

Calcul différentiel et géométrie
différentielle

Licence du Magistère de
Mathématiques de l'École Normale
Supérieure de Cachan

Février 2002

Cours par Frédéric HÉLEIN

Exercices par Pierre-Henri CHAUDOUARD

Table des matières

1 Fonctions de plusieurs variables	7
1.1 Définitions	7
1.2 Quelques résultats à savoir	11
1.3 Comment calculer une différentielle, montrer qu'une fonction est différentiable en un point ?	17
1.4 Représentation graphique d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}	18
2 Deux théorèmes de calcul différentiel	21
2.1 Le théorème d'inversion locale	21
2.2 Le théorème de Sard	28
3 Sous-variétés et variétés	35
3.1 Sous-variétés	35
3.1.1 Sous-espace tangent	40
3.1.2 Applications entre sous-variétés	41
3.2 Etude d'un exemple	43
3.3 Variétés	45
4 Courbes	53
4.1 Immersions et plongements d'un intervalle	53
4.2 Arcs et variétés immergées	54
4.3 Vecteurs tangents	55

4.4	Abscisse curviligne	56
4.5	Repère de Frenet	57
4.5.1	Cas d'une courbe dans un plan	58
4.5.2	Cas d'une courbe dans l'espace de dimension trois	60
4.6	Intégrale le long d'une courbe	63
4.6.1	Intégrale d'une fonction	63
4.6.2	Circulation d'un champ de vecteur	64
4.6.3	Intégrale d'une 1-forme différentielle	66
5	Surfaces	69
5.1	Immersion et plongements d'un ouvert de \mathbb{R}^2	69
5.2	Nappes et sous-variétés immergées	69
5.3	Première forme fondamentale	71
5.4	Seconde forme fondamentale	74
5.5	Repère de Darboux	76
5.6	Intégrales sur les surfaces	80
5.6.1	Flux d'un champ de vecteur	81
5.6.2	Intégrale d'une 2-forme différentielle	82
6	Formes différentielles	85
6.1	Algèbre extérieure	85
6.2	Formes différentielles	88
6.3	Image inverse d'une p -forme par une application différentiable (« pull-back »)	97
6.4	Formes différentielles sur une variété	99
6.5	Intégrale d'une p -forme	102
6.6	Formule de Stokes	105
6.6.1	Formule de Stokes sur un ouvert de E^m	105
6.6.2	Formule de Stokes sur une variété à bord	108
6.7	Le « theorema egregium » de Gauss	109

7	Champs de vecteurs	115
7.1	Résultat d'existence locale	116
7.2	Ensemble de vie d'un champ de vecteur	119
7.3	Image d'un champ de vecteur par un difféomorphisme	121
7.4	Dérivée de Lie et paire de champs de vecteur	124
7.5	Théorème de redressement	129
7.6	Champs de vecteur complets	130
7.7	Retour à la géométrie : champs de vecteur sur une variété	132
8	Calcul des variations	135
8.1	Equation d'Euler–Lagrange	143
8.2	Calcul des variations à plusieurs variables	145
8.3	Equations de Hamilton	147
8.4	Géométrie symplectique	152
8.5	Calcul des variations sur une variété	155

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

1.1 Définitions

Notations Dans ce qui suit, m et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, E^m et F^n sont des espaces affines de dimensions m et n respectivement et les espaces vectoriels associés sont notés respectivement \vec{E}^m et \vec{F}^n . Ω désigne un sous-ensemble ouvert de E^m , f sera une fonction de Ω vers F^n . On munit \vec{E}^m d'une base (e_1, \dots, e_m) , on choisit une origine O_E dans E^m et on notera x^1, \dots, x^m les coordonnées d'un point $x \in E^m$, de sorte que $x = O_E + x^1 e_1 + \dots + x^m e_m$. De même, on munit \vec{F}^n d'une base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, on notera y^1, \dots, y^n les coordonnées d'un point y , de sorte que $y = O_F + y^1 \epsilon_1 + \dots + y^n \epsilon_n$.

Dans le cas où E^m et F^n sont euclidiens, on note $\langle x, \tilde{x} \rangle := x^1 \tilde{x}^1 + \dots + x^m \tilde{x}^m$ et $\langle y, \tilde{y} \rangle := y^1 \tilde{y}^1 + \dots + y^n \tilde{y}^n$ les produits scalaires sur \vec{E}^m et \vec{F}^n respectivement (en supposant que (e_1, \dots, e_m) et $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ sont orthonormées) et on note $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et $|y| = \sqrt{\langle y, y \rangle}$ les normes euclidiennes.

Définition 1 On dit que f est continue en $a \in \Omega$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega,$

$$|x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Cela peut s'écrire aussi $f(x) = f(a) + o(|x-a|^0)$ où $\lim_{\xi \rightarrow 0} o(|\xi|^0) = 0$.

Définition 2 *On dit que f est continue sur Ω si et seulement si f est continue en chacun des points $a \in \Omega$.*

Exemple 1

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x}{r} \end{aligned}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, mais pas en 0.

Définition 3 *On dit que f est différentiable en $a \in \Omega$ si il existe une application linéaire $A : \vec{E}^m \longrightarrow \vec{F}^n$ telle que $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega$,*

$$|x - a| < \eta \implies \frac{|f(x) - f(a) - A(x - a)|}{|x - a|} < \epsilon.$$

A est appelée différentielle de f en a ou dérivée de f en a et est notée $f'(a), df_a, Df_a \dots$

Cela peut s'écrire aussi $f(x) = f(a) + df_a(x - a) + o(|x - a|)$ où $o(|\xi|) = |\xi|o(|\xi|^0)$.

Définition 4 *On dit que f est différentiable sur Ω si et seulement si f est différentiable en chacun des points $a \in \Omega$.*

Quelques remarques sur les notations

- Si l'on a choisi une base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de \vec{F}^n et une origine O_F sur F^n , alors la donnée d'une application f à valeurs dans F^n est la même chose que la donnée de n fonctions à valeurs réelles f^1, \dots, f^n telles que $f(x) = O_F + f^1(x)\epsilon_1 + \dots + f^n(x)\epsilon_n$. Si de plus on a fixé une base (e_1, \dots, e_m) de \vec{E}^m , alors la différentielle de f en a est complètement déterminée par sa matrice dans le système de coordonnées. Cette matrice est appelée *matrice jacobienne* :

$$df_a \simeq Jf_a := \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$df_a(\xi) = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}(a) \xi^\alpha.$$

Un élément de la matrice jacobienne, noté $\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}$ est appelé *dérivée partielle* de f^i par rapport à x^α .

- Une autre façon d'écrire df_a est la suivante. Nous considérons les fonctions

$$\begin{aligned} x^k : E^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ O_E + \xi^1 e_1 + \cdots + \xi^m e_m &\longmapsto \xi^k \end{aligned}$$

qui sont bien évidemment affines. En chaque point $a \in E^m$, la différentielle est

$$\begin{aligned} dx_a^k : \vec{E}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi^1 e_1 + \cdots + \xi^m e_m &\longmapsto \xi^k. \end{aligned}$$

Comme cette application linéaire ne dépend pas de a , on prend l'habitude de la noter $dx^k : \vec{E}^m \longrightarrow \mathbb{R}$. A présent nous

disposons de m formes dx^1, \dots, dx^m qui constituent une base de $(\vec{E}^m)^*$. Donc la différentielle de chaque composante, df_a^j , peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des dx^1, \dots, dx^m . Si bien que l'on retrouve naturellement

$$df_a^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^1}(a)dx^1 + \dots + \frac{\partial f^j}{\partial x^m}(a)dx^m.$$

Enfin, on note parfois $\epsilon_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \epsilon_n = \frac{\partial}{\partial y^n}$ (notation qui vous semblera plus naturelle un peu plus tard). Ainsi nous pouvons assembler ce qui précède en :

$$df_a = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(a) \frac{\partial}{\partial y^j} \otimes dx^k = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k}(a) \otimes dx^k \simeq \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k}(a) dx^k,$$

où la notation \otimes (produit tensoriel) peut s'interpréter ici comme « si $X \in \vec{F}^n$ et $\alpha \in (\vec{E}^m)^*$, $X \otimes \alpha$ est l'application linéaire de \vec{E}^m vers \vec{F}^n définie par $\xi \mapsto \alpha(\xi)X$ ».

- Quand vous aurez bien compris cela, vous pourrez oublier les détails et retenir que la relation $df_a = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k}(a) dx^k$ signifie que si je déplace x infinitésimalement suivant $(\delta x^1, \dots, \delta x^m)$, alors f subit une variation infinitésimale égale à $\delta f_a = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k}(a) \delta x^k$.

Lemme 1 (règle de composition) Soit m, n, p des entiers ≥ 1 . Soit Ω^m un ouvert de E^m , Ω^n un ouvert de F^n et Ω^p un ouvert de G^p (espace vectoriel de dimension p). Soit $g : \Omega^m \longrightarrow F^n$, $f : \Omega^n \longrightarrow G^p$ deux applications telles que l'image de Ω^m par g soit incluse dans Ω^n . Ainsi on peut considérer l'application composée $f \circ g : \Omega^m \longrightarrow G^p$. Alors, si g est différentiable en $a \in \Omega^m$ et si

f est différentiable en $g(a)$, $f \circ g$ est différentiable en a et

$$d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a.$$

Cette règle de composition correspond au niveau des dérivées partielles à

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x^\alpha}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^i}(g(a)) \frac{\partial g^i}{\partial x^\alpha}(a),$$

c'est à dire au produit de matrices jacobiniennes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1 \circ g}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1 \circ g}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^p \circ g}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^p \circ g}{\partial x^m} \end{pmatrix} (a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^p}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^p}{\partial y^n} \end{pmatrix} (g(a)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} (a).$$

Définition 5 Soit V un vecteur de \vec{E}^m . On dit que f est dérivable en a dans la direction V si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tV) - f(a)}{t} \text{ existe.}$$

On note $D_V f(a)$ ou $L_V f(a)$ cette limite (**L** comme Sophus **L**ie).

On vérifie que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $D_{\lambda V} f(a) = \lambda D_V f(a)$.

1.2 Quelques résultats à savoir

Commençons par un exemple.

Exemple 2

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

et $f(0) = 0$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in \mathbb{R}$, si $V = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$, $f(V) = \rho \sin 3\theta$ et $D_V f(0) = \rho \sin 3\theta$. Donc f est dérivable dans toutes les directions en 0. Géométriquement, le graphe de f est un cône de sommet 0. Le lemme qui suit montre que cette fonction n'est pas différentiable en 0.

Lemme 2 Soit f une fonction différentiable en $a \in \Omega$. Alors, f est dérivable en a dans toutes les directions et pour tout $V \in \vec{E}^m$, $D_V f(a) = df_a(V)$.

Remarque — Ce lemme prouve qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'une fonction dérivable en a dans toutes les directions soit différentiable en a est que $V \mapsto D_V f(a)$ soit linéaire.

Preuve du lemme : immédiate,

$$\frac{f(a + tV) - f(a)}{t} = df_a(V) + o(1) \dots$$

Voici une sorte de réciproque.

Théorème 1 Soit $f : \Omega \rightarrow F^n$ une fonction. Soit (e_1, \dots, e_m) une base de \vec{E}^m . Supposons que $\forall x \in \Omega$ et $\forall 1 \leq \alpha \leq m$, f admette une dérivée en x « par rapport à x^α » (c'est à dire, en toute rigueur **dans la direction** e_α), $D_{e_\alpha} f(x)$.

Alors, si $\forall 1 \leq \alpha \leq m$, $x \mapsto D_{e_\alpha} f(x)$ est continue en a , f est différentiable en a et

$$df_a(x) = \sum_{\alpha=1}^m x^\alpha D_{e_\alpha} f(a).$$

Preuve Pour simplifier la démonstration, nous ne donnons la preuve que pour le cas $m = 2$.

L'idée est d'écrire

$$\begin{aligned} & f(a + x^1 e_1 + x^2 e_2) - f(a) - x^1 D_{e_1} f(a) - x^2 D_{e_2} f(a) \\ &= f(a + x^1 e_1 + x^2 e_2) - f(a + x^1 e_1) - x^2 D_{e_2} f(a) \\ & \quad + f(a + x^1 e_1) - f(a) - x^1 D_{e_1} f(a) \end{aligned}$$

et d'évaluer chacun des développements de Taylor séparément.

Au préalable, nous utilisons l'hypothèse de continuité des dérivées $D_{e_i} f$ en a : nous fixons $\epsilon > 0$ et nous choisissons $\eta > 0$ tel que $|x| < \eta \implies |D_{e_i} f(a + x) - D_{e_i} f(a)| < \epsilon$.

D'une part, il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a + x^1 e_1 + x^2 e_2) - f(a + x^1 e_1) = x^2 D_{e_2} f(a + x^1 e_1 + \theta x^2 e_2),$$

et d'autre part, il existe un réel $\tau \in]0, 1[$ tel que

$$f(a + x^1 e_1) - f(a) = x^1 D_{e_1} f(a + \tau x^1 e_1).$$

Ces deux inégalités entraînent

$$\begin{aligned} & |f(a + x^1 e_1 + x^2 e_2) - f(a) - x^1 D_{e_1} f(a) - x^2 D_{e_2} f(a)| \\ & \leq |x^1 (D_{e_1} f(a) - D_{e_1} f(a + \tau x^1 e_1)) + x^2 (D_{e_2} f(a) - D_{e_2} f(a + x^1 e_1 + \theta x^2 e_2))| \\ & \leq (|x^1| + |x^2|)\epsilon. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|f(a + x^1 e_1 + x^2 e_2) - f(a) - x^1 D_{e_1} f(a) - x^2 D_{e_2} f(a)|}{|x|} = 0$. *CQFD*.

Théorème 2 Soit $f : \Omega \rightarrow F^n$, une fonction différentiable sur Ω . Supposons que $x \mapsto df_x$ soit différentiable en a , alors, $\forall \alpha, \beta$,

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^\beta} \right)}{\partial x^\alpha}(a) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \right)}{\partial x^\beta}(a).$$

On notera $\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x^\beta})}{\partial x^\alpha}$.

Preuve L'idée consiste à calculer, pour $v, w \in \vec{E}^m$

$$Q := f(a + v + w) - f(a + v) - f(a + w) + f(a)$$

de deux façons différentes.

