Examen du jeudi 22 septembre 2005 — durée : 3 heures

I

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni des coordonnées (x, z, p), où $x = (x^i) = (x^1, \cdots, x^n)$, $p = (p_i) = (p_1, \cdots, p_n)$ et $z \in \mathbb{R}$. On note $\theta := dz - p_i dx^i$ (sous la convention que $p_i dx^i = \sum_{i=1}^n p_i dx^i$). Soit $f_1, \cdots, f_n$ et g des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de la variable $x \in \mathbb{R}^n$. On considère

$$\Sigma := \{(x^i, g(x), f_i(x)) \in \mathbb{R}^{2n+1} | x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Noter que Σ est paramétrisée par $\varphi : x \longmapsto (x^i, g(x), f_i(x))$. On écrit que $\theta_{|\Sigma} = 0$ (la restriction de θ à Σ est nulle) ssi $j^*\theta = 0$, où $j : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ est l'application d'inclusion.

1) Montrer que $\theta_{|\Sigma} = 0$ ssi $\frac{\partial g}{\partial x^i} = f_i$, $\forall i$.

2) Soit $F : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Montrer qu'à chaque fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui est solution de

$$F\left(x^i, g(x), \frac{\partial g}{\partial x^i}\right) = 0$$

on peut associer une unique sous-variété Σ de $\mathbb{R}^{2n+1}$ telle que $\theta_{|\Sigma} = 0$ et $F_{|\Sigma} = 0$.

3) Soit X un champ de vecteur $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. On suppose pour simplifier que X est complet, c'est à dire que son ensemble de vie Δ_X est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n+1}$. On note $\left(e^{tX}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ la famille de difféomorphismes

$$\begin{array}{rccc} e^{tX} : & \mathbb{R}^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n+1} \\ & M & \longmapsto & e^{tX}(M) \end{array}$$

telle que $e^{0\cdot X} = Id$ et $\frac{\partial(e^{tX}(M))}{\partial t} = X(e^{tX}(M))$. On suppose que $L_X F = 0$. Montrer que pour toute sous-variété Σ de $\mathbb{R}^{2n+1}$ telle que $F_{|\Sigma} = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, $\left(F \circ e^{tX}\right)_{|\Sigma} = 0$. En déduire également que $\left(\left(e^{tX}\right)^* dF\right)_{|\Sigma} = 0$.

4) On suppose dorénavant que

$$X = \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial z}p_i\right)\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Montrer que $L_X F = 0$.

5) Soit Σ une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n+1}$ telle que $F_{|\Sigma} = 0$.

a) Calculer $L_X\theta$, où X est donné à la question 4) et où et on suppose que $\Delta_X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n+1}$.

b) En déduire une équation sur $\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(e^{tX}\right)^*\theta\right)$.

c) Montrer que si $\theta_{|\Sigma} = 0$ alors $\theta_{|e^{tX}\Sigma} = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6) Montrer que si $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ est telle que $F_{|\Sigma} = 0$ et $\theta_{|\Sigma} = 0$, alors Σ est invariante par le flot du champ de vecteur X défini à la question 4). Essayer de dégager une conclusion sur ce que cela signifie pour les solutions de l'équation différentielle introduite à la question 2).

II

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son orientation et de son produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ canoniques. On note aussi $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 | \, |x| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Dans cet exercice on veut démontrer que tout champ de vecteur tangent régulier sur S^2 doit s'annuler en au moins un point. On suppose donc le contraire, c'est à dire qu'*il existe un champ de vecteur tangent régulier u sur S^2 qui ne s'annule en aucun point* et on cherche à obtenir une contradiction.

