Géométrie euclidienne

1 Le groupe des isométries

1.1 Passer d'une base orthonormée à une autre

Commençons par le problème suivant : soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E et $(u_1, \cdots, u_n)$ une autre base de E. Soit P la matrice de passage de $(e_1, \cdots, e_n)$ à $(u_1, \cdots, u_n)$, i.e.

$$(u_1, \cdots, u_n) = (e_1, \cdots, e_n)P \quad \Longleftrightarrow \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} e_i P_{ij}.$$

Nous cherchons une condition **nécessaire et suffisante sur** P pour que $(u_1, \cdots, u_n)$ soit **aussi** une base orthonormée.

Pour cela notons A la matrice de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (c'est à dire le produit scalaire !) dans la base $(u_1, \cdots, u_n)$. Alors la base u est orthonormée ssi $A = 1_n$. Or la théorie des formes quadratiques nous dit que A s'obtient à partir de la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans $(e_1, \cdots, e_n)$, c'est à dire 1_n, et de P par la relation

$$A = {}^tP 1_n P = {}^tPP.$$

Donc nous en déduisons la :

Proposition 1 *Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée et si P est la matrice de passage de la base $(e_1, \cdots, e_n)$ à la base $(u_1, \cdots, u_n)$, alors $(u_1, \cdots, u_n)$ est orthonormée ssi*

$${}^tPP = 1_n.$$

Remarque — On peut aussi retrouver ce résultat directement : nous avons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

où

$$a_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} e_k P_{ki}, \sum_{\ell=1}^{n} e_\ell P_{\ell j} \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} P_{ki} P_{kj}.$$

On reconnaît à droite l'élément de la matrice ${}^tPP$ situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. Et donc $(u_1, \cdots, u_n)$ est orthonormée ssi $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$, $\forall i, j$, c'est à dire ssi ${}^tPP = 1_n$.

On note $O(n) := \{P \in GL(n, \mathbb{R}) |\ {}^tPP = 1_n\}$.

Lemme 1 *On a les deux propriétés suivantes :*
(a) Si $P \in O(n)$, alors P admet un inverse qui appartient à $O(n)$ et, plus précisément, $P^{-1} = {}^tP$
(b) si $P, P' \in O(n)$, alors $PP' \in O(n)$.
Autrement dit $O(n)$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$, c'est donc en particulier un groupe pour le produit des matrices.

Démonstration — La première assertion, c'est à dire le fait que tout $P \in O(n)$ est inversible, avec ${}^tP$ comme inverse, est une conséquence immédiate de la définition de $O(n)$. La deuxième propriété pourrait être démontrée directement en prouvant que, si ${}^tPP = 1_n$ et ${}^tP'P' = 1_n$, alors ${}^t(PP')(PP') = 1_n$ (Exercice : le faire !) ; mais nous allons l'établir par une autre méthode qui repose sur la caractérisation donnée par la proposition 1.
Soit $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E et soit $(u_1, \cdots, u_n)$ et $(v_1, \cdots, v_n)$ les deux autres bases de E telles que :

$$(u_1, \cdots, u_n) = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)P \quad \text{et} \quad (v_1, \cdots, v_n) = (u_1, \cdots, u_n)P',$$

(c'est à dire P est la matrice de passage de $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ à $(u_1, \cdots, u_n)$ et P' est la matrice de passage de $(u_1, \cdots, u_n)$ à $(v_1, \cdots, v_n)$). Alors on a, à cause de la proposition 1 :
- $P \in O(n)$ et $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ orthonormée $\Longrightarrow (u_1, \cdots, u_n)$ est orthonormée
- $P' \in O(n)$ et $(u_1, \cdots, u_n)$ orthonormée $\Longrightarrow (v_1, \cdots, v_n)$ est orthonormée

Mais

$$(v_1, \cdots, v_n) = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)PP',$$

et donc, puisque $(v_1, \cdots, v_n)$ est orthonormée, on doit avoir $PP' \in O(n)$ toujours à cause de la proposition 1.

Définition 1 *L'ensemble* $O(n) := \{P \in GL(n, \mathbb{R}) | \ {}^tPP = 1_n\}$*, muni du produit matriciel est le* **groupe orthogonal** *de dimension* n.

1.2 Isométries

Définition 2 *Soit* E *un espace vectoriel euclidien. On appelle* **isométrie de** E *tout endomorphisme de* E *tel que :*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

(on dira alors que f préserve le produit scalaire*). On note* $O(E)$ *l'ensemble des isométries de* E*.*

Proposition 2 $O(E)$ *est un groupe pour la loi de composition* $\circ$.