A chaque fois, on estime d'abord Q en termes de dérivées premières. Pour cela on utilise l'inégalité suivante, valable pour toute application $\phi : [0, 1] \rightarrow F$, continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$:

$$|\phi(1) - \phi(0) - \phi'(0)| \leq \sup_{[0,1]} |\phi'(t) - \phi'(0)|. \quad (1.1)$$

(Pour la preuve de cela, voir un peu plus loin.) On applique l'inégalité (1.1) à

$$\phi(t) := f(a + v + tw) - f(a + tw).$$

On obtient :

$$|Q - \phi'(0)| \leq \sup_{[0,1]} |\phi'(t) - \phi'(0)|. \quad (1.2)$$

Puis on estime $\phi'(t)$ en fonction des dérivées secondes de f :

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(a+v+tw) - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(a+tw) \right) w^\alpha \\
&= \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(a+v+tw) - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(a) \right) w^\alpha - \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(a+tw) - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(a) \right) w^\alpha \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}(a)(v^\beta + tw^\beta)w^\alpha - \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}(a)tw^\beta w^\alpha + o(|v|^2 + |w|^2) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}(a)v^\beta w^\alpha + o(|v|^2 + |w|^2).
\end{aligned}$$

Comme la dernière expression est indépendante de t (modulo $o(|v|^2 + |w|^2)$), on a en particulier

$$\phi'(t) - \phi'(0) = o(|v|^2 + |w|^2) \quad \text{et} \quad \phi'(0) = \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}(a)v^\beta w^\alpha + o(|v|^2 + |w|^2).$$

En utilisant cela dans (1.2) on déduit

$$Q = \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}(a)v^\beta w^\alpha + o(|v|^2 + |w|^2).$$

En répétant ce calcul après avoir échangé les rôles de v et w , on obtient de même que

$$Q = \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}(a)w^\alpha v^\beta + o(|v|^2 + |w|^2).$$

Et le résultat suit en comparant les deux expressions.

Il ne reste plus qu'à démontrer (1.1). Si nous posons $\psi(t) := \phi(t) - t\phi'(0)$, nous voyons immédiatement que (1.1) est équivalent à

$$|\psi(1) - \psi(0)| \leq \sup_{[0,1]} |\psi'(t)|,$$

qui se démontre par un argument d'analyse standard. (Poser $M := \sup_{[0,1]} |\psi'(t)|$ et montrer que, pour tout $\eta > 0$, $\{\xi \in [0, 1] / \forall 0 \leq t \leq \xi, |\psi(t) - \psi(0)| \leq (M + \eta)t\}$ coïncide avec $[0, 1]$.) *CQFD.*

Exemple 3

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

admet des dérivées partielles secondes continues partout sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$, donc df n'est pas différentiable en 0.

Théorème 3 Soit $f : \Omega \longrightarrow F^n$ une fonction différentiable sur Ω . Soit (e_1, \dots, e_m) une base de \vec{E}^m . Supposons que $\forall 1 \leq \alpha \leq m$, $x \longmapsto df_x$ admette une dérivée dans la direction e_α , $D_{e_\alpha}(df_x) = \frac{\partial df_x}{\partial x^\alpha}$ sur Ω .

Alors, si $\forall 1 \leq \alpha \leq m$, $x \longmapsto D_{e_\alpha}(df_x)$ est continue en a , f est deux fois différentiable en a et

$$\forall 1 \leq \alpha, \beta \leq m, \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^\beta} \right)}{\partial x^\alpha}(a) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \right)}{\partial x^\beta}(a).$$

Preuve : appliquer le théorème 1, puis le théorème 2. *CQFD.*

Définition 6 Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en a , alors la matrice symétrique

$$D^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^m \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^m \partial x^m} \end{pmatrix}$$

est appelée matrice hessienne.

1.3 Comment calculer une différentielle, montrer qu'une fonction est différentiable en un point ?

Dans 1 pour 100 des cas, on peut utiliser la définition 3 pour montrer qu'une fonction est différentiable en un point et calculer sa différentielle.

Dans 99 pour 100 des cas, la réponse est fournie par le théorème 1. Comment ?

La fonction f est en effet donnée sous la forme d'une expression $f(x^1, \dots, x^m)$. Cela signifie que l'on utilise une base (e_1, \dots, e_m) , pour représenter un point x par $O_E + x^1 e_1 + \cdots + x^m e_m$.

Il s'agit de calculer les dérivées $D_{e_\alpha} f(x)$ et si ces fonctions sont continues, le théorème 1 nous dit que f est différentiable. Ce calcul se fait en *gelant* toutes les variables x^β pour $\beta \neq \alpha$ et en calculant la dérivée de la fonction $x^\alpha \longmapsto f(x^1, \dots, x^m)$. On prendra l'habitude de noter $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ cette dérivée, plutôt que $D_{e_\alpha} f(x)$. Mais il faut bien garder à l'esprit qu'il s'agit *géométriquement* d'une dérivée

dans la direction d'un vecteur de base, comme l'illustre ce qui suit.

Exemple de piège

Soit \vec{E}^2 un espace de vectoriel de dimension 2, soit (e_1, e_2) et $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ deux bases de \vec{E}^2 , telles que

$$\tilde{e}_1 = e_1 + e_2 \text{ et } \tilde{e}_2 = e_2.$$

Un point x de E^2 aura donc deux représentations en coordonnées possibles, $x = O_E + x^1 e_1 + x^2 e_2$ et $x = O_E + \tilde{x}^1 \tilde{e}_1 + \tilde{x}^2 \tilde{e}_2$, avec $\tilde{x}^1 = x^1$ et $\tilde{x}^2 = x^2 - x^1$. Donc une fonction f définie sur E^2 peut s'écrire $f(x) = \phi(x^1, x^2) = \tilde{\phi}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$. On calcule que

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^1}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2) + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2),$$

donc

$$\tilde{x}^1 = x^1 \text{ mais } \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial f}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2} !$$

1.4 Représentation graphique d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

Le graphe

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, le graphe de $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est

$$\Gamma_f := \{(x, y, f(x, y)) / (x, y) \in \Omega\}.$$

Exemple 4 $f(x, y) = x^2 + y^2$: voir figure 1.

Exemple 5 $f(x, y) = x^2 - y^2$: voir figure 2.

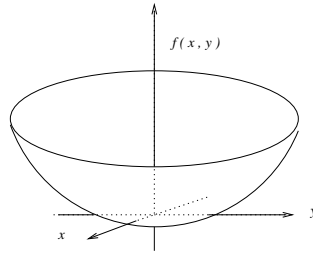


FIG. 1.1 – graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

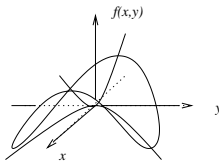


FIG. 1.2 – graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

Les Lignes de niveaux

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on dessine $N_s := \{(x, y) \in \Omega / f(x, y) = s\}$.

Exemple 6 $f(x, y) = x^2 + y^2$: voir figure 3.

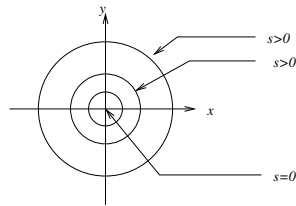


FIG. 1.3 – lignes de niveau de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Exemple 7 $f(x, y) = x^2 - y^2$: voir figure 4

Exemple 8 $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$: voir figure 5

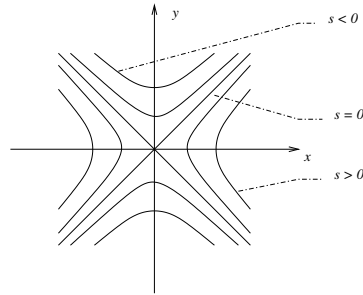


FIG. 1.4 – lignes de niveau de $f(x, y) = x^2 - y^2$

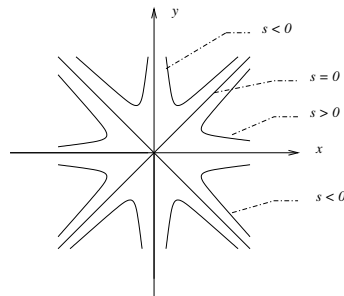


FIG. 1.5 – lignes de niveau de $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$

Chapitre 2

Deux théorèmes de calcul différentiel

2.1 Le théorème d'inversion locale

Le théorème suivant, d'importance cruciale en géométrie différentielle, montre qu'une application différentielle est inversible dans le voisinage d'un point dès que la différentielle de cette application en ce point est inversible. Il est en somme une réponse locale à la question : trouver une solution à l'équation

$$f(x) = y,$$

où y est donné, f est une application différentiable et x est l'inconnu.

Théorème 4 *Soit U un ouvert d'un espace de Banach E , V un ouvert d'un espace de Banach F et $f : U \rightarrow V$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Soit a un point de U tel que df_a soit inversible. Alors il existe un voisinage U_a de a dans U et un voisinage $V_{f(a)}$ de $f(a)$ dans V , tel que la restriction de f à U_a soit un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 de U_a vers $V_{f(a)}$. De plus, $\forall y \in V_{f(a)}$, $d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}$.*

La preuve de ce théorème repose sur le résultat suivant, dit *théorème de point fixe*.

Lemme 3 *Soit X un espace métrique complet, muni de la distance $d(.,.)$. Soit T une application de X dans X dite contractante, à savoir : $\exists 0 < \eta < 1$ telle que*

$$\forall x, \tilde{x} \in X, d(T(x), T(\tilde{x})) \leq \eta d(x, \tilde{x}).$$

Alors, $\exists ! x \in X$, tel que $T(x) = x$.

Preuve du lemme Soit x_0 un point quelconque de X . Nous considérons la suite $x_n = T^n(x_0)$, où $T^n = T \circ \dots \circ T$ n fois. On vérifie immédiatement que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \eta d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \eta^n d(x_1, x_0).$$

On en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Donc elle admet une limite. Notons $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Comme T est continue, on peut passer à la limite dans l'équation $T(x_{n+1}) = x_n$, ce qui prouve que $T(x) = x$. Prouvons l'unicité : on suppose que x et \tilde{x} sont deux solutions de cette équation. Alors

$$d(x, \tilde{x}) = d(T(x), T(\tilde{x})) \leq \eta d(x, \tilde{x}) \Rightarrow d(x, \tilde{x}) = 0$$

et $\tilde{x} = x$. *CQFD*.

Preuve du théorème

Nous la divisons en plusieurs étapes.

Étape 0 : normalisation

En changeant f en $g : x \mapsto (df_a)^{-1}(f(a+x) - f(a))$, nous nous ramenons à inverser l'application g au voisinage de 0, avec

$g(0) = 0$ et $dg_0 = \mathbb{1}$ (application identité). Bien évidemment, f est localement inversible au voisinage de a si et seulement si g est localement inversible au voisinage de 0.

Etape 1

L'idée est que $g(x) = x + (g(x) - x)$, où $g(x) - x$ est petit par rapport à x . Cela est une conséquence du fait que $dg_0 = \mathbb{1}$ et que $x \mapsto dg_x$ est continue. Choisissons en effet $r > 0$ tel que $\forall x \in \overline{B_r} = \{x \in E / |x| \leq r\}$, $|dg_x - \mathbb{1}| = |dg_x - dg_0| \leq \frac{1}{2}$. Alors, $\forall x \in \overline{B_r}$,

$$g(x) - x = \int_0^1 dg_{tx}(x)dt - x = \int_0^1 (dg_{tx} - dg_0)(x)dt,$$

donc

$$|g(x) - x| \leq \left| \int_0^1 (dg_{tx} - dg_0)(x)dt \right| \leq |x| \int_0^1 |dg_{tx} - dg_0|dt \leq \frac{|x|}{2}. \quad (2.1)$$

Etape 2

Nous choisissons $y \in B_{\frac{r}{2}}$, où r a été déterminé à l'étape précédente et nous considérons l'application h_y définie sur $\overline{B_r}$ par $h_y(x) = y + x - g(x)$ ¹. Vérifions tout d'abord que cette application envoie $\overline{B_r}$ dans $\overline{B_r}$. Pour tout $x \in \overline{B_r}$, en utilisant l'inégalité (2.1)

$$|h_y(x)| = |y + g(x) - x| \leq |y| + |g(x) - x| \leq \frac{r}{2} + \frac{|x|}{2} \leq r.$$

¹Cette stratégie généralise la méthode bien connue pour résoudre l'équation $x - Tx = y$, où x (l'inconnue) et y (donné) sont des vecteurs dans un espace de Banach et T est un opérateur linéaire tel que $\|T\| < 1$. On sait que la solution est $y = \sum_{k=0}^{\infty} T^k y$ et cela peut être vu comme la limite d'une suite de solutions approchées $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (avec une précision croissante)

$$\begin{aligned} x_0 &= y \\ x_1 &= y + Ty \\ x_2 &= y + Ty + T^2y \\ &\vdots \\ x_n &= y + \cdots + T^n y, \text{ etc.}, \end{aligned}$$

Donc $h_y(x) \in \overline{B_r}$.

A présent, montrons que h_y est contractante. En utilisant comme dans l'étape 1 le fait que $|dg_x - \mathbb{1}| \leq \frac{1}{2}$ sur $\overline{B_r}$, nous obtenons que pour tout $x, \tilde{x} \in \overline{B_r}$,

$$\begin{aligned} |h_y(x) - h_y(\tilde{x})| &= |(x - g(x)) - (\tilde{x} - g(\tilde{x}))| \\ &= \left| \int_0^1 (\mathbb{1} - dg_{x+t(\tilde{x}-x)})(x - \tilde{x}) dt \right| \\ &\leq \frac{|x - \tilde{x}|}{2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que h_y satisfait les hypothèses du lemme de point fixe. Donc $\exists ! x \in \overline{B_r}$ telle que

$$h_y(x) = x \iff g(x) = y.$$

Cela définit une application inverse de g de $\overline{B_{\frac{r}{2}}}$ vers $\overline{B_r}$. Nous posons $U_0 := g^{-1}(B_{\frac{r}{2}})$ et $V_0 := B_{\frac{r}{2}}$. Nous notons $g^{-1} : V_0 \rightarrow U_0$ cette application inverse.

Etape 3 : Continuité de g^{-1}

Nous montrons que g^{-1} est lipschitzienne. Soit $y, \tilde{y} \in V_0$ et soit

puisque $(1 - T)x_n = y - T^{n+1}y$. Cette suite peut être définie par récurrence par $x_0 = y$ et $x_{n+1} = y + T(x_n)$. En effet

$$\begin{aligned} x_0 &= y \\ x_1 &= y + Ty \\ x_2 &= y + T(y + Ty) \\ x_3 &= y + T(y + T(y + Ty)), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons définir x_n par $x_n = (h_y)^{\circ n} y$, où $h_y(x) := y + Tx$, et sa limite convergera vers une solution de $x - Tx = y$. Maintenant si g est une application différentielle telle que $g(x)$ soit proche de x , pour étudier l'équation $g(x) = y$, nous appliquons la même idée en écrivant $g(x) = x - T(x)$, où $T(x) = x - g(x)$. Même si T n'est pas linéaire, la version itérative de notre algorithme va fonctionner. Elle consiste donc à réitérer h_y avec $h_y(x) = y + x - g(x)$.

$$x = g^{-1}(y), \tilde{x} = g^{-1}(\tilde{y}),$$

$$\begin{aligned} |x - \tilde{x}| &\leq |g(x) - g(\tilde{x})| + |(g(x) - x) - (g(\tilde{x}) - \tilde{x})| \\ &= |g(x) - g(\tilde{x})| + |h_y(x) - h_y(\tilde{x})| \\ &\leq |y - \tilde{y}| + \frac{|x - \tilde{x}|}{2}. \end{aligned}$$

Donc $|x - \tilde{x}| \leq 2|y - \tilde{y}|$. Ce qui prouve que g^{-1} est lipschitzienne.