1) Démontrer que l'on peut construire trois applications régulières $e_1, e_2, e_3 : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telles $\forall x \in S^2$,

$(e_1, e_2, e_3)(x)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et de façon à ce que $e_3(x) = x$, $\forall x \in S^2$.
2) On note de_a (pour $a = 1, 2, 3$) les différentielles sur S^2 de l'application e_a (si $e_a = \sum_{i=1}^3 e_a^i \epsilon_i$ alors $de_a = \sum_{i=1}^3 de_a^i \epsilon_i$). On note $\omega_a^b := \langle de_a, e_b \rangle$. Montrer que

$$\omega_a^b + \omega_b^a = 0, \quad \forall a, b.$$

3) Démontrer que $d\omega_a^b + \omega_c^b \wedge \omega_a^c = 0$ (on pourra partir de l'identité $de_a = \omega_a^b e_b$).
4) Démontrer que $\omega_3^1 \wedge \omega_2^3(e_1, e_2) = -1$ sur S^2.
5) Déduire de la question précédente la valeur de $\int_{S^2} \omega_3^1 \wedge \omega_2^3$.
6) Conclure à l'aide des questions 3) et 5) (sans oublier ... 2)).

III

Pour tous vecteurs $u = (u^1, u^2)$ et $v = (v^1, v^2)$ dans $\mathbb{R}^2$ on note $(u, v) := u^1 v^1 + u^2 v^2$ et $(u)^2 = (u, u)$.
1) Une application linéaire $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est dite *conforme* ssi :
– $\exists \rho > 0$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$, $(Au, Av) = \rho(u, v)$
– $\det A > 0$.
On identifie A avec sa matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que A soit conforme.
2) Soit

$$C : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x = (x^1, x^2) & \longmapsto & x^1 + ix^2 \end{array}.$$

Montrer que A est conforme ssi $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$, $A(x) = C^{-1}(\lambda C(x))$. Dans la suite on pourra identifier $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ et poser $x = (x^1, x^2) \simeq x^1 + ix^2$.
3) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Démontrer que si $d\varphi_x$ est conforme pour tout $x \in \Omega$ alors φ est holomorphe. Exprimer $\frac{\partial \varphi}{\partial x} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(\varphi^1 + i\varphi^2)$ en fonction de $d\varphi_x$.
4) On considère la variété riemannienne $\mathcal{M} := (\Omega, g)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (il n'y a donc pas besoin de carte locale ici) et où la métrique g est de la forme $g_{ij}(x) = e^{2f(x)}\delta_{ij}$. Pour toute application régulière $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$ on définit $\varphi^* g$ sur Ω par : pour tous champs de vecteur u et v sur Ω,

$$(\varphi^* g)_x \left(u(x), v(x)\right) = g_{\varphi(x)} \left(d\varphi_x(u(x)), d\varphi_x(v(x))\right).$$

On suppose que φ est une *isométrie directe* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$, c'est à dire : $\varphi^* g = g$ et $\det d\varphi_x > 0$ partout. Démontrer que φ est holomorphe et déterminer une équation satisfaite par $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en fonction de f.
5) Calculer les symbôles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita de g (on pourra admettre et utiliser les relations $\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$ et $\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$).
6) Ecrire l'équation différentielle satisfaite par un point critique de $\mathcal{L}[\gamma] := \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt$, définie sur l'ensemble des chemins $\gamma \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathcal{M})$ (on ne demande pas de redémontrer le résultat mais d'expliciter l'équation en coordonnées locales).
7) On suppose que $\Omega = \mathbb{C}_+ := \{x \in \mathbb{C} | \mathrm{Im} x > 0\}$ et $e^{2f(x)} = \frac{1}{(\mathrm{Im} x)^2} = \frac{1}{(x^2)^2}$. Montrer que $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, l'application φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ est une isométrie directe de $\mathcal{M}$.
En admettant le résultat d'analyse complexe suivant : les seuls difféomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}_+$ dans lui-même sont des homographies du type précédent, décrire toutes les isométries directes de $\mathcal{M}$.
8) Démontrer que les demi-droites $x^1 = C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante sont des géodésiques de $\mathcal{M}$, en déterminant les solutions correspondantes à l'équation obtenue en 6).
9) Démontrer que pour toute isométrie directe φ de $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}[\varphi \circ \gamma] = \mathcal{L}[\gamma]$. En déduire d'autres solutions de l'équation différentielle obtenue en 6).
Question supplémentaire : quelle forme dans $\mathbb{C}_+$ ont ces géodésiques ?