Démonstation — Nous devons montrer que :
- **toute isométrie** $f \in O(E)$ **est inversible**. Pour cela, comme f est un endomorphisme, il suffit de montrer que f est injectif (ce qui entraîne automatiquement que f est surjectif), c'est à dire que $\mathrm{Ker} f = \{0\}$. Or $\forall x \in E$, $f(x) = 0$ entraîne que $||x||^2 = ||f(x)||^2 = ||0||^2 = 0$, donc que $x = 0$
- **la composée de deux isométries est une isométrie**. C'est une conséquence très simple de la définition de $O(E)$ et nous la laissons au lecteur à titre d'exercice.

Caractérisation matricielle dans une base orthonormée

Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors, si f est une isométrie, il est clair que l'on a nécessairement

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle, \quad \forall i, j. \tag{1}$$

Mais (1) est aussi une condition suffisante car, si elle satisfaite, on a : $\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y)\rangle &= \left\langle f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle f(e_i), f(e_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

et donc f est bien dans $O(E)$.

Soit A la matrice de f dans $(e_1, \cdots, e_n)$. Cherchons à quelle condition sur A on a $f \in O(E)$. En notant

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

on a

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i a_{ij}, \quad \forall j,$$

et

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n e_k a_{ki}, \sum_{\ell=1}^n e_\ell a_{\ell j}\right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}.$$

Donc une **condition nécessaire et suffisante** pour que f soit une isométrie est (1), qui équivaut à :

$$\begin{aligned}
& \langle f(e_i), f(e_j)\rangle &&= \langle e_i, e_j\rangle, \quad \forall i, j \\
\iff & \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} &&= \delta_{ij}, \quad \forall i, j \\
\iff & {}^tAA &&= 1_n \\
\iff & A &&\in O(n).
\end{aligned}$$

Nous en concluons que :

Proposition 3 *Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E, si $f \in End(E)$ et si A est la matrice de f dans $(e_1, \cdots, e_n)$, alors $f \in O(E)$ ssi*

$$A \in O(n), \quad \textit{i.e.} \quad AA = 1_n.$$

Petit récapitulatif des propriétés de $O(n)$

Nous avons vu que $O(n)$ forme un groupe et, en particulier, toute matrice $A \in O(n)$ est inversible, avec $A^{-1} = {}^tA$. Une autre propriété est capitale :

$$\forall A \in O(n), \quad 1 = \det(1_n) = \det({}^tAA) = \left(\det{}^tA\right)(\det A) = (\det A)^2.$$

Donc

$$\forall A \in O(n), \quad \det A = \pm 1.$$

Cela nous amène à définir :

Définition 3 *L'ensemble*

$$SO(n) := \{A \in O(n) | detA = 1\}$$

est un sous-groupe de $O(n)$*, appelé* **groupe des rotations** *de dimension* n*.*

Nous devons justifier l'assertion faite dans la définition ci-dessus, à savoir que $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$. Autrement dit, il faut montrer que :

1. $\forall A \in SO(n)$, A admet un inverse dans $SO(n)$: cela provient de l'identité $\det(A^{-1}) = \det({}^tA) = \det A$
2. $\forall A, A' \in SO(n)$, $AA' \in SO(n)$: cela provient de l'identité $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Etude d'un premier exemple : le groupe $O(2)$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2),$$

cherchons à analyser la relation ${}^tAA = 1_2$. Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix},$$

cela nous donne le système d'équations :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 & = & 1 & \text{(i)} \\ ab + cd & = & 0 & \text{(ii)} \\ b^2 + d^2 & = & 1 & \text{(iii)} \end{cases}$$

La relation (i) équivaut à : $\exists \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Alors la relation (ii) nous donne : $b\cos\theta + d\sin\theta = 0$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Mais alors la relation (iii) entraîne : $\lambda^2 = 1$, donc

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\lambda\sin\theta \\ \sin\theta & \lambda\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \lambda = \pm 1.$$

Il est alors intéressant de remarquer que $\det A = ad - bc = \lambda$. Ainsi

– si $\det A = 1$, $A \in SO(2)$ et, plus précisément,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est la matrice de rotation d'angle θ.

– si $\det A = -1$, $A \in O(2) \setminus SO(2)$ et, plus précisément

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

est la matrice[1] de la symétrie orthogonale dans $\mathbb{R}^2$ d'axe la droite engendrée par

$$u = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right).$$

[1] dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, qui est en même temps une base orthonormée pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$

Exercice *Démontrer que toute matrice A dans $O(2)$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}^2$ et que : si $detA = 1$, A est seulement diagonalisable dans $\mathbb{C}^2$, avec les valeurs propres $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$; si $detA = -1$, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}^2$, avec les valeurs propres 1 et -1.*

1.3 Diagonalisation des isométries

Nous allons étudier plus en détail la structure du groupe $O(n)$ des isométries.

