qu'est-ce cela signifie géométriquement ? que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont contenus dans le plan d'équation $x-5y-3z = 0$ et donc que G est **inclus** dans le plan d'équation $x - 5y - 3z = 0$. Donc $\dim G \leq 2$.
De ces deux informations, on déduit que $\dim G = 2$.
Attention : beaucoup d'étudiants se sont contenté de vérifier que v_1, v_2 et v_3 sont des solusions de l'équation $x - 5y - 3z = 0$ (c'est à dire b)). Cela veut juste dire que G est un sous-espace vectoriel du plan d'équation $x - 5y - 3z = 0$, mais cela ne suffit pas à montrer que G est *égal à* ce plan !

3. 3) Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de G ; en déduire la dimension de G.

Il suffit de prendre (v_1, v_2) : ces deux vecteurs sont linéairement indépendants [dans le cas où l'on n'a que deux vecteurs, c'est très simple à vérifier : il faut et il suffit que ces deux vecteurs soient non nuls et non collinéaires]. Comme on a montré que $\dim G = 2$, $\mathcal{B}_2 := \{v_1, v_2\}$ forme donc une base de G.

3. 4) Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas un système libre.

On peut prendre $\mathcal{B}_1 = \{w\}$, où $w := (1,-4,7)$ (question 3.1) et $\mathcal{B}_2 := \{v_1, v_2\} = \{(1,-1,2),(4,-1,3)\}$ (question 3.3). Donc $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, w\}$. Il suffit pour répondre positivement à la question de trouver des réels λ et μ tels que $w = \lambda v_1 + \mu v_2$; $(\lambda, \mu) = (5, -1)$ convient.

3. 5) Déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est géneratrice de $\mathbb{R}^3$ ou non.

Comme $\mathcal{F}$ est composée de 3 vecteurs et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est une famille libre. Or on a vu à la question précédente que $\mathcal{F}$ n'était pas une famille libre. Donc $\mathcal{F}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+2} - x\right)$

On doit étudier la différence entre deux quantités qui tendent vers $+\infty$. On écrit

$$\sqrt{x^2+x+2}-x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right).$$

On s'est maintenant ramené au produit de x, qui tend vers $+\infty$ par une quantité qui tend vers 0. Pour mieux comprendre comment se comporte cette dernière quantité, on pose $t=\frac{1}{x}$, qui tend vers 0 et on étudie la fonction f définie par $f(t)=\sqrt{1+t+2t^2}$ au voisinage de 0. Cette fonction est continue et dérivable au voisinage de 0 (et même sur tout $\mathbb{R}$). Sa dérivée est :

$$f'(t)=\frac{1+4t}{2\sqrt{1+t+2t^2}}$$

et vaut $f'(0)=\frac{1}{2}$ en 0. Maintenant on remarque que par ailleurs

$$f'(0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-1}{t}=\lim_{x\to\infty}x\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right).$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)=f'(0)=\frac{1}{2}.$$

Une **autre méthode** est possible : on écrit

$$\sqrt{x^2+x+2}-x=\frac{(\sqrt{x^2+x+2}-x)(\sqrt{x^2+x+2}+x)}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=\frac{(x^2+x+2)-x^2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}$$

et on retrouve le même résultat.

(b) $\lim\limits_{x\to0}(x^2+x)\ln(x^2)$

On a $(x^2+x)\log(x^2)=2x^2\log x+2x\log x$. Or $\lim_{x\to0}x\log x=\lim_{x\to0}x^2\log x=0$, donc la limite que l'on cherche est 0.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}}\cos x\,\arctan x\right)$

D'une part $\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}e^{-\sqrt{\log x}}=0$. D'autre part les fonctions cos et arctan sont bornées :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |\cos x|\le1,\quad |\arctan x|\le\frac{\pi}{2},$$

donc $\left|\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}}\cos x\,\arctan x)\right|\le\frac{\pi}{2}e^{-\sqrt{\log x}}$. La limite recherchée est donc 0.

