

Examen du jeudi 30 septembre 2004 — durée : 3 heures

Notations : (i) On rappelle que le produit extérieur de la p -forme $\alpha \in \Lambda^p V^*$ par la q -forme $\beta \in \Lambda^q V^*$ est donné par $\forall v_1, \dots, v_{p+q}$,

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{p!q!} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}).$$

(ii) pour toute p -forme $\alpha \in \Lambda^p V^*$ et pour tout vecteur $X \in V$, on note $X \lrcorner \alpha \in \Lambda^{(p-1)} V^*$ la $(p-1)$ -forme définie par

$$\forall X_2, \dots, X_p \in V, \quad X \lrcorner \alpha(X_2, \dots, X_p) = \alpha(X, X_2, \dots, X_p).$$

On appelle « produit intérieur de α par X » la $(p-1)$ -forme $X \lrcorner \alpha$.

1 Un peu d'algèbre multilinéaire

Dans ce problème $\alpha \in V^*$ est une 1-forme et $\gamma \in \Lambda^2 V^*$ est une 2-forme.

a) Montrer que $\forall u, v, w \in V$ l'expression $\alpha \wedge \gamma(u, v, w)$ peut se simplifier comme la somme de trois termes.

b) Soit $\alpha \in V^*$ une 1-forme *non nulle*. On note H le noyau de α . Montrer qu'il existe $u \in V$ tel que $\alpha(u) = 1$. Ce vecteur u est-il unique ?

c) On suppose dans cette question et dans la suite que $\alpha \wedge \gamma = 0$. Montrer que la restriction de γ à H est nulle (i.e. $\forall v, w \in H, \gamma(v, w) = 0$).

d) On note $\beta = u \lrcorner \gamma$, où u a été introduit à la question b). Montrer que $\gamma = \alpha \wedge \beta$.

2 Le lemme de Cartan

Démontrer que, sur une variété \mathcal{M} , pour tout champs de vecteur X et Y sur \mathcal{M} et pour toute 1-forme différentielle α sur \mathcal{M} ,

$$d\alpha(X, Y) = L_X \alpha(Y) - L_Y \alpha(X) - \alpha([X, Y]). \quad (1)$$

3 Repère mobile orthonormé

Dans tout ce problème on pourra utiliser et admettre si nécessaire les relations (1), (2) et (3) dans certaines questions.

3.1 Cas général

Soit (\mathcal{M}, g) une variété riemannienne de dimension n et de classe \mathcal{C}^∞ et $U \subset \mathcal{M}$ un ouvert sur lequel est défini un « repère orthonormé mobile », c'est à dire n champs de vecteur $\mathcal{C}^\infty e_1, \dots, e_n$ sur U tels que $\forall M \in \mathcal{M}, (e_1(M), \dots, e_n(M))$ est une base orthonormée de $T_M \mathcal{M}$. On note

$(\alpha_M^1, \dots, \alpha_M^n)$ la base duale et on définit ainsi n 1-formes \mathcal{C}^∞ sur U . On note ∇ la connexion de Levi-Civita sur $T\mathcal{M}$ et $(\omega_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$ les formes de connexions, caractérisées par les relations

$$\nabla_u e_i = \omega_i^j(u) e_j, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

où u est un champ de vecteur quelconque.

a) Démontrer que $\omega_j^i + \omega_i^j = 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

b) Démontrer que $\forall i, j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\alpha^k([e_i, e_j]) = \omega_j^k(e_i) - \omega_i^k(e_j). \quad (2)$$

c) On définit le tenseur de courbure de Riemann R par la relation

$$R(u, v) \cdot w := \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w,$$

pour tous champs de vecteur u, v, w sur U . Montrer que $\forall i, j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$R(e_i, e_j) \cdot e_k = (d\omega_k^l + \omega_m^l \wedge \omega_k^m)(e_i, e_j) e_l. \quad (3)$$

3.2 Cas d'une surface

On suppose dorénavant que \mathcal{M} est une surface, i.e. $\dim \mathcal{M} = n = 2$.

a) Trouver une expression des formes ω_j^i en fonction de e_1, e_2, α^1 et α^2 .

b) Exprimer la « courbure de Gauss »

$$K = g(R(e_1, e_2) \cdot e_2, e_1)$$

en fonction des ω_j^i et de e_1 et e_2 .

c) Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], U)$ une immersion telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = M_0$. Pour tout $\theta \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ et pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on définit une base orthonormée $(v_1(t), v_2(t))$ de $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ (dépendant de façon régulière de t) par

$$\begin{cases} v_1(t) &= \cos \theta(t) e_1(\gamma(t)) + \sin \theta(t) e_2(\gamma(t)) \\ v_2(t) &= -\sin \theta(t) e_1(\gamma(t)) + \cos \theta(t) e_2(\gamma(t)). \end{cases}$$

Trouver une équation sur θ pour que l'on ait

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} v_1(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} v_2(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

c'est à dire « v_1 et v_2 sont transportés parallèlement le long de γ ».

d) Résoudre cette équation en θ .

e) Soit $\mathcal{B} \subset U$ un domaine fermé dont le bord $\partial \mathcal{B}$ est régulier. On suppose que γ est une paramétrisation directe de $\partial \mathcal{B}$ (modulo le fait que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$). Donner une relation entre $\theta(0), \theta(2\pi)$ et la valeur de $K = g(R(e_1, e_2) \cdot e_2, e_1)$ à l'intérieur de \mathcal{B} .

3.3 Usage de coordonnées conformes

On suppose toujours $n = 2$. On considère une carte locale $x = (x^1, x^2) : U \longrightarrow \Omega$, où U est un ouvert de \mathcal{M} et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 . On note $g_{ij}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$. On fait l'hypothèse que x est *conforme*, c'est à dire qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $g_{ij}(x) = e^{2f(x)} \delta_{ij}$, $\forall x \in \Omega$. On demande de déterminer dans les coordonnées (x^1, x^2) :

a) un repère mobile orthonormé (e_1, e_2) (le plus simple possible)

b) le corepère mobile (α^1, α^2) dual du repère mobile (e_1, e_2) .

c) Les formes de connexion ω_j^i dans ce même repère.

d) La courbure de Gauss $K = g(R(e_1, e_2) \cdot e_2, e_1)$.