Lemme 2 *Soit $A \in O(n)$, alors, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de A. De plus les valeurs propres de A sont toutes de module égal à 1.*

Démonstration — Prenons une telle matrice d'isométrie A associons-lui l'endomorphisme

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ x & \longmapsto & Ax, \end{array}$$

où $\mathbb{C}^n$ est identifié avec l'ensemble des matrices colonnes avec n composantes complexes et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(i) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f, alors $\exists x \in \mathbb{C}^n$ tel que $x \neq 0$ et $Ax = f(x) = \lambda x$. Cela entraîne, en utilisant le fait que les éléments de la matrice A sont réels :

$$A\overline{x} = \overline{A}\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

Cette identité nous indique donc que $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de f (avec le vecteur propre $\overline{x}$). En particulier, si λ n'est pas réel, alors $\overline{\lambda} \neq \lambda$.
(ii) Utilisons à présent le fait que ${}^tAA = 1_n$: cela donne, $\forall x \in \mathbb{C}^n$,

$${}^t(\overline{Ax})Ax = {}^t(\overline{A}\overline{x})Ax = {}^t\overline{x}\,{}^t\overline{A}Ax = {}^t\overline{x}\,{}^tAAx = {}^t\overline{x}1_nx = {}^t\overline{x}x.$$

Mais, si on suppose en plus que x est vecteur propre de f pour la valeur propre λ, alors

$${}^t(\overline{Ax})Ax = {}^t(\overline{\lambda x})\lambda x = {}^t\overline{x}\overline{\lambda}\lambda x = |\lambda|^2\,{}^t\overline{x}x.$$

En comparant les deux identités, on en déduit que

$${}^t\overline{x}x = |\lambda|^2\,{}^t\overline{x}x.$$

Et comme on peut déduire facilement de $x \neq 0$ le fait que $|x|^2 \neq 0$, on conclut que $|\lambda|^2 = 1$. Donc λ a bien un module égal à 1.

Corollaire 1 *Si $A \in O(n)$ et si λ est une valeur propre* **réelle** *de A, alors $\lambda = \pm 1$. Si λ est une valeur propre* **non réelle** *de A, alors $\overline{\lambda}$ est une autre valeur propre de A.*

Lemme 3 *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n. Soit $f \in O(E)$ une isméétrie de E et soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.*

Démonstration — Rappelons que dire que « F est stable par f » signifie que : $\forall x \in F$, $f(x) \in F$. Observons maintenant que, puisque F est stable par f et

$$\forall x \in F, \quad ||f(x)|| = ||x||,$$

la restriction $f_{|F}$ de f à F est une isométrie de F dans F. Donc en particulier $f_{|F}$ est inversible, i.e. $\forall y \in F$, $\exists! x \in F$ tel que $y = f(x)$. A présent, soit $a \in F^\perp$ quelconque et cherchons à montrer

que $f(a) \in F^\perp$, c'est à dire à montrer que $\forall y \in F$, $\langle f(a), y\rangle = 0$. D'après ce qui précède $\exists x \in F$, $y = f(x)$, donc
$$\langle f(a), y\rangle = \langle f(a), f(x)\rangle = \langle a, x\rangle = 0.$$
Donc $f(a) \in F^\perp$.

Application : analyse de $O(\mathbb{R}^3)$

Travaillons dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique : c'est celle qui est telle que la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ soit orthonormée. Soit $f \in O(\mathbb{R}^3)$.
Première observation : le polynôme caractéristique $\det(f - \lambda 1_n)$ est un polynôme réel du troisième degré, donc il admet *au moins une* valeur propre réelle λ. Soit u le vecteur propre de f correspondant à cette valeur propre, i.e.
$$f(u) = \lambda u.$$
Sans perte de généralité on peut supposer que $||u|| = 1$. De plus, d'après le lemme 2 on sait que $\lambda = \pm 1$.
Deuxième observation : on note $F := \mathbb{R}u$ la droite engendrée par u. Elle est bien évidemment stable par f et, d'après le lemme 3, le plan $F^\perp = u^\perp$ est stable par f. Donc en fait la restriction $f_{|u^\perp}$ de f à $u^\perp$ est une isométrie de de $u^\perp$. Soit (u_1, u_2) une base orthonormée de $u^\perp$ et soit B la matrice de $u^\perp$ dans (u_1, u_2). Alors $B \in O(2)$. On peut donc appliquer l'analyse de $O(2)$ faite précédemment.
Synthèse : notons d'abord que la famille (u_1, u_2, u) est une base orthonormée. La matrice de f dans cette base est :
$$A = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\epsilon\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \epsilon\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \epsilon, \lambda = \pm 1.$$
Et on a alors $\det A = \epsilon\lambda$. On peut alors distinguer quatre cas selon les valeurs de ϵ et de λ.