Etape 4 : g^{-1} est différentiable

Soit $y \in V_0$ et $w \in E$ tel que $y + w \in V_0$. Nous notons $x = g^{-1}(y) \in U_0$ et $x + v = g^{-1}(y + w) \in U_0$. Le candidat à être $d(g^{-1})_y$ étant $(dg_x)^{-1}$, nous cherchons à estimer ce qui suit.

$$\begin{aligned} g^{-1}(y + w) - g^{-1}(y) - (dg_{g^{-1}(y)})^{-1}(w) &= x + v - x - (dg_x)^{-1}(g(x + v) - g(x)) \\ &= (dg_x)^{-1}(g(x + v) - g(x) - dg_x(v)). \end{aligned}$$

Maintenant nous utilisons le fait que dg_x est inversible, et donc — quitte à changer r s'il le faut — il existe une constante $C > 0$, telle que pour $x \in \overline{B_r}$, $|(dg_x)^{-1}| < C$. Nous utilisons aussi l'étape précédente (g^{-1} est lipschitzienne), qui entraîne que $|v| \leq 2|w|$. Donc,

$$\begin{aligned} \frac{|g^{-1}(y + w) - g^{-1}(y) - (dg_{g^{-1}(y)})^{-1}(w)|}{|w|} &\leq |(dg_x)^{-1}| \frac{|(g(x + v) - g(x) - dg_x(v))|}{|w|} \\ &\leq 2C \frac{|(g(x + v) - g(x) - dg_x(v))|}{|v|}, \end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0, lorsque $w \rightarrow 0$. Cela prouve que $(dg_x)^{-1}$ est la différentielle de g^{-1} en y . *CQFD*.

Un corollaire de ce résultat est le théorème des fonctions implicites. On considère trois espaces de Banach E , F et \tilde{F} tel que

\tilde{F} soit isomorphe à F et une application différentiable

$$\begin{aligned} f : E \times F &\longrightarrow \tilde{F} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

On cherche à résoudre l'équation

$$f(x, y) = s_0,$$

où s_0 est donné et x et y sont les inconnues. Ce théorème permet de dire quelque chose dans la situation où on connaît une solution particulière (x_0, y_0) : plus exactement il dit qu'il existe une solution de la forme $y = \phi(x)$, au voisinage de (x_0, y_0) dès que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est inversible. Ici, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la restriction de $df(x_0, y_0)$ à $\{0\} \times F$. (Si on préfère, en terme de matrices jacobiennes, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est la matrice d'éléments $\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est la matrice d'éléments $\frac{\partial f^i}{\partial y^\beta}$.)

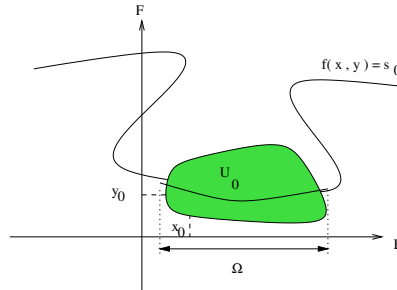


FIG. 2.1 – le théorème des fonctions implicites

Théorème 5 Soit U un ouvert de $E \times F$, où E et F sont deux espaces de Banach, \tilde{F} un espace de Banach isomorphe à F et

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \tilde{F} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

une application de classe \mathcal{C}^1 . Soit $s_0 \in \tilde{F}$. Supposons que $(x_0, y_0) \in U$ soit solution de $f(x, y) = s_0$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ soit inversible. Alors il existe un voisinage U_0 de (x_0, y_0) dans U tel que l'ensemble des (x, y) dans U_0 tels que $f(x, y) = s_0$ soit exactement de la forme $\{(x, \phi(x)) / x \in \Omega\}$, où Ω est un ouvert de E et $\phi : \Omega \longrightarrow F$ est une application de classe \mathcal{C}^1 .

Preuve Nous considérons l'application suivante \mathcal{F} , de U dans $E \times \tilde{F}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad U &\longrightarrow E \times \tilde{F} \\ (x, y) &\longmapsto (x, f(x, y)) \end{aligned}$$

la différentielle de cette application en (x_0, y_0) est représentée matriciellement ² par

$$d\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0).$$

L'hypothèse que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est inversible entraîne automatiquement que $d\mathcal{F}(x_0, y_0)$ est inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale. Il existe un voisinage U_0 de (x_0, y_0) dans U et un voisinage V_0 de (x_0, s_0) dans $E \times \tilde{F}$ tel que $\mathcal{F} : U_0 \longrightarrow V_0$ soit inversible. Soit $\mathcal{G} : V_0 \longrightarrow U_0$ cet inverse. Notons $\mathcal{G}(x, s) = (\mathcal{G}^1(x, s), \mathcal{G}^2(x, s))$ ses composantes. L'équation $f(x, y) = s_0$ dans U_0 est transformée en l'équation $s = s_0$ dans V_0 et a donc pour solution $(x, y) = (\mathcal{G}^1(x, s_0), \mathcal{G}^2(x, s_0))$, où $(x, s_0) \in V_0$. Comme $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathbb{1}$, on a $\mathcal{G}^1(x, s) = x$ sur V_0 et donc, en posant $\Omega = \{x \in U / (x, s_0) \in V_0\}$ et $\phi(x) = \mathcal{G}^2(x, s_0)$, on obtient la conclusion. *CQFD*.

²les notations $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sont des généralisations des notations introduites précédemment. Il s'agit en fait d'applications linéaires. Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x} = df \circ \Pi_1$, où $\Pi_1 : E \times F \longrightarrow E$ est la projection sur le premier facteur et $\frac{\partial f}{\partial y} = df \circ \Pi_2$, où $\Pi_2 : E \times F \longrightarrow F$ est la projection sur le deuxième facteur. De même l'écriture matricielle de $d\mathcal{F}$ symbolise la décomposition de $d\mathcal{F}$ en quatre applications linéaires de la forme $\Pi_i \circ d\mathcal{F} \circ \Pi_j$

2.2 Le théorème de Sard

A nouveau ici, E^m et F^n sont des espaces affines de dimensions m et n respectivement et Ω est un ouvert de E^m .

Définition 7 Soit $f : \Omega \longrightarrow F^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 (c'est à dire continuellement différentiable). On appelle **lieu critique** ou ensemble des **points critiques** l'ensemble

$$\mathcal{C} := \{x \in \Omega / df_x \text{ est de rang strictement plus petit que } \inf(m, n)\}.$$

Son complémentaire, $\Omega \setminus \mathcal{C}$, est l'ensemble des **points réguliers**. On appelle ensemble des **valeurs critiques**, l'image du lieu critique par f , $V_c := f(\mathcal{C})$.

Exemple 9 La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0]$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \in]0, \infty[$ a pour lieu critique $] -\infty, 0]$. L'ensemble des valeurs critiques est juste $\{0\}$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ .

Exemple 10 L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y^2) \end{aligned}$$

a pour lieu critique $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times \{0\}$. L'ensemble des valeurs critiques est $\mathbb{R} \times \{0\}$.

On remarque sur ces deux exemples que l'ensemble des valeurs critiques est négligeable, c'est à dire de mesure nulle, même si l'ensemble des points critiques n'est pas négligeable. Il s'agit d'un phénomène tout à fait général.

Théorème 6 (Théorème de Sard) Soit E^m et F^n des espaces affines de dimensions m et n respectivement et Ω est un ouvert de E^m . Soit $f : E^m \longrightarrow F^n$ une application de classe \mathcal{C}^k , où $k \geq 1$ (c'est à dire continuellement différentiable k fois). Alors, si $k > \frac{m}{n} - 1$, l'ensemble des valeurs critiques de f est négligeable.

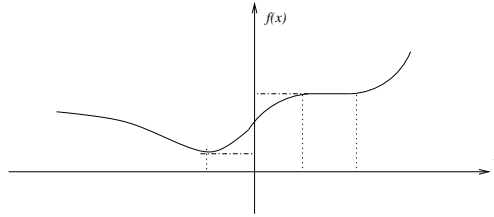


FIG. 2.2 – le théorème de Sard pour une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Preuve Nous ne donnons ici la preuve que pour $m = n = 1$, c'est à dire celui d'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , où Ω est un ouvert de \mathbb{R} . Pour une preuve générale, voir [Dobrovine, Novikov, Fomenko 2].

1 Cas compact Commençons par considérer une fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Comme f' est continue sur $[0, 1]$, intervalle compact, f' est uniformément continue. Donc $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$, tel que

$$|x - \tilde{x}| < \eta \implies |f'(x) - f'(\tilde{x})| < \epsilon.$$

Fixons ϵ (et donc η comme précédemment) et choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \eta$. Nous recouvrons $[0, 1]$ par

$$[0, 1] = \bigcup_{k=1}^n \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right].$$

Soit k tel que $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ contienne un point critique x_0 . Il résulte de ce qui précède que pour tout x dans $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $|f'(x)| < \epsilon$. Donc, de la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = f(\tilde{x}) + (x - \tilde{x}) \int_0^1 f'(\tilde{x} + t(x - \tilde{x})) dt,$$

on déduit que si x et \tilde{x} sont dans $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$,

$$|f(x) - f(\tilde{x})| < |x - \tilde{x}| \epsilon.$$

Donc la mesure de Lebesgue $\mu(f([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]))$ de $f([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}])$ est inférieure à $\frac{\epsilon}{n}$.

Maintenant, de l'inclusion :

$$V_c \subset \bigcup_{k, [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \cap \mathcal{C} \neq \emptyset} f([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]),$$

nous déduisons l'inégalité (où μ désigne la mesure de Lebesgue)

$$\mu(V_c) \leq \sum_{k, [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \cap \mathcal{C} \neq \emptyset} \mu(f([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}])) \leq \sum_{k, [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \cap \mathcal{C} \neq \emptyset} \frac{\epsilon}{n} \leq \epsilon.$$

Comme ϵ ici est arbitraire, cela prouve que $\mu(V_c) = 0$.

2 Cas non compact Si Ω est un ouvert quelconque de \mathbb{R} , on peut le recouvrir par une union dénombrable d'intervalles compacts, de la forme $[a, b]$. En appliquant ce qui précède pour chacun de ces intervalles $[a, b]$, on obtient que $V_c \cap f([a, b])$ est de mesure nulle. Comme une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, on en déduit que V_c est aussi de mesure nulle. *CQFD*.

Ensemble de niveau d'une fonction régulière

En utilisant le théorème 3 et le théorème 2, nous pouvons en déduire un résultat général sur la forme des ensembles de niveau d'une fonction régulière : elles sont presque toutes régulières.

Corollaire 1 *Soit E^m et F^n deux espaces affines de dimensions respectivement m et n tels que $m > n$. Soit Ω un ouvert de E^m et $f : \Omega \rightarrow F^n$ une application de classe \mathcal{C}^k (avec $k > \frac{m}{n} - 1$). Alors pour presque tout point $s \in F^n$, $N_s := f^{-1}(s)$ est lisse, au sens où*

- soit $N_s = \emptyset$
- soit $N_s \neq \emptyset$ et pour tout $x \in N_s$, il existe un voisinage U_x de x dans Ω tel que $N_s \cap U_x$ soit le graphe d'une application d'un ouvert d'un sous-espace affine de dimension $m - n$ de E^m dans un sous-espace affine de dimension n de E^m , de classe \mathcal{C}^k .

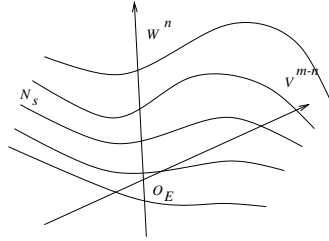


FIG. 2.3 – les lignes de niveau vues comme graphe d'une fonction

Preuve En utilisant le théorème de Sard, on établit que V_c , l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle. Soit $s \in F^n \setminus V_c$ et excluons le cas $N_s = \emptyset$. Soit $x \in N_s$, alors df_x est de rang n . Donc il existe un sous-espace vectoriel \vec{W}^n de \vec{E}^m tel que la restriction $df_x|_{\vec{W}^n}$ de df_x à \vec{W}^n soit un isomorphisme vers \vec{F}^n . Choisissons $\vec{V}^{m-n} \subset \vec{E}^m$ tel que $\vec{E}^m = \vec{V}^{m-n} \oplus \vec{W}^n$. Soit O_E

une origine de l'espace affine E^m . Pour tout $x \in E^m$, il existe un unique $v \in \vec{V}^{m-n}$ et $w \in \vec{W}^n$ tels que $x = O_E + v + w$. Nous savons que $\frac{\partial f}{\partial w}(x)$ est inversible, nous pouvons donc appliquer le théorème des fonctions implicites : il existe un voisinage U_x de x dans Ω tel que $N_s \cap U_x$ soit le graphe d'une application $\phi : \omega \longrightarrow \vec{W}^n$, où ω est un ouvert de $V^{m-n} := O_E + \vec{V}^{m-n}$ et $W^n := O_E + \vec{W}^n$. *CQFD.*

Remarque 1 *On peut étendre ce résultat au cas $m = n$. Alors, en utilisant le théorème 1, on établit que pour $s \in F^n \setminus V_c$, N_s est soit vide, soit constitué de points isolés.*

Exemple 11 *La fonction*

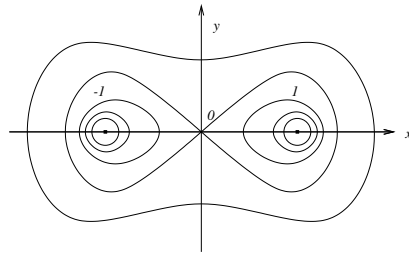
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 \end{aligned}$$

a pour lieu critique $\mathcal{C} = \{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\}$, pour ensemble des valeurs critiques $V_c = \{-1, 0\}$.

- pour $s \in]-\infty, -1[$, $N_s = \emptyset$*
- $N_{-1} = \{(-1, 0), (1, 0)\}$*
- pour $s \in]-1, 0[$, N_s est l'union de deux courbes connexes régulières*
- N_0 est une courbe singulière en forme de 8*
- pour $s \in]0, \infty[$, N_s est une courbe connexe régulière*

Exemple 12 et exercice *Hyperboloïdes de révolution* *Etudier les ensembles de niveau de la fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^2 + y^2 - z^2. \end{aligned}$$

FIG. 2.4 – lignes de niveau de $(x^2 + y^2)^2 - 2x^2$

Chapitre 3

Sous-variétés et variétés

3.1 Sous-variétés

Nous avons une notion intuitive de ce qu'est une courbe ou une surface régulière dans le plan ou l'espace. Des analogues de ces objets de dimension plus grande sont tout à fait envisageables et portent le nom de sous-variétés. Il existe plusieurs façon de les identifier et de les représenter : c'est pourquoi nous en donnons plusieurs définitions. Dans ce qui suit, E^M est un espace affine réel de dimension M .