(d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-6x^2+12x-8}$

On remarque que le numérateur $P(x):=x^3-x^2-x-2$ et le dénominateur $Q(x):=x^3-6x^2+12x-8$ s'annulent en 2 qui est précisément la valeur vers laquelle tend x. On a donc une forme indéterminée. On doit essayer de factoriser $P(x)$ et $Q(x)$ par des fonctions s'annulant en 2. Comme P et Q sont des polynômes, il suffit d'en effectuer les divisions euclidienne par $x-2$ (et de recommencer si cela s'avérerait nécessaire, ce qui ne sera pas le cas). Une première division euclidienne donne :

$$P(x)=x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1),\quad Q(x)=x^3-6x^2+12x-8=(x-2)(x^2-4x+4).$$

Donc, si $x\neq2$, on a :

$$\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-6x^2+12x-8}=\frac{x^2+x+1}{x^2-4x+4}=\frac{x^2+x+1}{(x-2)^2}.$$

On remarque maintenant que le numérateur ne s'annule pas en 2, mais vaut 7. En revanche le dénominateur s'annule en 2. Donc la limite de cette fraction lorsque x tend vers 2 sera singulière (et pourrait être $\pm\infty$). Mais comme la valeur du numérateur en 2 est $7 > 0$ et comme le dénominateur est une fonction positive, cette limite ne peut être que $+\infty$.

Exercice 5.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x$.

5. 1) Étudier les variations de f (en justifiant ce que vous écrivez). Calculer les valeurs prises par f en 1, 2 et 3. Dessiner son graphe.
La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ puisqu'elle est polynomiale. Sa dérivée est $f'(x) = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$, elle s'annule donc et change de signe en -1 et 1. Le tableau de variations est comme suit :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

et $f(1) = -2$, $f(2) = 2$ et $f(3) = 18$.

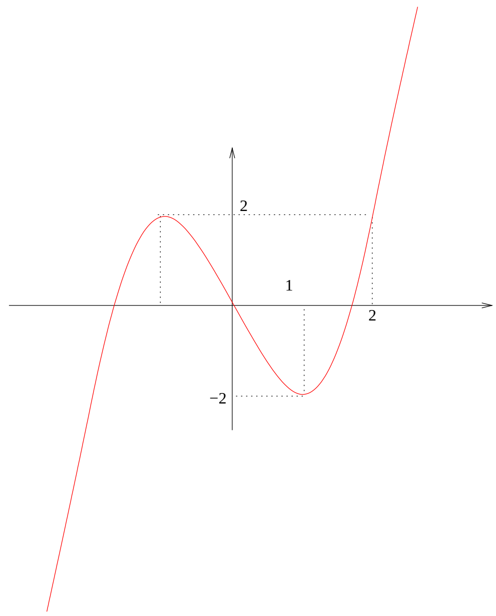

FIG. 1 –

5. 2) On note g la restriction de f à $[1, +\infty[$. Montrer que l'image de $[1, +\infty[$ par g est un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$, où α est un réel que l'on précisera. Montrer que g est une bijection $[1, +\infty[$ vers $[\alpha, +\infty[$ et que l'application réciproque $g^{-1} : [\alpha, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ est continue.
D'après l'étude précédente, l'image de $[0, +\infty[$ par f est $[-2, \infty[$, donc $\alpha = -2$. Sur $]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur cet intervalle. Elle est également continue sur $[1, +\infty[$. Donc g est une bijection sur $[1, +\infty[$ et son inverse est continue sur $[-2, \infty[$.

5. 3) Montrer que l'application g^{-1} est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$. Est-elle dérivable en α ?
Comme $g'(x) > 0$ si $x \in]1, +\infty[$, g^{-1} est dérivable sur $\{y = g(x) |\ x \in]1, +\infty[\} = g(]1, +\infty[) =]\alpha, +\infty[$ et

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{3(g^{-1}(y)^2 - 1)}.$$

En $y = \alpha = -2$, g n'est pas dérivable car $g'(1) = 0$.

5. 4) Déterminer les valeurs de la dérivée de g^{-1} en 2 et en 18.
On a remarqué à la première question que $2 = g(2)$ et $18 = g(3)$. Donc

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{9}$$
$$(g^{-1})'(18) = \frac{1}{g'(3)} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{24}.$$

Exercice 6.
[On rappelle que $2 < e < 3$.] On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 4 - \ln x$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

6. 1) Montrer que : $1 \leq \ln 4 \leq 2$. En déduire pour tout $n \geq 1$: $2 \leq u_n \leq 4$.
Sachant que la fonction exponentielle est croissante, montrer l'encadrement $1 \leq \log 4 \leq 2$ revient à montrer que :

$$e^1 \leq e^{\log 4} \leq e^2 \quad\Longleftrightarrow\quad e \leq 4 \leq e^2.$$