Cas où det$A = 1$, c'est à dire $\epsilon = \lambda$

- **Si** $\epsilon = \lambda = 1$, c'est à dire $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, f est une rotation d'angle θ, d'axe la droite engendrée et orientée par u.
- **Si** $\epsilon = \lambda = -1$, c'est à dire $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, f est la symétrie orthogonale autour de la droite engendrée par $\cos\frac{\theta}{2}u_1 + \sin\frac{\theta}{2}u_2$ (ou encore la rotation d'angle π autour de cette même droite).

Cas où det$A = -1$, c'est à dire $\epsilon = -\lambda$

- **Si** $\epsilon = -\lambda = -1$, c'est à dire $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, f est la symétrie orthogonale autour du plan engendré par u et $\cos\frac{\theta}{2}u_1 + \sin\frac{\theta}{2}u_2$.
- **Si** $\epsilon = -\lambda = 1$, c'est à dire $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, f est la composée de la symétrie orthogonale autour du plan engendré par (u_1, u_2) et d'une rotation dans ce plan, d'angle θ.

2 Orientation d'un espace vectoriel

En préliminaire, rappelons la définition d'une *relation d'équivalence.*

Définition 4 *1) Une* **relation** *dans un ensemble X est un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $X \times X$. Si $(a,b) \in \mathcal{R}$, on note « $a\mathcal{R}b$ ».*
2) Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble X est une **relation d'équivalence** *ssi*
– $\mathcal{R}$ est **réflexive** *: $\forall a \in X$, $a\mathcal{R}a$*
– $\mathcal{R}$ est **symétrique** *: $\forall a, b \in X$, si $a\mathcal{R}ba$ alors $b\mathcal{R}a$.*
– $\mathcal{R}$ est **transitive** *: $\forall a, b, c \in X$, si $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$, alors $a\mathcal{R}c$.*
3) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans X et si $a \in X$, le sous-ensemble

$$[a] := \{b \in X |\ a\mathcal{R}b\}$$

est appelé la **classe d'équivalence de** a.

Proposition 4 *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dsur X, alors X est l'union disjointe de toutes les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$.*

Démonstration — exercice !
En effet les classes d'équivalence sont utilisées pour « ranger » les éléments d'un ensemble X par « classes » d'éléments.

A présent soit E un *espace vectoriel réel* de dimension finie n et considérons

$$X := \{\text{bases de } E\}.$$

Notons que si $e, e' \in X$, alors la matrice de passage P de e à e' est inversible, donc en particulier a un déterminant non nul, c'est à dire : soit strictement positif, soit strictement négatif. Nous définissons sur X la relation suivante :

$$\text{si } e, e' \in X, \quad e\mathcal{R}e' \quad \Longleftrightarrow \quad \det P > 0.$$

Proposition 5 *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X.*

Démonstration : exercice.

Il est en fait facile de voir qu'il n'y a que deux classes d'équivalence : si on choisit une base $e_0 \in X$, alors pour toute autre base $e \in X$, si P est la matrice de passage de e_0 à e, on a soit $\det P > 0$, auquel cas $e \in [e_0]$, soit $\det P < 0$ et alors $[e_0] \cap [e] = \emptyset$, mais $X = [e_0] \cup [e]$.

Le choix d'une orientation sur E : *cela revient à choisir une des deux classes d'équivalence comme « référence »*. On note X_+ la classe ainsi sélectionnée. Les bases qui sont dans X_+ sont appelées **bases directes de** E. On dit alors que E **est orienté**. On remarque que, pour préciser l'orientation de E, il suffit de connaître une seule base dans X_+.