Définition 8 (sous-variété 1) *Une sous-variété \mathcal{M} de E^M de classe \mathcal{C}^k et de dimension m est un sous-ensemble de E^M tel que pour tout point p de \mathcal{M} , il existe un voisinage U_p de p dans E^M et un difféomorphisme $x : U_p \rightarrow B^M(0, 1)$ de classe \mathcal{C}^k (où $B^M(0, 1)$ est la boule unité de \mathbb{R}^M), tel que $x(U_p \cap \mathcal{M}) = \Delta^m \cap B^M(0, 1)$, où Δ^m est le sous-espace de dimension m de \mathbb{R}^M défini par*

$$\Delta^m := \{\xi \in \mathbb{R}^M / \xi^{m+1} = \dots = \xi^M = 0\}.$$

Cette définition signifie que, localement, une sous-variété ressemble à un sous-espace affine, si on la regarde « à travers » un difféo-

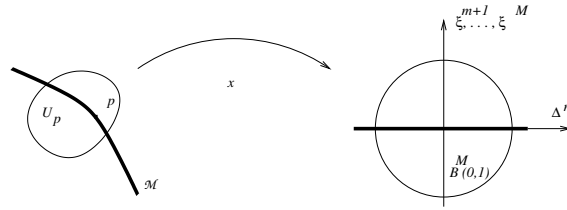


FIG. 3.1 – une sous-variété est localement la déformation régulière d'un sous-espace plat

morphisme (voir figure 10). L'application x est appelée une *carte locale*.

Définition 9 (sous-variété 2) Une sous-variété \mathcal{M} de E^M de classe \mathcal{C}^k et de dimension m est un sous-ensemble de E^M tel que pour tout point p de \mathcal{M} , il existe un voisinage U_p de p dans E^M , une application $f : U_p \rightarrow \mathbb{R}^{M-m}$ de classe \mathcal{C}^k et de rang $M - m$ partout (cela signifie que df est de rang maximal $M - m$ sur U_p) et une valeur $s_0 \in \mathbb{R}^{M-m}$ tels que $U_p \cap \mathcal{M} = f^{-1}(s_0)$.

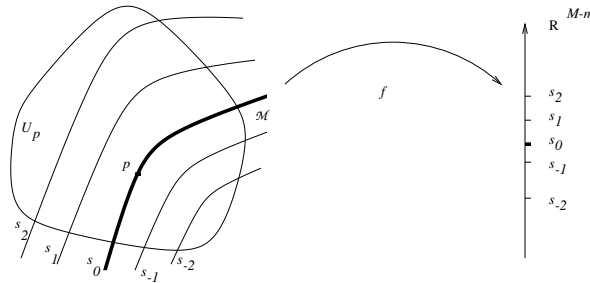


FIG. 3.2 – une sous-variété est localement un ensemble de niveau d'une fonction régulière

Cette définition entraîne en particulier que tout ensemble de niveau d'une application régulière correspondant à une valeur régulière est une sous-variété (voir figure 11).

Définition 10 (sous-variété 3) Une sous-variété \mathcal{M} de E^M de classe \mathcal{C}^k et de dimension m est un sous-ensemble de E^M tel que pour tout point p de \mathcal{M} , il existe un voisinage U_p de p dans E^M , tel que $U_p \cap \mathcal{M}$ soit le graphe d'une fonction ϕ de classe \mathcal{C}^k définie sur un ouvert ω d'un sous-espace affine V^m de dimension m de E^M à valeurs dans un sous-espace vectoriel \vec{W}^{M-m} de \vec{E}^M tels que $\vec{E}^M = \vec{W}^{M-m} \oplus \vec{V}^m$, id est $U_p \cap \mathcal{M} = \{x + \phi(x) / x \in \omega\}$.

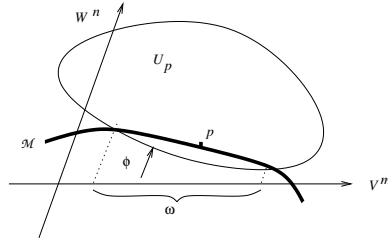


FIG. 3.3 – une sous-variété est localement le graphe d'une fonction régulière

Cette définition est la caractérisation donnée au corollaire 1 de la section précédente (voir figure 12).

Enfin une dernière définition est :

Définition 11 (sous-variété 4) Une sous-variété \mathcal{M} de E^M de classe \mathcal{C}^k et de dimension m est un sous-ensemble de E^M tel que pour tout point p de \mathcal{M} , il existe un voisinage U_p de p dans E^M , un ouvert ω^m de \mathbb{R}^m et une application $\psi : \omega^m \rightarrow U_p$ de classe \mathcal{C}^k telle que

- ψ est un homéomorphisme entre ω^m et $U_p \cap \mathcal{M}$ (où la topologie utilisée sur $U_p \cap \mathcal{M}$ est celle induite par la distance dans E^M)
- ψ est une **immersion**, id est $d\psi$ est de rang m partout sur ω^m

(voir figure 13)

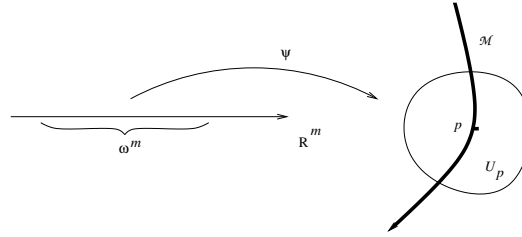


FIG. 3.4 – une sous-variété est localement l'image d'une immersion qui est un homéomorphisme vers son image

Théorème 7 *Les quatre définitions précédentes d'une sous-variété sont toutes équivalentes.*

Preuve L'équivalence entre les trois premières définitions est relativement facile à montrer et nous nous contenterons d'indiquer l'idée de la preuve. Nous détaillerons d'avantage l'équivalence entre la dernière définition et les trois autres, plus délicate à établir.

- sous-variété 1 \implies sous-variété 2 : prendre $f = (x^{m+1}, \dots, x^M)$
- sous-variété 2 \implies sous-variété 3 : utiliser le théorème des fonctions implicites comme dans la preuve du Corollaire 1, au chapitre précédent
- sous-variété 3 \implies sous-variété 4 : identifier $V^m \simeq \mathbb{R}^m$ et prendre $\psi(x) = (x, \phi(x))$, pour $x \in \omega$
- sous-variété 4 \implies sous-variété 1 : supposons que $\psi(0) = p$. Soit $(\epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_M)$ une base d'un sous-espace vectoriel de \vec{E}^M supplémentaire de $d\psi_0(\mathbb{R}^m)$. Posons

$$\begin{aligned} \Psi : \omega \times \mathbb{R}^{M-n} &\longrightarrow E^M \\ x &\longmapsto \psi(x^1, \dots, x^m) + x^{m+1}\epsilon_{m+1} + \dots + x^M\epsilon_M. \end{aligned}$$

Nous remarquons que $d\Psi_0$ est inversible, nous pouvons donc utiliser le théorème d'inversion locale et en déduire qu'il existe

une boule $B^M(0, r_0) \subset \omega \times \mathbb{R}^{M-n}$ telle que la restriction de Ψ à $B^M(0, r_0)$ soit inversible. Notons $U_{p,r_0} := \Psi(B^M(0, r_0))$ et $x := \Psi^{-1} : U_{p,r_0} \longrightarrow B^M(0, r_0)$ l'inverse de cette restriction. Pour $r \in]0, r_0[$, nous noterons également $U_{p,r} := \Psi(B^M(0, r))$. Puisque, pour tout $r \in]0, r_0[$, $\Psi(B^M(0, r) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})) = \psi(B^m(0, r)) \subset \mathcal{M}$, il est clair que, $\forall r \in]0, r_0[$, $B^M(0, r) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \subset x(U_{p,r} \cap \mathcal{M})$. Mais la difficulté est de montrer que l'inclusion inverse, $x(U_{p,r} \cap \mathcal{M}) \subset B^M(0, r) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, est valable pour un certain $r \in]0, r_0[$, afin de pouvoir conclure. Supposons le contraire : il existe une suite ϵ_k de réels inclus dans $]0, r_0[$, tendant vers 0, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $x_k \in x(U_{p,\epsilon_k} \cap \mathcal{M})$ tel que x_k ne soit pas dans $B^M(0, \epsilon_k) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ (voir figure 14). Comme x est un

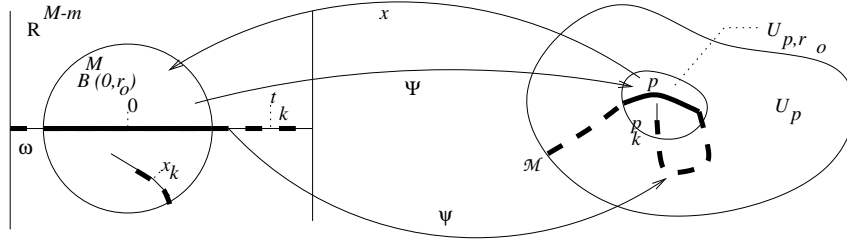


FIG. 3.5 – comment retrouver la définition 1 d'une sous-variété à partir de la définition 4

difféomorphisme, $\exists! p_k \in U_{p,r_0} \cap \mathcal{M}$ tel que $x(p_k) = x_k$. Et comme ψ est une bijection, $\exists! t_k \in \omega$ tel que $p_k = \psi(t_k)$. Nous remarquons que t_k n'appartient pas à la boule $B^M(0, r_0)$, car sinon on aurait $x_k = x(p_k) = x \circ \psi(t_k) = (t_k, 0)$, ce qui contredit notre hypothèse. Donc

$$|t_k| \geq r_0. \quad (3.1)$$

Or, puisque $\epsilon_k \longrightarrow 0$ et $x(U_{p,\epsilon_k}) = B^M(0, \epsilon_k)$, $x_k \longrightarrow 0$. En utilisant le fait que ψ est un homéomorphisme, ce qui

entraîne en particulier que ψ^{-1} est continu, nous obtenons finalement $t_k \rightarrow 0$, ce qui est en contradiction avec (3.1).
CQFD.

Définition 12 Soit \mathcal{M} une sous-variété de E^M . Le bord de \mathcal{M} est $\partial\mathcal{M} := \overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$. Une sous-variété sans bord est une sous-variété \mathcal{M} telle que $\partial\mathcal{M} = \emptyset$.

Exemples a) $\mathcal{M} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2z}{\sqrt{3}} = 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ est une sous-variété (calotte sphérique). Son bord est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\mathcal{M} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\}$ n'a pas de bord.

3.1.1 Sous-espace tangent

Soit \mathcal{M} une sous-variété de classe \mathcal{C}^1 de l'espace affine E^M . Soit $p \in \mathcal{M}$. Considérons l'ensemble des γ , immersions régulières (\mathcal{C}^1) d'intervalles I de \mathbb{R} contenant 0, à valeurs dans \mathcal{M} et telles que $\gamma(0) = p$. On note $T_p\mathcal{M}$ le sous-ensemble de \vec{E}^M des vecteurs de la forme $\dot{\gamma}(0)$.

En utilisant la définition 4 d'une sous-variété, on sait qu'il existe un ouvert ω^m de \mathbb{R}^m , un voisinage U_p de p dans E^M et une paramétrisation $\psi : \omega^m \rightarrow E^M$ de classe \mathcal{C}^1 tels que $\psi(\omega^m) = \mathcal{M} \cap U_p$. Soit $s \in \omega^m$ tel que $\psi(s) = p$, alors, toute courbe \mathcal{C}^1 $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ telle que $\gamma(0) = p$ coïncide sur un voisinage de 0 avec une courbe de la forme $\psi \circ c$, où $c : I' \rightarrow \omega^m$ est \mathcal{C}^1 , $0 \in I' \subset I$ et $c(0) = s$. Donc en particulier $\dot{\gamma}(0) = d\psi_s \circ \dot{c}(0)$. Cela signifie que $T_p\mathcal{M}$ contient $d\psi_s(\mathbb{R}^m)$. Réciproquement, il est clair que si $V \in d\psi_s(\mathbb{R}^m)$, il existe $v \in \mathbb{R}^m$ tel que $V = d\psi_s(v)$ et en considérant la courbe $t \mapsto \psi(s + tv)$, on en déduit que $V \in T_p\mathcal{M}$. Donc $T_p\mathcal{M} = d\psi_s(\mathbb{R}^m)$. En particulier, $T_p\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de dimension m de \vec{E}^M (car ψ est une immersion).

Définition 13 (sous-espace tangent) Soit \mathcal{M} une sous-variété de l'espace affine E^M . Soit $p \in \mathcal{M}$. Le sous-espace tangent à \mathcal{M} en p est le sous-espace vectoriel de dimension m de \vec{E}^M défini par

$$T_p\mathcal{M} := \{\dot{\gamma}(0)/\gamma \in \mathcal{C}^1(I, E^M), I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \text{ contenant } 0, \\ \forall t \in I, \gamma(t) \in \mathcal{M}, \gamma(0) = p\}.$$

3.1.2 Applications entre sous-variétés

Une propriété des sous-variétés est que l'on peut définir des applications différentiables entre elles.

Définition 14 Soit $\mathcal{M} \subset E^M$ et $\mathcal{N} \subset F^N$ deux sous-variétés d'espace affines de classe respectivement \mathcal{C}^k et \mathcal{C}^l . On dira qu'une application $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ est de classe \mathcal{C}^j si et seulement si, pour tout $p \in \mathcal{M}$ et pour toute paramétrisation locale \mathcal{C}^k $\psi : \omega^m \longrightarrow \mathcal{M} \cap U_p$ de \mathcal{M} au voisinage de p et pour toute carte locale \mathcal{C}^l $y : V_{f(p)} \longrightarrow B^n(0, 1)$ de \mathcal{N} au voisinage de $f(p)$, l'application composée $y \circ f \circ \psi : \omega^m \longrightarrow B^n(0, 1)$ est de classe \mathcal{C}^j . Cette définition n'a de sens que si $j \leq k, l$.

Cela étant nous pouvons maintenant définir la différentielle d'une application différentiable entre deux sous-variétés comme suit.