Or

$$2 < e < 3 \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} 2 < e \\ e < 3 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} 4 \leq e^2 \\ e \leq 4 \end{array}\right.,$$

d'où le résultat.
A présent nous remarquons que $f'(x) = -\frac{1}{x} < 0$ et donc que f est une fonction décroissante. Donc

$$\forall x \in [2,4],\quad f(2) \geq f(x) \geq f(4) \quad\Longleftrightarrow\quad 4 - \log 2 \geq f(x) \geq \quad 4 - \log 4.$$

Mais comme $\log 2 \geq 0$ (ne serait-ce que, par exemple, parce que $1 \leq \log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$) et comme $\log 4 \leq 2$ (on vient de le montrer), on a les inégalités $4 \geq 4 - \log 2$ et $4 - \log 4 \geq 4 - 2 = 2$ et donc

$$\forall x \in [2,4],\quad 4 \geq 4 - \log 2 \geq f(x) \geq 4 - \log 4 \geq 2.$$

Donc $x \in [2,4] \Longrightarrow f(x) \in [2,4]$. A présent le deuxième résultat demandé, à savoir montrer que la suite u_n prend ses valeurs dans $[2,4]$ se montrer par récurrence en vérifiant que $u_0 \in [2,4]$ (immédiat, puisque $u_0 = 2$) et en utilisant ce qui précède.

6. 2) Montrer que l'équation $x + \ln x = 4$ a une solution et une seule dans $]0,+\infty[$ que l'on notera α. Encadrer α par deux entiers consécutifs.
Soit $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x + \log x$. L'équation étudiée s'écrit $g(x) = 4$. Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution de cette équation, il suffit de montrer que la fonction g est une bijection de $]1,+\infty[$ vers son image et que cette image contient 4. Or une étude montre que f est une fonction **continue**, dérivable, de dérivée $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. En particulier f est **strictement croissante** et est donc une bijection vers son image. Pour déterminer $f(]1,+\infty[)$, on calcule $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On en conclut que l'image de g est $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ contient 4, c'est terminé. Soit donc $\alpha \in]1,+\infty[$ l'unique solution de $g(x) = 4$. On utilise le fait que $2 < e < 3$ (rappelé dans l'énoncé), qui entraine $\log 2 < 1 < \log 3$. Donc

$$g(2) = 2 + \log 2 < 2 + 1 = 3 < 4 = g(\alpha) = 3 + 1 < 3 + \log 3 = g(3),$$

qui implique $2 < \alpha < 3$ puisque g est croissante.

6. 3) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f, établir l'inégalité : $|u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha|/2$. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leq 2^{-n}$. Préciser la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Récapitulons : nous savons que $2 \leq u_n \leq 4$ et $2 \leq \alpha \leq 4$ (car $2 < \alpha < 3$). De plus α est l'unique solution de :

$$x + \log x = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = x.$$

Enfin $f'(x) = -\frac{1}{x}$, donc $\forall x \in [2,4]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Nous appliquons maintenant le théorème des accroissements finis à f entre α et u_n :

$$\exists c \text{ entre } \alpha \text{ et } u_n, \quad f(u_n) - f(\alpha) = f'(c)(u_n - \alpha).$$

Compte tenu du fait que $f(\alpha) = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, cela est équivalent à $u_{n+1} - \alpha = f'(c)(u_n - \alpha)$ et entraine que

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f'(c)||u_n - \alpha| \leq \frac{|u_n - \alpha|}{2},$$

car $2 < c < 4$ et donc $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$. En utilisant le fait que $|u_0 - \alpha| = |2 - \alpha| \leq 1$ (à cause de $2 < \alpha < 3$), on en déduit par une récurrence immédiate que $|u_n - \alpha| \leq 2^{-n}$. Donc u_n converge vers α lorsque $n \to +\infty$.

6. 4) Déterminer le signe de $\dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ?

Nous avons utilisé à la question précédente le théorème des accroissements finis pour obtenir

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = f'(c) = -\frac{1}{c} < 0.$$

Cela signifie que u_n est alternativement à gauche et à droite de α (puisque $u_n - \alpha$ change de signe à chaque itération). La suite n'est donc ni croissante, ni décroissante.