Cas d'un espace euclidien

On suppose à présent que E est euclidien et on définit :

$$X^{ortho} := \{\text{bases orthonormées de } E\} \subset X.$$

Nous restreignons la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ à X^{ortho} : cela nous donne une relation d'équivalence, que nous noterons encore $\mathcal{R}$. Si $e, e' \in X^{ortho}$, la matrice de passage P de $e = e'$ est forcément dans $O(n)$, donc a un déterminant égal à ± 1. Ainsi la restriction de $\mathcal{R}$ à X^{ortho} est définie par :

$$\forall e, e' \in X^{ortho}, \quad e\mathcal{R}e' \quad \Longleftrightarrow \quad \det P = 1.$$

Alors X^{ortho} se divise en deux classes $X_+^{ortho} := X^{ortho} \cap X_+$ et $X_-^{ortho} := X^{ortho} \cap X_-$. A nouveau, orienter E revient à sélectionner l'une de ces deux classes, que l'on a choisit de noter X_+^{ortho}. Alors $X^{ortho} = X_+^{ortho} \cup X_-^{ortho}$. Enfin on dira qu'une base $e \in X_+^{ortho}$ est **orthonormée directe**.

3 Produit mixte et produit vectoriel

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle, X_+^{ortho})$ un *espace vectoriel euclidien orienté* de dimension n et soit $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une **base directe** de E. Pour tout n-uplet $(v_1, \cdots, v_n)$ de E^n, soit M la matrice de passage de e à $(v_1, \cdots, v_n)$, i.e. telle que

$$(v_1, \cdots, v_n) = (e_1, \cdots, e_n)M.$$

Définition 5 *On pose*

$$(v_1, \cdots, v_n)_e := detM$$

et on appelle cette quantité le **produit mixte** *des vecteurs* $v_1, \cdots, v_n$.

Ainsi on a définit une notion de « produit » de n vecteurs, à valeurs dans $\mathbb{R}$. En apparence il se pourrait que ce produit dépende du choix de la base, mais ...

Proposition 6 *L'application* $(v_1, \cdots, v_n) \longmapsto (v_1, \cdots, v_n)_e$ *est indépendant du choix de la base* $e = (e_1, \cdots, e_n)$*,* **pourvu que** e **soit orthonormée et directe**.

Autrement dit le produit mixte ne dépend que de la structure euclidienne et de l'orientation choisie sur E.
Démonstration — Soit $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n)$ une autre base orthonormée et directe et soit P la matrice de passage de e à $\tilde{e}$. Alors $P \in SO(n)$. Comment est défini $(v_1, \cdots, v_n)_{\tilde{e}}$? à partir de la matrice $\tilde{M}$ de passage de $\tilde{e}$ à $(v_1, \cdots, v_n)$ par la relation $(v_1, \cdots, v_n) = \tilde{e}\tilde{M}$. Cela entraîne :

$$eM = (v_1, \cdots, v_n) = \tilde{e}\tilde{M} = eP\tilde{M} \quad \Longrightarrow \quad M = P\tilde{M}.$$

Donc $\det M = \det(P\tilde{M}) = (\det P)(\det\tilde{M}) = \det\tilde{M}$, car $\det P = 1$, puisque[2] $P \in SO(n)$.

Conséquence : puisqu'il n'y a pas d'ambiguité, on notera

$$(v_1, \cdots, v_n)_+$$

le *produit mixte* des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$.

3.1 Cas de la dimension 2

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté. Soit v_1, v_2 deux vecteurs dans E et essayons d'interpréter géométriquement ce qu'est le produit mixte $(v_1, v_2)_+$.

Un cas peu intéressant est celui où (v_1, v_2) n'est pas une base de E : cela signifie que la matrice M de passage d'une base orthonormée directe (e_1, e_2) de E à (v_1, v_2) est de rang strictement

[2]on remarque qu'en fait on n'a besoin que de l'hypothèse $\det P = 1$ dans la preuve de la proposition

plus petit que 2, et donc, que $\det M = 0$. Alors $(v_1, v_2)_+ = 0$.

On va donc supposer que (v_1, v_2) est une base de E. Appliquons une variante (où l'on va utiliser le fait que E est orienté) du procédé d'orthogonalisation de Gram–Schmidt à (v_1, v_2). Nous notons

$$u_1 := \frac{v_1}{||v_1||}.$$

Alors *il existe un unique vecteur $u_2 \in E$ tel que (u_1, u_2) soit une base othonormée directe* de E.