Définition 15 Soit $\mathcal{M} \subset E^M$ et $\mathcal{N} \subset F^N$ deux sous-variétés d'espace affines de classe respectivement \mathcal{C}^k et \mathcal{C}^l et soit $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application de classe \mathcal{C}^j (pour $1 \leq j \leq k, l$). Pour tout $p \in \mathcal{M}$, la différentielle de f en p est l'application linéaire $df_p : T_{\mathcal{M}} \longrightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$ telle que, pour toute carte locale $y : V_{f(p)} \longrightarrow B^n(0, 1)$ de \mathcal{N} avec $y(f(p)) = 0$ et pour toute paramétrisation locale $\psi : \omega^m \longrightarrow \mathcal{M} \cap U_p$ de \mathcal{M} avec $\psi(0) = p$, on ait

$$d(y \circ f \circ \psi)_0 = dy_{f \circ \psi(0)} \circ df_{\psi(0)} \circ d\psi_0.$$

On vérifie qu'alors cette définition de df_p est indépendante de ψ et y .

Vocabulaire

Un difféomorphisme local défini sur un ouvert d'une sous-variété et à valeurs dans \mathbb{R}^m sera appelé une **carte locale** : ses composantes constituent des **coordonnées locales** (comme dans la définition 1). Un difféomorphisme local défini sur un ouvert de \mathbb{R}^m et à valeurs dans une sous-variété est appelé une **paramétrisation locale** (comme dans la définition 4).

Définition 16 (immersion) *On appelle **immersion** d'un ouvert Ω^m d'un espace affine E^m de dimension m à valeurs dans un espace affine F^n toute application $f : \Omega^m \longrightarrow F^n$ qui est telle que df soit de rang m partout (id est f n'admet que des valeurs régulières).*

*Plus généralement, on appelle **immersion** d'une sous-variété \mathcal{M}^m , à valeurs dans une sous-variété \mathcal{N}^n , toute application $f : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ qui est telle que df soit de rang m partout.*

Définition 17 (plongement) *On appelle **plongement** toute immersion qui est un homéomorphisme vers son image.*

A l'aide du théorème d'inversion locale, on peut analyser la signification géométrique de ces notions : par exemple, l'image par une immersion d'une courbe est une courbe lisse, mais pouvant posséder éventuellement des points d'auto-intersection. L'image d'un ouvert (ou d'une sous-variété) par un plongement est une sous-variété. Une sous-variété de dimension 1 est appelée tout simplement une courbe plongée, une sous-variété de dimension 2 est une surface plongée.


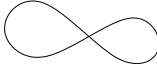

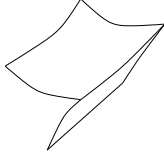
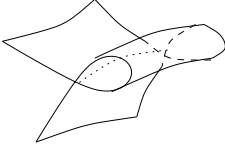
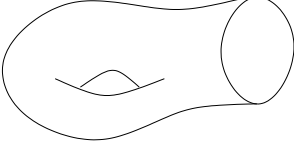
Courbes			
Surfaces			
immersions	non	oui	oui
plongements	non	non	oui

FIG. 3.6 – différences entre immersion et plongement

3.2 Etude d'un exemple

Soit $E^4 = M(2, \mathbb{R})$, l'espace des matrices réelles 2×2 et $SL(2, \mathbb{R})$ le groupe *spécial linéaire*, c'est à dire

$$SL(2, \mathbb{R}) := \{p \in M(2, \mathbb{R}) / \det p = 1\}.$$

Nous allons voir que $SL(2, \mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension 3 et de classe \mathcal{C}^∞ de $M(2, \mathbb{R})$ et examiner comment les diverses définitions qui précèdent fonctionnent dans ce cas. Nous nous placerons d'abord au voisinage du point $\mathbb{1}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$.

En préliminaire, nous définissons l'application exponentielle :

$$\begin{aligned} \exp : M(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow M(2, \mathbb{R}) \\ \xi &\longmapsto e^\xi := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!}. \end{aligned}$$

C'est une application de classe \mathcal{C}^∞ . Notons que $e^0 = \mathbb{1}_2$ et que la différentielle de \exp en 0 est $d\exp_0 = \mathbb{1}_{M(2, \mathbb{R})}$. D'après le théorème

d'inversion locale, il existe un voisinage V_0 de 0 dans $M(2, \mathbb{R})$ et un voisinage $U_{\mathbb{1}_2}$ dans $M(2, \mathbb{R})$ tel que \exp soit un difféomorphisme de V_0 vers $U_{\mathbb{1}_2}$. Notons $x = \log := \exp^{-1} : U_{\mathbb{1}_2} \longrightarrow V_0$ son inverse. Nous avons le lemme suivant.

Lemme 4 *Soit $\xi \in V_0$ et $p = e^\xi \in U_{\mathbb{1}_2}$, alors*

$$\det p = \det(e^\xi) = e^{\operatorname{tr} \xi}.$$

Preuve Soit $p(t) = e^{t\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \xi^k}{k!}$, pour $t \in [0, 1]$. On a $\frac{dp}{dt}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \xi^{k+1}}{k!} = \xi p(t) = p(t)\xi$ et $p(0) = \mathbb{1}_2$. Par ailleurs, $p(t)$ est une matrice inversible (d'inverse $e^{-t\xi}$) et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\det p(t)) &= \operatorname{tr} \left(p(t)^{-1} \frac{dp}{dt}(t) \right) \det p(t) \\ &= \operatorname{tr} (p(t)^{-1} p(t) \xi) \det p(t) \\ &= \operatorname{tr}(\xi) \det p(t). \end{aligned}$$

Et comme $\det p(0) = 1$, on en déduit que $\det p(t) = e^{t \operatorname{tr}(\xi)}$ et donc que $\det p = e^{\operatorname{tr}(\xi)}$. *CQFD.*

Une conséquence immédiate de ce lemme est que si $\xi \in V_0$, alors, $e^\xi \in SL(2, \mathbb{R})$ si et seulement si

$$\xi \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) := \{q \in M(2, \mathbb{R}) / \operatorname{tr} q = 0\}.$$

Vérifions que $SL(2, \mathbb{R})$ est une sous-variété de $M(2, \mathbb{R})$, en montrant qu'en tout point $p \in SL(2, \mathbb{R})$, chacun des critères donnés dans les définitions 8 à 11 est satisfait.

Définition 1 : elle est satisfaite avec l'application $x_p : q \longmapsto \log(p^{-1}q)$, qui envoie $SL(2, \mathbb{R}) \cap p.U_{\mathbb{1}_2}$ sur $sl(2, \mathbb{R}) \cap V_0$.

Définition 2 : elle est satisfaite avec l'application

$$\begin{aligned} f : M(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \det p. \end{aligned}$$

En effet, pour tout $p \in SL(2, \mathbb{R})$, $q \longmapsto df_p(q) = \text{tr}(p^{-1}q)$ est toujours de rang 1.

Définition 3 : nous notons $V^3 := p.sl(2, \mathbb{R})$ et nous choisissons W^1 toute droite vectorielle de $M(2, \mathbb{R})$ non parallèle à V^3 , par exemple

$$W^1 = \{tp/t \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi $M(2, \mathbb{R}) = V^3 \oplus W^1$. De plus nous prenons

$$\omega = \left\{ \xi := p \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in p.sl(2, \mathbb{R}) / 1 - \det(p^{-1}\xi) = 1 + \alpha^2 + \beta\gamma > 0 \right\} \subset V^3$$

et

$$\begin{aligned} \phi : \omega &\longrightarrow W^1 \\ \xi &\longmapsto \sqrt{1 - \det(p^{-1}\xi)}p. \end{aligned}$$

Alors le graphe $\{\xi + \phi(\xi)/\xi \in \omega\}$ de ϕ s'identifie à l'intersection de $SL(2, \mathbb{R})$ avec un voisinage de p dans $M(2, \mathbb{R})$.

Définition 4 : nous prenons pour ψ la restriction de $\xi \longmapsto p \exp \xi$ à $sl(2, \mathbb{R}) \cap V_0$.

3.3 Variétés

Il existe une notion d'apparence plus générale que la notion de sous-variété, et plus abstraite, qui consiste à définir des objets

tels que des courbes, des surfaces, etc *intrinsèquement*, c'est à dire vue de l'intérieur. C'est le point de vue d'un être condamné à vivre dans une sous-variété sans se rendre compte qu'elle est plongée dans un espace affine. La seule manière qui lui reste de comprendre le monde qui l'entoure est de le cartographier, c'est à dire d'en dessiner des *cartes* et, lorsqu'il a tout exploré, de réaliser un *atlas*.

Définition 18 *Soit \mathcal{M} un espace topologique. \mathcal{M} est appelée une variété différentielle de dimension m et de classe \mathcal{C}^k si et seulement si il existe un recouvrement par des ouverts $(U_i)_{i \in I}$ tels que*

- pour chaque $i \in I$, il existe un ouvert Ω_i de \mathbb{R}^m et un homéomorphisme x_i de U_i vers Ω_i , appelé carte locale sur \mathcal{M}
- pour tout i, j tels que $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application $x_j \circ (x_i)^{-1}$ définie de $x_i(U_{ij})$ dans $x_j(U_{ij})$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k

La collection $(U_i, x_i)_{i \in I}$ est appelée atlas.

Exercice — Montrer que toute sous-variété est une variété. (Réciproquement, un théorème, dû à Whitney, dit que toute variété peut être plongée dans un espace vectoriel et être ainsi réalisée comme une sous-variété ; la preuve de ce théorème repose sur une utilisation du lemme de Sard).

Noter que deux atlas différents peuvent a priori conduire à deux structures différentielles différentes sur un même espace topologique¹. Les conditions énoncées dans la définition 18 d'une

¹Par exemple une question importante en topologie différentielle est de savoir si un espace topologique homéomorphe à \mathbb{R}^n ou à la sphère S^n admet une unique structure différentiable (c'est à dire que tout atlas différentiel est compatible avec la structure standard sur \mathbb{R}^n ou S^n), ou bien s'il existe, en plus de la structure différentielle standard, des structures « exotiques ». Ainsi on démontre que \mathbb{R}^n n'a qu'une seule structure différentielle, sauf si $n = 4$ (Donaldson, Freedman), mais que S^7 admet 28 structures différentielles.

variété permettent de donner sens aux notions d'applications différentielles à valeurs dans une variété ou définie sur une variété. Voici deux exemples.

1. Si \mathcal{D} est un domaine ouvert de \mathbb{R}^n et \mathcal{M} est une variété différentielle de classe \mathcal{C}^k , munie d'un atlas $(U_i, x_i)_{i \in I}$ et si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$ est une application continue, on dira que f est de classe \mathcal{C}^k si et seulement si $\forall i \in I$, l'application

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_i) & \longrightarrow & \Omega_i \\ t & \longmapsto & x_i(f(t)) \end{array}$$

est de classe \mathcal{C}^k .

2. Si F est un espace affine et si $f : \mathcal{M} \rightarrow F$ est une application, on dira que f est de classe \mathcal{C}^k si $\forall i \in I$,

$$\begin{array}{ccc} \Omega_i & \longrightarrow & F \\ \xi & \longmapsto & f(x_i^{-1}(\xi)) \end{array}$$

est de classe \mathcal{C}^k .

Exercice — 1) Montrer que ces définitions sont bien cohérentes, au sens où les critères utilisés ne dépendent pas du choix de la carte, ou plus généralement de l'atlas.

2) Pourquoi ai-je eu besoin de supposer que l'application $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$ était continue au 1. et je ne l'ai pas fait pour $f : \mathcal{M} \rightarrow F$ au 2. ?

3) Etendre ces définitions à la définition d'une application $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de classe \mathcal{C}^k , entre deux variétés de classe \mathcal{C}^k .

Toujours à partir de la définition 18, il est possible de définir l'espace tangent à une variété différentielle \mathcal{M} en un point M . Nous en proposons deux : la première n'est pas trop éloignée de

la définition d'un sous-espace tangent à une sous-variété. La seconde semble plus abstraite et rappelle, dans l'esprit, la théorie des distributions.

Définition 19 (espace tangent 1) *Soit \mathcal{M} une variété différentielle et $M \in \mathcal{M}$. Considérons l'ensemble $\Gamma_M := \{(I, \gamma) / I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \text{ contenant } 0, \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}), \gamma(0) = M\}$. Considérons aussi la relation d'équivalence définie entre deux arcs (I, γ) et $(\tilde{I}, \tilde{\gamma})$ dans Γ_M par $(I, \gamma) \sim (\tilde{I}, \tilde{\gamma})$ si et seulement si il existe une carte locale $x_i : U_i \longrightarrow \Omega_i$, avec $M \in U_i$, telle que*

$$\frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(x_i \circ \tilde{\gamma})}{dt}(0).$$

[Exercice — vérifier que cette relation d'équivalence ne dépend pas du choix de la carte $x_i : U_i \longrightarrow \Omega_i$ utilisée.]

Alors l'espace tangent à \mathcal{M} en M est l'ensemble des classes d'équivalence modulo \sim ; on le note $T_M\mathcal{M}$.

Notons provisoirement $[(I, \gamma)]$ la classe d'équivalence de (I, γ) modulo \sim . Etant donné une carte $x_i : U_i \longrightarrow \Omega_i$, avec $M \in U_i$, on peut définir une application

$$\begin{aligned} (dx_i)_M : T_M\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ [(I, \gamma)] &\longmapsto \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt}(0). \end{aligned}$$

Exercice — 1) Pourquoi cette application est-elle bien définie ?

2) Montrer que $(dx_i)_M$ est une bijection.

3) Montrer que si $x_j : U_j \longrightarrow \Omega_j$ est une autre carte locale avec $M \in U_j$ et que si on note $\phi := x_j \circ x_i^{-1} : x_i(U_{ij}) \longrightarrow x_j(U_{ij})$, où $U_{ij} = U_i \cap U_j$, alors

$$(dx_j)_M = d\phi_{x_i(M)} \circ (dx_i)_M. \quad (3.2)$$

3) En déduire que $T_M\mathcal{M}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel, indépendamment de la carte utilisée, et qu'alors $(dx_i)_M$ est une application linéaire.

A présent notons V un élément de $T_M\mathcal{M}$ (un vecteur tangent à \mathcal{M} en M) et considérons une fonction $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . A partir d'une carte $x_i : U_i \rightarrow \Omega_i$, nous pouvons représenter f par une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^m : f \circ x_i^{-1}$ et V par un vecteur de $\mathbb{R}^m : (dx_i)_M(V)$. Que faisons-nous avec une fonction et un vecteur ? nous considérons la dérivée de Lie

$$L_{(dx_i)_M(V)} (f \circ x_i^{-1}) (x_i(M)) = d(f \circ x_i^{-1})_{x_i(M)} ((dx_i)_M(V)) \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Après que vous vous soyez accoutumé(e) à cette relation, vous pourrez chercher à vérifier que, si on remplace x_i par une autre carte locale, le résultat dans (3.3) est le même nombre réel. Vous pouvez pour cela utiliser (3.2). Donc le nombre défini par (3.3) ne dépend que de f et de V : on le notera $df_M(V)$ ou $L_V f(M)$. Ainsi un vecteur tangent agit sur toute fonction définie sur un voisinage de M en la *dérivant*.

Maintenant, si on a muni \mathbb{R}^m d'une base (e_1, \dots, e_m) , toute carte locale $x : U \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$ fournit gratuitement une base de $T_M\mathcal{M}$: la famille (v_1, \dots, v_m) telle que $dx_M(v_a) = e_a, \forall a = 1, \dots, m$. Et l'action de chaque vecteur $V = \sum_{a=1}^m V^a v_a$ sur une fonction f définie sur U est

$$df_M(V) = \sum_{a=1}^m V^a d(f \circ x^{-1})_{x(M)}(e_a) = \sum_{a=1}^m V^a \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x^a}(x(M)) \simeq \sum_{a=1}^m V^a \frac{\partial f}{\partial x^a}(M),$$

où l'on a commis l'abus de notation $f \circ x_i^{-1} \simeq f$. Finalement on comprend qu'un vecteur tangent est caractérisé par son action sur les fonctions définies sur la variété et on peut identifier V avec l'opérateur $\sum_{a=1}^m V^a \frac{\partial}{\partial x^a}$.

Récapitulons : si $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une carte locale, la notation $\frac{\partial}{\partial x^a}$ représente le vecteur de $T_M \mathcal{M}$ dont l'image par dx_M est le vecteur également noté $\frac{\partial}{\partial x^a}$, c'est à dire le a -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m .²

Nous ne sommes plus très loin d'une deuxième définition de l'espace tangent.

Définition 20 (espace tangent 2) *Soit \mathcal{M} une variété différentielle et $p \in \mathcal{M}$. Soit $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^1 de \mathcal{M} vers \mathbb{R} . L'espace tangent à \mathcal{M} en M est l'ensemble des dérivations agissant sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ au point M , c'est à dire l'ensemble des applications linéaires $D : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, continues pour la topologie \mathcal{C}^1 , telles que $\forall f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$,*

$$D(fg) = (Df)g(M) + f(M)(Dg)$$

(règle de Leibniz).

Exercice — Montrer l'équivalence entre les deux définitions. La partie difficile est, bien entendu, de retrouver la première définition, à partir de la deuxième. On pourra utiliser pour cela le fait que $1 \cdot 1 = 1$ et d'autres faits moins triviaux, comme : si ϕ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^m telle que $\phi(0) = 0$, alors on peut écrire $\phi(x) = \sum_{a=1}^m x^a \psi_a(x)$,

²Attention aux indices : pour une coordonnée, l'exposant a (en haut) parcourt $\{1, \dots, m\}$ et indique que x^a est la composante selon $e_a \simeq \frac{\partial}{\partial x^a}$, tandis qu'un indice i (en bas) rappelle que l'on utilise la carte $x_i : U_i \rightarrow \Omega_i$.

où $\psi^a(x) = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x^a}(tx) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 (voir ce que cela donne lorsque $\phi = f \circ x$ et $d\phi_0 = 0 \dots$); enfin $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Variété orientée

La variété \mathcal{M} est *orientable* s'il est possible de choisir l'atlas $(U_i, x_i)_{i \in I}$, de façon à ce que $\forall i, j \in I$ tels que $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $x_j \circ x_i^{-1}$ soit un difféomorphisme de $x_i(U_{ij})$ vers $x_j(U_{ij})$ qui respecte l'orientation, c'est à dire que, pour tout $\xi \in x_i(U_{ij}) \subset \mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne $J(x_j \circ x_i^{-1})_\xi$ a un déterminant strictement positif. Le choix d'un tel atlas détermine alors une *orientation*, à savoir la donnée, pour chaque point $M \in \mathcal{M}$ d'une orientation de l'espace tangent $T_M \mathcal{M}$ — celle pour laquelle $(dx_i)_M : T_M \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est directe —, dépendant continument du point M .

Immersion d'une variété

Définition 21 Une variété immergée (\mathcal{M}, f) de classe \mathcal{C}^k est la donnée d'une variété \mathcal{M} de classe \mathcal{C}^k et d'une application continue $f : \mathcal{M} \longrightarrow E^m$ possédant les propriétés suivantes. Pour tout atlas de \mathcal{M} , $(U_i, x_i)_{i \in I}$, (où chaque carte x_i est à valeurs dans un ouvert Ω_i de \mathbb{R}^m), on a : $\forall i \in I$, $f \circ x_i^{-1} : \Omega_i \longrightarrow E^m$ est une immersion de classe \mathcal{C}^k .

La différentielle de f en un point M de \mathcal{M} est l'application linéaire $df_M : T_M \mathcal{M} \longrightarrow \vec{E}^m$ définie par $df_M := d(f \circ x_i^{-1})_{x_i(M)} \circ d(x_i)_M$. Une conséquence de la définition est que df_M est alors forcément une application de rang m . Dans le cas où \mathcal{M} est orientée, cette immersion est naturellement orientée et l'image de toute base di-

recte de $T_M\mathcal{M}$ par df_M oriente $df_M(T_M\mathcal{M})$.

Exercice — Soit (\mathcal{M}, f) une variété immergée et supposons de plus que $f : \mathcal{M} \rightarrow E^m$ est un plongement (c'est à dire un homéomorphisme vers son image). Montrer qu'alors $f(\mathcal{M})$ est une sous-variété de E^m et que, pour tout point $M \in \mathcal{M}$, l'image de $T_M\mathcal{M}$ par df_M est le sous-espace tangent $T_{f(M)}f(\mathcal{M})$.

Chapitre 4

Courbes

4.1 Immersions et plongements d'un intervalle

Comme conséquence des définitions de la section précédente, si I est un intervalle de \mathbb{R} , k est un entier ≥ 1 et E^m un espace affine, une application f de I vers E^m est appelée *immersion* de I dans E^m de classe \mathcal{C}^k si et seulement si f est une application de classe \mathcal{C}^k telle que

$$\forall t \in I, \dot{f}(t) := \frac{df}{dt}(t) \neq 0.$$

Si de plus, f est un homéomorphisme vers son image, f est alors appelée un *plongement* et son image est une sous-variété de dimension 1.

Si l'on observe dans le ciel un avion effectuant des figures de voltige, sa position dans l'espace est une fonction du temps qui est une immersion, puisqu'au contraire d'un hélicoptère, l'avion ne peut à aucun moment avoir une vitesse nulle. Le sillage observé matérialise une courbe immergée qui, bien entendu, peut se recouper.

4.2 Arcs et variétés immergées

Nous pouvons construire deux relations d'équivalence sur les immersions d'intervalle : si $f : I \rightarrow E^m$ et $g : I' \rightarrow E^m$ sont deux immersions d'intervalles ouverts de \mathbb{R} , nous dirons que

$$(I, f) \mathcal{R} (I', g) \iff \exists \phi : I' \rightarrow I, \text{ difféomorphisme tel que } g = f \circ \phi,$$

signifiant que f et g parcourent le même chemin. Et de même,

$$(I, f) \mathcal{R}^+ (I', g) \iff \exists \phi : I' \rightarrow I, \text{ difféomorphisme croissant tel que } g = f \circ \phi$$

signifiant que f et g parcourent le même chemin dans le même sens.

Une classe d'équivalence Γ pour la relation \mathcal{R} d'immersions représente un *arc immergé*. Il est clair que dans chacune de ces classes d'équivalence, il y a exactement deux sous-classes d'équivalence pour la relation \mathcal{R}^+ . Le choix d'une de ces deux classes d'équivalence correspond à se donner une orientation sur l'arc immergé : on a alors un *arc immergé orienté* Γ^+ . Le choix d'un représentant (I, f) d'un arc Γ est appelé une *paramétrisation* de Γ .

Dans le cas où les immersions sont des plongements, une classe d'équivalence pour \mathcal{R} est essentiellement caractérisée par la courbe image — on a alors un *arc plongé* — et le choix d'une classe d'équivalence pour la relation \mathcal{R}^+ détermine une orientation, on a alors un *arc plongé orienté*.

Nous pouvons, plus généralement, considérer des immersions de variétés \mathcal{M} de dimension 1, par exemple : la droite $\mathbb{R} \simeq]-1, 1[$ (l'équivalence signifie ici que ces deux variétés sont diffeomorphes)

ou le cercle $S^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Si $(U_i, x_i)_{i \in I}$ est un atlas de \mathcal{M} , on pourra toujours supposer, sans perte de généralité que chaque carte x_i est à valeurs dans un intervalle I_i de \mathbb{R} .

Exercice — Démontrer que toute variété de dimension 1 connexe est difféomorphe à la droite ou au cercle.

4.3 Vecteurs tangents

Pour être très précis, nous noterons \vec{E}^m l'espace vectoriel associé à l'espace affine E^m et nous choisissons une base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ de \vec{E}^m et de sorte qu'un vecteur $x \in \vec{E}^m$ se représente par des coordonnées (x^1, \dots, x^m) . Nous fixons également un point O de E^m qui servira d'origine.

Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow E^m$, l'immersion d'une variété de dimension 1. Elle est localement caractérisée par m fonctions f_i^1, \dots, f_i^m telles que $\forall t \in I_i, f_i := f \circ x_i^{-1} \simeq f(t) = O + f_i^1(t)\epsilon_1 + \dots + f_i^m(t)\epsilon_m$. Dire que f est de classe \mathcal{C}^k équivaut en fait à dire que chacune des composantes f_i^a est une fonction de classe \mathcal{C}^k .

De par l'identité

$$\dot{f}_i(t) = \frac{df_i}{dt}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_i(t+s) - f_i(t)}{s},$$

il est clair que $\dot{f}_i(t)$ n'est pas un objet dans l'espace affine E^m mais dans l'espace vectoriel \vec{E}^m . En effet ici, $f_i(t)$ et $f_i(t+s)$ sont dans l'espace affine E^m , mais la différence $f_i(t+s) - f_i(t)$ est à interpréter comme le vecteur joignant le point $f_i(t)$ au point $f_i(t+s)$, donc dans \vec{E}^m . Le quotient $\frac{f_i(t+s) - f_i(t)}{s}$ est donc également dans \vec{E}^m et sa limite aussi. Ce vecteur s'exprime dans la base choisie par

$$\dot{f}_i(t) = \dot{f}_i^1(t)\epsilon_1 + \dots + \dot{f}_i^m(t)\epsilon_m,$$

c'est l'image du vecteur $\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_M \mathcal{M}$ par df_M , où M est le point de \mathcal{M} tel que $x_i(M) = t$.

Si on avait utilisé une autre carte locale x_j , le même procédé conduirait à $\dot{f}_j(x_j(M)) = df_M(\frac{\partial}{\partial x_j})$ a priori différent de $df_M(\frac{\partial}{\partial x_i})$. Mais bien sûr les deux vecteurs sont colinéaires et engendrent la droite tangente à l'immersion au point $p = f(M)$. Si f est un plongement, alors $f(\mathcal{M})$ est une sous-variété et on peut noter cette droite $T_p f(\mathcal{M})$.

Noter que, si on a choisi une orientation sur un arc plongé Γ , toute droite tangente à Γ en un point p est orientée : on décide que $\dot{f}(t)$ (où t est tel que $f(t) = p$) est une base directe de la droite tangente $T_p \Gamma$.

4.4 Abscisse curviligne

Nous supposons à présent que l'espace affine E^m est *euclidien*, cela signifie que \vec{E}^m est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nous notons $|x|^2 = \langle x, x \rangle$. Choisissons une base orthonormée $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ de \vec{E}^m et de sorte que des vecteurs $x, y \in \vec{E}^m$ ayant pour coordonnées (x^1, \dots, x^m) et (y^1, \dots, y^m) respectivement ont pour produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x^i y^i$.

Commençons par regarder le cas d'une immersion $f : I \longrightarrow E^m$, où I est un intervalle. La norme de $\dot{f}(t)$, $|\dot{f}(t)| = \sqrt{(\dot{f}^1(t))^2 + \dots + (\dot{f}^m(t))^2}$ peut s'interpréter comme la vitesse de $f(t)$ au cours du temps t (si l'on conçoit f comme le mouvement d'une particule dans l'espace au cours du temps).

Définition 22 Toute fonction dérivable $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{d\sigma}{dt}(t) = |\dot{f}(t)|$$

est appelée abscisse curviligne le long de f .

Fabriquer toutes les abscisses curvilignes est chose facile. On choisit un point $t_0 \in I$, une constante c et on pose

$$\sigma(t) = c + \int_{t_0}^t |\dot{f}(\tau)| d\tau.$$

Il est clair que si f est de classe \mathcal{C}^k , alors σ est aussi de classe \mathcal{C}^k . La distance curviligne entre deux points $f(a)$ et $f(b)$ est donnée par $\sigma(b) - \sigma(a)$.

Une abscisse curviligne σ est une fonction dérivable strictement croissante, donc un difféomorphisme de I vers $\sigma(I)$. Nous pouvons choisir d'effectuer un changement de variable

$$s = \sigma(t)$$

et nous ramener ainsi à étudier l'immersion

$$\gamma(s) := f(\sigma^{-1}(s)),$$

appelée *paramétrisation normale*.

Dans le cas où f est l'immersion d'une variété \mathcal{M} , on définit dans un premier temps pour chaque carte locale $x_i : U_i \rightarrow I_i$ une fonction $s_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}$ par $\dot{s}_i(t) = |\dot{f}_i(t)|$, et en posant $\sigma_i := s_i \circ x_i$, on obtient ainsi une coordonnée privilégiée sur U_i : une telle carte est unique, modulo la transformation $\sigma_i \rightarrow \sigma_i + C$, où C est une constante réelle. Sur chaque intersection U_{ij} , on a $d\sigma_i = d\sigma_j$ et donc $\sigma_i - \sigma_j$ est une constante réelle.

4.5 Repère de Frenet

Nous faisons l'hypothèse ici que l'espace E^m est euclidien et *orienté*. La base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ est alors supposée être une base or-

thonormée directe de \vec{E}^m . Nous allons nous restreindre dans la suite à des immersions d'un intervalle. Soit $f : I \rightarrow E^m$ une immersion directe de classe \mathcal{C}^k . D'après ce qui précède, nous pouvons choisir une abscisse σ et, en posant $\gamma(s) := f(\sigma^{-1}(s))$, étudier plutôt γ . Nous posons

$$\tau(s) = \frac{d\gamma}{ds}(s) = \frac{df \circ \sigma^{-1}}{ds}(s) = \frac{df}{dt}(\sigma^{-1}(t)) \frac{1}{\dot{\sigma} \circ \sigma^{-1}(s)}.$$

C'est un vecteur de norme 1, appelé *vecteur tangent unitaire*.