- En effet, soit $u_1^{\perp}$ l'espace orthogonal à u_1, c'est une droite, elle donc engendrée par un vecteur non nul $w \perp u_1$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $u_2 = \lambda w$.
- u_2 doit être de norme 1, donc $|\lambda| = 1/||w||$. Cela laisse deux possibilités pour u_2 : $w/||w||$ ou $-w/||w||$.
- enfin la base (u_1, u_2) doit être directe. Mais la matrice de passage de $(u_1, w/||w||)$ à $(u_1, -w/||w||)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, c'est à dire de déterminant égal à -1. Donc $(u_1, w/||w||)$ et $(u_1, -w/||w||)$ sont dans deux classes d'équivalence différentes. Mais comme il n'y a que deux classes, c'est qu'une et une seule de ces deux bases est directe. C'est celle-là qui sera (u_1, u_2)

Soit M la matrice de passage de (u_1, u_2) à (v_1, v_2) et notons là $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors :

- $u_1 := \frac{v_1}{||v_1||}$ implique que $a = ||v_1||$ et $c = 0$
- puisque (u_1, u_2) est orthonormée et $v_2 = bu_1 + du_2$, on a $b^2 + d^2 = ||v_2||^2$. Donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $(b, d) = (||v_2|| \cos\theta, ||v_2|| \sin\theta)$.

Ainsi

$$M = \begin{pmatrix} ||v_1|| & ||v_2|| \cos\theta \\ 0 & ||v_2|| \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad (v_1, v_2)_+ = \det M = ||v_1|| \cdot ||v_2|| \sin\theta.$$

Et *le produit mixte de v_1 par v_2 est le produit des normes des vecteurs et du sinus de l'angle qu'ils forment.* Il est intéressant de comparer cette relation avec $\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1|| \cdot ||v_2|| \cos\theta$, de sorte que l'on a toujours

$$\langle v_1, v_2 \rangle^2 + (v_1, v_2)_+^2 = ||v_1||^2 \cdot ||v_2||^2.$$

Géométriquement, $(v_1, v_2)_+$ s'interprète comme *l'aire algébrique du parallélogramme de côtés v_1 et v_2.*

3.2 Cas de la dimension 3

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Pour toute paire de vecteurs $(v_1, v_2) \in E^2$, on considère la forme linéaire sur E définie par

$$\begin{array}{rccc} \ell : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (v_1, v_2, x)_+ \end{array}$$

Suivant un raisonnement déjà utilisé plusieurs fois, il existe une unique façon de représenter cette forme linéaire par un produit scalaire par un vecteur de E, i.e. $\exists! w \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad (v_1, v_2, x)_+ = \ell(x) = \langle w, x \rangle.$$

Définition 6 *Le vecteur $w \in E$ ainsi défini s'appelle le* **produit vectoriel de v_1 et de v_2** *et est noté :*

$$w := v_1 \times v_2.$$

Autrement dit on a construit une application bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & v_1 \times v_2, \end{array}$$

caractérisée de façon unique par la relation

$$\forall x \in E, \quad (v_1, v_2, x)_+ = \langle v_1 \times v_2, x \rangle.$$

Interprétation géométrique

Soit $(v_1, v_2) \in E^2$ et supposons que le rang de (v_1, v_2) soit égal à 2 (sinon on a tout de suite $v_1 \times v_2 = 0$). Nous allons construire une base orthonormée directe selon un procédé analogue à celui utilisé dans le paragraphe précédent : nous choisissons

$$u_1 := \frac{v_1}{||v_1||}$$

et $u_2 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ de sorte que (u_1, u_2) soit une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Cela se fait en utilisant la méthode de Gram–Schmidt. Puis on peut montrer d'une façon tout à fait similaire à ce qui a été fait en dimension 2 (exercice !) qu'il existe un unique vecteur u_3 tel que (u_1, u_2, u_3) soit une base orthonormée de E. On montre ainsi qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $v_1 = ||v_1||u_1$ et $v_2 = ||v_2|| \cos\theta u_1 + ||v_2|| \sin\theta u_2$. Enfin pour tout vecteur $x \in E$, soit (x_1, x_2, x_3) ses coordonnées dans la base (u_1, u_2, u_3), de sorte que

$$(v_1, v_2, x) = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} ||v_1|| & ||v_2|| \cos\theta & x_1 \\ 0 & ||v_2|| \sin\theta & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$(v_1, v_2, x)_+ = ||v_1|| \cdot ||v_2|| \sin\theta \cdot x_3 = ||v_1|| \cdot ||v_2|| \sin\theta \langle u_3, x \rangle.$$

Ainsi nous avons :

$$v_1 \times v_2 = ||v_1|| \cdot ||v_2|| \sin\theta u_3.$$

Et le produit vectoriel de v_1 et de v_2 est donc :