4.5.1 Cas d'une courbe dans un plan

Nous supposons ici que $k = 2$. L'application $s \mapsto \tau(s)$ est de classe \mathcal{C}^1 . E^2 étant orienté et euclidien, pour tout $s \in I$, il existe un unique vecteur $\nu(s)$ de \vec{E}^2 , appelé *vecteur normal unitaire*, tel que $(\tau(s), \nu(s))$ soit une base orthonormée directe de \vec{E}^2 : si $\tau(s) = \tau^1(s)\epsilon_1 + \tau^2(s)\epsilon_2$, $\nu(s) = -\tau^2(s)\epsilon_1 + \tau^1(s)\epsilon_2$.

Dérivons la relation $|\tau(s)|^2 = 1$, il vient

$$2 \left\langle \tau(s), \frac{d\tau}{ds}(s) \right\rangle = 0.$$

Cela signifie que $\dot{\tau}(s)$ est dans la droite orthogonale à $\tau(s)$, donc est colinéaire à $\nu(s)$:

$$\exists k(s) \in \mathbb{R}, \quad \dot{\tau}(s) = k(s)\nu(s).$$

$k(s)$ est appelé *courbure algébrique* de l'immersion g en s . Noter que $k(s)$ est un réel qui peut être positif, nul ou négatif. Si l'on change l'orientation de la courbe, la valeur de la courbure est multipliée par -1.

Cercle osculateur

Fixons $s_0 \in I$ et considérons,

$$c(s) = \gamma(s_0) + (1 - \cos[k(s_0)(s - s_0)]) \frac{\nu(s_0)}{k(s_0)} + \sin[k(s_0)(s - s_0)] \frac{\tau(s_0)}{k(s_0)},$$

si $k(s_0) \neq 0$, et

$$c(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)\tau(s_0),$$

si $k(s_0) = 0$. Remarquons que dans le cas où $k(s_0) \neq 0$, c paramétrise le cercle passant par $\gamma(s_0)$, de centre $\gamma(s_0) + \frac{\nu(s_0)}{k(s_0)}$ et de rayon $|k(s_0)|^{-1}$ et dans le cas où $k(s_0) = 0$, c paramétrise la droite passant par $\gamma(s_0)$ et de vecteur directeur $\tau(s_0)$.

Lemme 5 $\gamma(s)$ et $c(s)$ coïncident à l'ordre deux en s_0 , c'est à dire

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|\gamma(s) - c(s)\|}{(s - s_0)^2} = 0.$$

Preuve Ecrivons les développements de Taylor de $c(s)$ et $\gamma(s)$ au voisinage de s_0 , en remarquant que $\dot{\gamma}(s) = \tau(s)$ et $\ddot{\gamma}(s) = \dot{\tau}(s) = k(s)\nu(s)$.

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)\dot{\gamma}(s_0) + (s - s_0)^2 \int_0^1 \ddot{\gamma}(s_0 + t(s - s_0))(1 - t) dt.$$

$$\begin{aligned} c(s) &= \gamma(s_0) + (s - s_0)\tau(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2} k(s_0)\nu(s_0) + O((s - s_0)^3) \\ &= \gamma(s_0) + (s - s_0)\dot{\gamma}(s_0) + (s - s_0)^2 \ddot{\gamma}(s_0) \int_0^1 (1 - t) dt + O((s - s_0)^3). \end{aligned}$$

Donc,

$$\gamma(s) - c(s) = (s - s_0)^2 \int_0^1 [\ddot{\gamma}(s_0 + t(s - s_0)) - \ddot{\gamma}(s_0)](1 - t) dt + O((s - s_0)^3),$$

ce qui prouve le résultat dans le cas où $k(s_0) \neq 0$. Le cas où $k(s_0) = 0$ est encore plus simple. *CQFD*.

On voit que $|k(s)|$ est l'inverse du rayon du cercle osculateur, ce nombre est appelé *rayon de courbure* de la courbe au point. Lorsque l'on parcourt la courbe dans le sens direct, $k(s)$ est positif si le centre du cercle osculateur est à gauche et négatif si le centre du cercle osculateur est à droite.

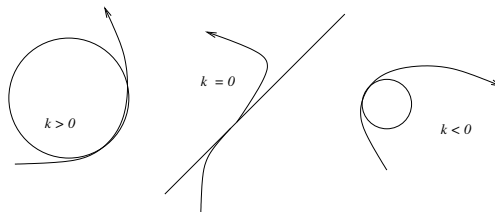


FIG. 4.1 – le signe de la courbure

La courbure comme dérivée de l'azimuth

Une autre interprétation de k est la suivante. On peut écrire $\tau(s) = \cos\theta(s)\epsilon_1 + \sin\theta(s)\epsilon_2$ et $\nu(s) = -\sin\theta(s)\epsilon_1 + \cos\theta(s)\epsilon_2$, où $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ est unique à l'addition d'une constante dans $2\pi\mathbb{Z}$ près. Alors $k(s) = \frac{d\theta}{ds}(s)$.

4.5.2 Cas d'une courbe dans l'espace de dimension trois

Nous supposons à présent que $k = 3$, alors $s \mapsto \tau(s)$ est de classe \mathcal{C}^2 . Notons $\mathcal{C} = \{s \in I / \dot{\tau}(s) = 0\}$. Nous pouvons définir

sur $I \setminus \mathcal{C}$ l'application de classe \mathcal{C}^2

$$\nu : s \longmapsto \nu(s) = \frac{\dot{\tau}(s)}{|\dot{\tau}(s)|},$$

appelée *vecteur normal unitaire*. Le vecteur

$$\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s)$$

est appelé *vecteur binormal*. Ici, \times désigne le produit vectoriel de deux vecteurs dans \vec{E}^3 : dans la base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$,

$$v \times w = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 w^3 - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 - v^1 w^3 \\ v^1 w^2 - v^2 w^3 \end{pmatrix}.$$

Nous définissons la *courbure* $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $k(s) = |\dot{\tau}(s)|$ et la *torsion* $\chi : I \setminus \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\chi(s) = \langle \dot{\nu}(s), \beta(s) \rangle.$$

Nous savons déjà que $\dot{\tau}(s) = k(s)\nu(s)$ sur $I \setminus \mathcal{C}$. Déterminons $\dot{\nu}(s)$.

- La relation $\langle \tau(s), \nu(s) \rangle = 0$ entraîne par dérivation $0 = \langle \dot{\tau}(s), \nu(s) \rangle + \langle \tau(s), \dot{\nu}(s) \rangle = k(s)\langle \nu(s), \nu(s) \rangle + \langle \tau(s), \dot{\nu}(s) \rangle$ et donc $\langle \dot{\nu}(s), \tau(s) \rangle = -k(s)$.
- La relation $|\nu(s)|^2 = 1$ entraîne par dérivation $0 = 2\langle \dot{\nu}(s), \nu(s) \rangle$.
- La définition de χ donne $\langle \dot{\nu}(s), \beta(s) \rangle = \chi(s)$

Nous en concluons que

$$\dot{\nu}(s) = -k(s)\tau(s) + \chi(s)\beta(s).$$

De même, nous déterminons $\dot{\beta}(s)$.

- La relation $\langle \beta(s), \tau(s) \rangle = 0$ entraîne par dérivation $0 = \langle \dot{\beta}(s), \tau(s) \rangle + \langle \beta(s), \dot{\tau}(s) \rangle = \langle \dot{\beta}(s), \tau(s) \rangle + k(s) \langle \beta(s), \nu(s) \rangle = \langle \dot{\beta}(s), \tau(s) \rangle$.
- La relation $\langle \beta(s), \nu(s) \rangle = 0$ entraîne par dérivation $0 = \langle \dot{\beta}(s), \nu(s) \rangle + \langle \beta(s), \dot{\nu}(s) \rangle = \langle \dot{\beta}(s), \nu(s) \rangle + \chi(s)$.
- La relation $|\beta(s)|^2 = 1$ entraîne par dérivation $0 = 2 \langle \dot{\beta}(s), \beta(s) \rangle$

Nous en concluons que

$$\dot{\beta}(s) = -\chi(s)\nu(s).$$

Nous pouvons condenser ces relations sous la forme suivante

$$(\dot{\tau}, \dot{\nu}, \dot{\beta})(s) = (\tau, \nu, \beta)(s) \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\chi \\ 0 & \chi & 0 \end{pmatrix} (s).$$

Remarque — La forme antisymétrique de la matrice qui intervient ici n'est pas un hasard : pour toute application $R : I \rightarrow SO(n)$ de classe \mathcal{C}^1 , on peut écrire $\dot{R}(s) = R(s).A(s)$, où A est une fonction à valeurs dans les matrices antisymétriques $n \times n$. En effet, on a $\forall s \in I, {}^tR(s).R(s) = \mathbb{1}_n$, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} {}^t\dot{R}(s) \cdot R(s) + {}^tR(s) \cdot \dot{R}(s) = 0 &\iff {}^t\left(R^{-1}(s) \cdot \dot{R}(s)\right) + R^{-1}(s) \cdot \dot{R}(s) = 0 \\ &\iff {}^tA(s) + A(s) = 0. \end{aligned}$$

Le résultat suivant illustre le sens géométrique de k et de χ .

Lemme 6 *Soit $\gamma : I \rightarrow E^3$ une immersion de classe \mathcal{C}^3 . Alors*

- si $\forall s \in I, k(s) = 0$, γ parcourt une droite de E^3 .
- si $\forall s \in I, k(s) \neq 0$ et $\chi(s) = 0$, l'image de γ est contenue dans un plan.

Preuve Si $\forall s \in I, k(s) = 0$, alors $\tau(s)$ est constant — *id est* $\tau(s) = \tau(s_0)$, où s_0 est une valeur choisie dans I — et donc $\dot{\gamma}(s) = \tau(s_0)$ entraîne que $\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)\tau(s_0)$.

Si $\forall s \in I, k(s) \neq 0$ et $\chi(s) = 0$, alors $\beta(s)$ est constant — *id est* $\beta(s) = \beta(s_0)$. Par ailleurs, $\frac{d}{ds} \langle \gamma(s), \beta(s_0) \rangle = \langle \tau(s), \beta(s_0) \rangle = \langle \tau(s), \beta(s) \rangle = 0$ et on en déduit que $\langle \gamma(s), \beta(s_0) \rangle$ est constant, donc que $\gamma(s)$ reste dans le plan d'équation $\langle x - \gamma(s_0), \beta(s_0) \rangle = 0$.
CQFD

4.6 Intégrale le long d'une courbe

4.6.1 Intégrale d'une fonction

Nous faisons l'hypothèse que E^m est un espace affine euclidien. Commençons par le cas simple d'un arc Γ décrit par une paramétrisation normale $\gamma : I \longrightarrow E^m$ (où I est un intervalle de \mathbb{R}). Pour toute fonction ϕ définie sur un voisinage de Γ dans E^m , nous pouvons définir l'intégrale de ϕ sur Γ par

$$\int_{\Gamma} \phi \, dl := \int_I \phi \circ \gamma(s) \, ds.$$

En particulier, pour $\phi = 1$, $\int_{\Gamma} dl$ est la longueur de la courbe $f(I)$.

Voyons à présent ce qui se passe dans le cas d'une paramétrisation quelconque directe $f : I \longrightarrow E^m$. On pose $\sigma(t) = \int_{t_0}^t |\dot{f}(u)| \, du$ et $I' = \sigma(I)$. On se ramène alors à une paramétrisation normale de Γ , $\gamma : I' \longrightarrow E^m$, en posant $\gamma(s) = f(\sigma^{-1}(s))$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \phi \, dl &= \int_{I'} \phi \circ \gamma(s) \, ds \\ &= \int_{I'} \phi \circ f \circ \sigma^{-1}(s) \, ds. \end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $s = \sigma(t)$, $ds = \dot{\sigma}(t) \, dt = |\dot{f}(t)| \, dt$, on a alors

$$\int_{\Gamma} \phi \, dl = \int_I \phi \circ f(t) |\dot{f}(t)| \, dt.$$

Considérons maintenant le cas d'une variété immergée (\mathcal{M}, f) (toujours de dimension 1). Soit $(U_i, x_i)_{i \in I}$ un atlas et notons $f_i := f \circ x_i^{-1} : I_i \rightarrow E^m$. Un ingrédient supplémentaire est nécessaire : construire une *partition de l'unité* associée au recouvrement $\mathcal{M} = \cup_{i \in I} U_i$. Il s'agit d'une famille $(\chi_i)_{i \in I}$ de fonctions $\chi_i \in \mathcal{C}^k(I_i, \mathbb{R})$, telle que

- $\forall i \in I$, le support de χ_i est compact et contenu dans I_i (donc en particulier χ_i s'annule sur le bord de I_i)
- $\forall i \in I, \forall t \in I_i, 0 \leq \chi_i(t) \leq 1$
- $\forall M \in \mathcal{M}, \sum_{i \in I} \chi_i \circ x_i(t) = 1$ (où l'on commet l'abus de langage de considérer $\chi_i \circ x_i$ sur tout \mathcal{M} : il suffit simplement de décider que $\chi_i \circ x_i$ — a priori défini uniquement sur U_i — est nul en dehors de U_i)

On pose alors

$$\int_{(\mathcal{M}, f)} \phi \, dl := \sum_{i \in I} \int_{I_i} \phi \circ f_i(t) \chi_i(t) |\dot{f}_i(t)| \, dt.$$

On montre facilement que cette définition ne dépend pas de la partition de l'unité et de l'atlas utilisé et coïncide avec la définition précédente dans le cas où \mathcal{M} est l'image d'un plongement d'un intervalle de \mathbb{R} .

Exercice — Construire une partition de l'unité dans le cas où \mathcal{M} est une variété connexe. On montrera d'abord que l'on peut utiliser un atlas comprenant une quantité au plus dénombrable de cartes.

4.6.2 Circulation d'un champ de vecteur

Définition 23 Soit E^m un espace affine de dimension m et \vec{E}^m l'espace vectoriel associé. Soit Ω un ouvert de E^m . Un champ de

vecteurs X sur Ω de classe \mathcal{C}^k est une application $X : \Omega \longrightarrow \vec{E}^m$ de classe \mathcal{C}^k .

Supposons à nouveau que E^m est euclidien. Soit Γ un arc immergé orienté. Soit X un champ de vecteurs défini sur un voisinage dans E^m de l'image de Γ , nous allons définir la *circulation de X le long de Γ* . Nous considérons en premier lieu le cas où Γ est décrit par est une paramétrisation normale directe γ . Alors

$$\int_{\Gamma} \langle X, \tau \rangle dl := \int_I \langle X(\gamma(s)), \tau(s) \rangle ds,$$

où $\tau(s) = \dot{\gamma}(s)$. Notons que cette définition dépend de l'orientation choisie sur Γ : si on inverse l'orientation, on change le signe de l'intégrale.