- soit égal à 0 si le rang de (v_1, v_2) est différente de 2
- soit, si le rang de (v_1, v_2) est deux, le vecteur de E *de longueur égale à* $||v_1|| \cdot ||v_2|| \cdot |\sin\theta|$ (c'est à dire l'aire *absolue* du parallélogramme de côtés v_1 et v_2), *orthogonal au plan engendré par* (v_1, v_2) et tel que $(v_1, v_2, v_1 \times v_2)$ *soit une base directe de* E

4 Endomorphismes auto-adjoints

4.1 Définitions

Définition 7 *Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in End(E)$ un endomorphisme de E. L'*adjoint *de f est l'unique endomorphisme de E noté f^*, tel que*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle y, f(x) \rangle = \langle f^*(y), x \rangle.$$

Existence et unicité de l'adjoint

Rappelons que (en notant E^* le dual de E) :

$$\begin{array}{rccc} \chi : & E & \longrightarrow & E^* \\ & x & \longmapsto & [y \longmapsto \langle x, y\rangle] \end{array}$$

est un isomorphisme. Pour tout $y \in E$ *fixé*, considérons

$$\begin{array}{rccc} \chi(y) \circ f : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \langle y, f(x)\rangle. \end{array}$$

Comme $\chi(y) \circ f \in E^*$, grâce à l'isomorphisme χ, on sait que $\exists ! z \in E$ tel que $\chi(z) = \chi(y) \circ f$, ce qui équivaut à :

$$\forall x \in E, \quad \chi(z)(x) = (\chi(y) \circ f)(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle z, x\rangle = \langle y, f(x)\rangle.$$

On note alors $f^*(y) := z$, puisqu'il satisfait les conditions requises. On démontre aisément que f^* est linéaire.

Expression dans une base orthonormée

Soit $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E et soit $A = (a_{ij})$ la matrice de f dans la base e, i.e.

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} e_i a_{ij}.$$

Puisque $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormée,

$$\begin{aligned} f^*(e_i) &= \sum_{j=1}^{n} \langle f^*(e_i), e_j\rangle e_j = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, f(e_j)\rangle e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i, \sum_{k=1}^{n} e_k a_{kj} \right\rangle e_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j. \end{aligned}$$

Donc la matrice de f^* dans $(e_1, \cdots, e_n)$ est ${}^tA$.

Endomorphismes auto-ajdoints

Définition 8 *Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme $f \in End(E)$ de E est dit* **auto-adjoint** *ssi*

$$f = f^*.$$

De façon équivalente, f est auto-adjoint ssi sa matrice A dans une base orthonormée *est* **symétrique** *: $A = {}^tA$.*

4.2 Diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints

L'objectif de cette section est de montrer que tout endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable dans une base orthonormée.

Lemme 4 *Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$ une matrice* **symétrique***. Alors toutes les valeurs propres de A sont* **réelles***.*

Démonstration — Commençons par remarquer que les valeurs propres de A sont parmi les racines du polynôme caractéristique et donc sont a priori dans $\mathbb{C}$. Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & x & \longmapsto & Ax. \end{array}$$

Soit λ une racine du polynôme caractéristique de f. Alors il existe un vecteur propre (non nul) $x \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$Ax = f(x) = \lambda x.$$

On a alors, en utilisant d'abord le fait que A est réelle, puis que A est symétrique,

$${}^t\overline{x}A = {}^t\overline{x}\overline{A} = {}^t\overline{x}\,{}^t\overline{A} = {}^t(\overline{Ax}) = {}^t(\overline{\lambda x}) = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{x}.$$

Donc nous pouvons calculer de deux façons différentes la quantité ${}^t\overline{x}Ax$:

$${}^t\overline{x}Ax = \left({}^t\overline{x}A\right)x = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{x}x \quad \text{ou} \quad {}^t\overline{x}Ax = {}^t\overline{x}\,(Ax) = \lambda\,{}^t\overline{x}x.$$

En comparant ces deux expressions et en utilisant le fait que $x \neq 0 \Longrightarrow {}^t\overline{x}x \neq 0$, on en déduit que $\overline{\lambda} = \lambda$.

Lemme 5 *Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in End(E)$ un endomorphisme auto-adjoint de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.*

Démonstration — Il s'agit de montrer que, pour n'importe quel vecteur y choisi dans $F^\perp$, on a $f(y) \in F^\perp$. Cela provient de l'identité :

$$\forall x \in F, \quad \langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle = \langle f(x), y\rangle.$$

On voit bien dans cette relation que, si F est stable par f, alors $f(x) \in F$ et donc, si $y \perp F$, alors $f(y) \perp F$.

Théorème 1 *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n. Alors tout endomorphisme auto-ajdoint f de E est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Démonstration — Nous allons montrer par récurrence sur n la propriété :
(P_n) : *tout endomorphisme auto-adjoint sur un espace vectoriel euclidien de dimension n est diagonalisable dans une base orthonormée.*

- preuve de (P_1) : c'est immédiat
- $(P_n) \Longrightarrow (P_{n+1})$: soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$ et $f \in \mathrm{End}(E)$ auto-adjoint. Grâce au lemme 4 il existe au moins une valeur propre réelle λ. Soit $u \in E$ un vecteur propre (non nul) de f pour cette valeur propre : $f(u) = \lambda u$ et soit F la droite vectorielle engendrée par u. Le sous-espace F est bien évidemment stable par f donc, d'après le lemme 5, son orthogonal $F^\perp$ est stable par f. Cela nous permet de considérer la restriction $f_{F^\perp}$ de f à $F^\perp$: c'est un endomorphisme auto-adjoint de $F^\perp$ (exercice : le vérifier). Donc nous pouvons appliquer (P_n) à $f_{F^\perp}$, puisque $\dim F^\perp = n$: il existe une base orthonormée $(u_1, \cdots, u_n)$ de $F^\perp$ constituée de vecteurs propres pour $f_{F^\perp}$. On montre facilement que chaque u_j est aussi vecteur propre de f (puisque $F^\perp$ est stable par f). Alors la famille $(u_1, \cdots, u_n, u/||u||)$ est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres pour f. Nous avons donc montré (P_{n+1}).

Corollaire 2 *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Alors il existe une base orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et orthogonale pour φ simultanément.*

Démonstration — A nouveau nous utilisons l'isomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \chi : & E & \longrightarrow & E^* \\ & z & \longmapsto & [x \longmapsto \langle z, x\rangle] \end{array}$$

Nous commençons par associer à φ un endomorphisme auto-adjoint de E. Pour tout $y \in E$ *fixé*, soit

$$\begin{array}{rccc} \ell_y : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(y, x). \end{array}$$

Alors, puisque $\ell_y \in E^*$, $\exists! z \in E$ tel que $\ell_y = \chi(z)$. Traduisons : cela signifie que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(y, x) = \ell_y(x) = \chi(z)(x) = \langle z, x\rangle.$$

Notons $f(y) := z$. Nous venons de construire une application $f : E \longrightarrow E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(y, x) = \langle f(y), x\rangle.$$

On vérifie alors sans difficulté que f est linéaire. De plus, puisque φ est symétrique,

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(y), x\rangle = \varphi(y, x) = \varphi(x, y) = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

Donc f est **auto-adjoint**. Nous pouvons appliquer le théorème précédent, qui implique que f est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de f, i.e. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Alors

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \varphi(e_i, e_j) = \langle f(e_i), e_j\rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j\rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Donc on voit que $(e_1, \cdots, e_n)$ est à la fois une base orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et orthogonale pour φ.

5 Un complément hors programme

En guise de conclusion au chapitre sur les espaces euclidiens, voici un résultat hors programme. Nous noterons $\mathcal{T}^+$ le sous-ensemble de $M(n, \mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont les éléments sur la diagonale principale sont tous strictement positifs (noter que $\mathcal{T}^+$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$).

Théorème 2 *Pour toute matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$, il existe une unique matrice $S \in O(n)$ et une unique matrice $T \in \mathcal{T}^+$ telles que $A = ST$.*

Démonstration — Associons à A l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & Ax. \end{array}$$

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique (dont on convient également qu'elle est orthonormée) de $\mathbb{R}^n$ et $(v_1, \cdots, v_n)$ l'unique base de E telle que

$$(v_1, \cdots, v_n) = (e_1, \cdots, e_n)A.$$

Nous appliquons l'algorithme d'orthonormalisation de Gram–Schmidt à la base $(v_1, \cdots, v_n)$, cela nous prouve qu'il existe une unique base orthonormée $(u_1, \cdots, u_n)$ de E et une unique matrice $P \in \mathcal{T}^+$ tel que $(u_1, \cdots, u_n) = (v_1, \cdots, v_n)P$. Nous en déduisons que

$$(u_1, \cdots, u_n) = (v_1, \cdots, v_n)P = (e_1, \cdots, e_n)AP.$$

Mais comme les bases $(u_1, \cdots, u_n)$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ sont toutes les deux orthonormées, nécessairement la matrice $S := AP$ est dans $O(n)$. Soit $T := P^{-1} \in \mathcal{T}^+$. Alors

$$A = SP^{-1} = ST, \quad \text{avec} \quad S \in O(n) \text{ et } T \in \mathcal{T}^+.$$