Exprimons maintenant la circulation de X le long de Γ à l'aide d'une paramétrisation quelconque directe $f : I \longrightarrow E^m$. Comme précédemment, on pose $\sigma(t) = \int_{t_0}^t |\dot{f}(u)| du$, $I' = \sigma(I)$ et $\gamma = f \circ \sigma^{-1} : I' \longrightarrow E^m$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \langle X, \tau \rangle dl &= \int_{I'} \langle X \circ \gamma(s), \tau(s) \rangle ds \\ &= \int_{I'} \left\langle X \circ f \circ \sigma^{-1}(s), \frac{\dot{f} \circ \sigma^{-1}(s)}{|\dot{f} \circ \sigma^{-1}(s)|} \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $s = \sigma(t)$, $ds = \dot{\sigma}(t) dt = |\dot{f}(t)| dt$,

$$\int_{\Gamma} \langle X, \tau \rangle dl = \int_I \langle X \circ f(t), \dot{f}(t) \rangle dt.$$

Enfin considérons le cas d'une variété immergée orientée (\mathcal{M}, f) . Utilisant une partition de l'unité $(\chi_i)_{i \in I}$ associée à l'atlas $(U_i, x_i)_{i \in I}$ comme précédemment, nous poserons

$$\int_{(\mathcal{M}, f)} \langle X, \tau \rangle dl := \sum_{i \in I} \int_{I_i} \langle X \circ f_i(t), \dot{f}_i(t) \rangle \chi_i(t) dt.$$

Et à nouveau, cette définition ne dépend pas de la partition de l'unité et de l'atlas utilisé.

Nous remarquons que, contrairement à l'intégrale d'une fonction sur une courbe, le calcul de la quantité $|\dot{f}(t)|$ n'est pas nécessaire : l'intégrale de la circulation ne dépend de \dot{f} que de façon linéaire, via le produit scalaire $\langle X \circ f(t), \dot{f}(t) \rangle$. Nous allons voir au paragraphe suivant un cadre dans lequel le produit scalaire n'est même pas nécessaire.

4.6.3 Intégrale d'une 1-forme différentielle

A présent, ce qui suit ne nécessite pas que l'espace E^m soit euclidien.

Définition 24 Soit E^m un espace affine de dimension m , \vec{E}^m l'espace vectoriel associé et \vec{E}^{m*} l'espace dual de \vec{E}^m . Soit Ω un ouvert de E^m . Une 1-forme différentielle α sur Ω de classe \mathcal{C}^k est une application $\alpha : \Omega \longrightarrow \vec{E}^{m*}$ de classe \mathcal{C}^k .

Si Γ est un arc immergé orienté et α une 1-forme différentielle définie sur un voisinage de Γ , nous pouvons définir l'intégrale de α sur Γ comme suit. Pour toute paramétrisation directe $f : \Gamma \longrightarrow E^m$ de Γ , nous posons

$$\int_{\Gamma} \alpha := \int_I \left(\alpha_{f(t)}, \dot{f}(t) \right) dt = \int_I \alpha_{f(t)} \left(\dot{f}(t) \right) dt,$$

où $\alpha_{f(t)}$ est la valeur de α au point $f(t)$ et (\cdot, \cdot) est le produit de dualité entre \vec{E}^{m*} et \vec{E}^m .

Exercice — Montrer que cette définition est indépendante de la paramétrisation f utilisée.

Dans le cas d'une variété orientée plongée (\mathcal{M}, f) , en utilisant comme précédemment une partition de l'unité, on posera

$$\int_{(\mathcal{M}, f)} \alpha := \sum_{i \in I} \int_{I_i} \left(\alpha_{f_i(t)}, \dot{f}_i(t) \right) \chi_i(t) dt = \sum_{i \in I} \int_{I_i} \alpha_{f_i(t)} \left(\dot{f}_i(t) \right) \chi_i(t) dt.$$

Utilisation de coordonnées

Rappelons qu'étant donné des coordonnées affines x^1, \dots, x^m sur E^m , tout champ de 1-forme se décompose selon

$$\alpha = \alpha_1 dx^1 + \dots + \alpha_m dx^m,$$

où chaque α_k est une fonction de Ω vers \mathbb{R} . De sorte que, pour un arc Γ par exemple,

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_{\Gamma} \alpha_1 dx^1 + \dots + \alpha_m dx^m = \int_I \sum_{k=1}^m \alpha_k(f(t)) \dot{f}^k(t) dt.$$

Chapitre 5

Surfaces

Comme précédemment, E^m est un espace affine réel de dimension m , dont l'espace vectoriel associé est \vec{E}^m .

5.1 Immersions et plongements d'un ouvert de \mathbb{R}^2

Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 , une application f de Ω vers E^m est une immersion de Ω dans E^m de classe \mathcal{C}^k si et seulement si f est une application de classe \mathcal{C}^k telle que

$$\forall t = (t^1, t^2) \in \Omega, \left(\frac{\partial f}{\partial t^1}(t), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right) \text{ est de rang } 2.$$

Si f est un homéomorphisme vers son image, f est alors un plongement et son image est une *surface plongée avec bord* ou une *sous-variété à bord* de dimension 2.

5.2 Nappes et sous-variétés immergées

La généralisation aux surfaces de ce que nous avons vu sur les arcs est immédiate. Nous construisons deux relations d'équi-

valence sur les immersions d'ouverts de \mathbb{R}^2 : si $f : \Omega \longrightarrow E^m$ et $g : \Omega' \longrightarrow E^m$ sont deux immersions d'ouverts de \mathbb{R}^2 , nous diront que

$$(\Omega, f) \mathcal{R} (\Omega', g) \iff \exists \phi : \Omega' \longrightarrow \Omega, \text{ difféomorphisme tel que } g = f \circ \phi,$$

$$(\Omega, f) \mathcal{R}^+ (\Omega', g) \iff \exists \phi : \Omega' \longrightarrow \Omega, \text{ difféomorphisme tel que } g = f \circ \phi \text{ et } \det(d\phi) > 0.$$

Toute classe d'équivalence pour la relation \mathcal{R} est appelée une *nappe immergée*, une classe d'équivalence pour \mathcal{R}^+ est une *nappe immergée orientée*. A nouveau, il est clair que chaque classe d'équivalence pour \mathcal{R} contient deux classes d'équivalence pour \mathcal{R}^+ , correspondant aux deux choix d'orientation possibles. Un représentant (Ω, f) d'une nappe \mathcal{S} est appelé une *paramétrisation de \mathcal{S}* .

Le lecteur aura reconnu que les nappes immergées ne sont que des cas particuliers des variétés immergées (\mathcal{M}, f) de dimension 2, dans le cas où la variété \mathcal{M} est diffeomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^2 . [*Exercice — pourquoi ? comment ?*] Noter à ce propos que l'ensemble des variétés de dimension 2 est beaucoup plus riche que celui des variétés de dimension 1. On sait toutefois les classifier : on ne distingue pas bien entendu ici deux variétés qui seraient diffeomorphes. Par exemple l'ensemble de toutes les surfaces sans bord se divisent en deux grandes classes aussi importantes : les surfaces orientables et les surfaces non orientables. Les surfaces orientables sont : la sphère, le tore, le tore à deux anses, etc. . . chaque forme est caractérisée par un nombre $g \in \mathbb{N}$ que l'on appelle le *genre* de la surface et qui compte le nombre d'anses. Les surfaces non orientables sont le plan projectif réel, la bouteille de Klein, la bouteille de Klein à 2 anses, etc. . . , elles aussi classées selon le genre g ,

qui est aussi le nombre d'anses. Toute surface sans bord orientable admet un plongement dans \mathbb{R}^3 , mais en revanche, les surfaces sans bord non orientables ne peuvent jamais être plongées dans \mathbb{R}^3 (il faut aller dans \mathbb{R}^4 ...), mais juste être immergées. L'immersion du plan projectif la plus simple est la surface de Boy, celle de la bouteille de Klein est représentée sur la figure 5.2. On y montre aussi le ruban de Moebius, qui est un plongement d'une surface à bord non orientable (difféomorphe à ce qui reste d'un plan projectif après ablation d'un disque).

Le ruban de Moebius est obtenu en recollant les deux extrémités d'un ruban rectangulaire allongé après l'avoir tordu d'un demi-tour.

Exercice — Donner une formule explicite pour le plongement du ruban de Moebius.

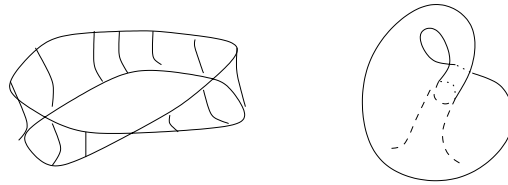


FIG. 5.1 – le ruban de Moebius (plongé) et la bouteille de Klein (immergée)

5.3 Première forme fondamentale

Nous supposons ici que E^m est euclidien. Soit $f : \Omega \longrightarrow E^m$ une immersion d'un ouvert de \mathbb{R}^2 et $c : I \longrightarrow \Omega$ une immersion d'un intervalle de \mathbb{R} dans Ω . A un « instant » $s \in I$, la longueur du vecteur $\frac{df \circ c}{ds}(s)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \left| \frac{df \circ c}{ds}(s) \right|^2 &= \left| \frac{\partial f}{\partial t^1}(c(s)) \frac{dc^1}{ds}(s) + \frac{\partial f}{\partial t^2}(c(s)) \frac{dc^2}{ds}(s) \right|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(c(s)) \dot{c}^i(s) \dot{c}^j(s), \end{aligned}$$

où

$$\begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \frac{\partial f}{\partial t^1}(t) \right|^2 & \left\langle \frac{\partial f}{\partial t^1}(t), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial t^1}(t), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right\rangle & \left| \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right|^2 \end{pmatrix}.$$

Ces coefficients g_{ij} définissent en chaque point t un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2 \simeq T_t \mathbb{R}^2$

$$g(t)(\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(t) \xi^i \xi^j$$

qui dépend de façon régulière de t . Cette forme quadratique dépendant de t est appelée la *première forme fondamentale* de l'immersion f . Ainsi, la longueur d'un segment de courbe $\int_a^b \left| \frac{df \circ c}{ds}(s) \right| ds$ peut se calculer à partir de c et en connaissant les coefficients g_{ij} de la première forme fondamentale par

$$\int_a^b \left| \frac{df \circ c}{ds}(s) \right| ds = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(c(s)) \dot{c}^i(s) \dot{c}^j(s)} ds.$$

Soit $\phi : \tilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$ un difféomorphisme et $\tilde{f} = f \circ \phi : \tilde{\Omega} \longrightarrow E^m$ une immersion équivalente à f . Alors la première forme fonda-

mentale de \tilde{f} a pour coefficients

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_{ij}(\tilde{t}) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}^i}(\tilde{t}), \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}^j}(\tilde{t}) \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{k=1}^2 \frac{\partial f}{\partial t^k}(\phi(\tilde{t})) \frac{\partial \phi^k}{\partial \tilde{t}^i}(\tilde{t}), \sum_{l=1}^2 \frac{\partial f}{\partial t^l}(\phi(\tilde{t})) \frac{\partial \phi^l}{\partial \tilde{t}^j}(\tilde{t}) \right\rangle \\
 &= \sum_{k,l=1}^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial t^k}(\phi(\tilde{t})), \frac{\partial f}{\partial t^l}(\phi(\tilde{t})) \right\rangle \frac{\partial \phi^k}{\partial \tilde{t}^i}(\tilde{t}) \frac{\partial \phi^l}{\partial \tilde{t}^j}(\tilde{t}) \\
 &= \sum_{k,l=1}^2 g_{kl}(\phi(\tilde{t})) \frac{\partial \phi^k}{\partial \tilde{t}^i}(\tilde{t}) \frac{\partial \phi^l}{\partial \tilde{t}^j}(\tilde{t}).
 \end{aligned}$$

Remarque — On écrit souvent :

$$\tilde{g}_{ij}(\tilde{t}) = g_{kl}(\phi(\tilde{t})) \frac{\partial \phi^k}{\partial \tilde{t}^i}(\tilde{t}) \frac{\partial \phi^l}{\partial \tilde{t}^j}(\tilde{t}),$$

sans faire apparaître le signe \sum . Il est cependant sous-entendu que l'on somme sur toutes les valeurs que peuvent prendre les indices k et l , car chacun de ces indices apparaît deux fois dans l'expression, une fois en position supérieure, une fois en position inférieure.

On peut se demander s'il est possible de trouver $\tilde{\Omega}$ et $\phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ tels que $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} est le symbole de Kronecker et vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$). Cela est impossible en général. En revanche, il est possible de trouver $\phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ tel que $\tilde{g}_{ij} = \lambda(\tilde{t})\delta_{ij}$, où λ est une fonction définie sur $\tilde{\Omega}$ et à valeurs dans $]0, \infty[$. Alors l'application $f \circ \phi$ est dite *conforme* et conserve les angles.

5.4 Seconde forme fondamentale

Nous supposons maintenant que $E^m = E^3$ est un espace affine euclidien de dimension 3 orienté. Soit $f : \Omega \longrightarrow E^3$ un plongement de classe \mathcal{C}^2 . Son image \mathcal{S} est alors nécessairement orientable. On peut définir pour tout $t \in \Omega$ un unique vecteur $n(t)$ dans \vec{E}^3 de norme égale à 1, orthogonal à $T_{f(t)}\mathcal{S}$ et tel que $\left(\frac{\partial f}{\partial t^1}(t), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t), n(t)\right)$ soit une base directe de \vec{E}^3 . On obtient ainsi une application $n : \Omega \longrightarrow S_{\vec{E}^3}^2$ de classe \mathcal{C}^1 , appelée *application de Gauss* (ici, $S_{\vec{E}^3}^2$ est la sphère de rayon 1 de \vec{E}^3). Il est simple d'exprimer n en fonction du produit vectoriel de $\frac{\partial f}{\partial t^1}(t)$ et de $\frac{\partial f}{\partial t^2}(t)$:

$$n(t) = \frac{\frac{\partial f}{\partial t^1}(t) \times \frac{\partial f}{\partial t^2}(t)}{\left| \frac{\partial f}{\partial t^1}(t) \times \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right|}.$$

Fixons $t \in \Omega$. Soit $c : I \longrightarrow \Omega$ une immersion d'un intervalle de \mathbb{R} contenant 0, telle que $c(0) = t$. Le vecteur accélération de $f \circ c$ en $s = 0$ est

$$\frac{d^2 f \circ c}{(ds)^2}(0) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^i \partial t^j}(c(0)) \dot{c}^i(0) \dot{c}^j(0) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial t^i}(c(0)) \ddot{c}^i(0).$$

La composante normale à la surface \mathcal{S} de ce vecteur, c'est à dire son produit scalaire avec $n(0)$ est

$$\left\langle n(0), \frac{d^2 f \circ c}{(ds)^2}(0) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t^i \partial t^j}(c(0)), n(0) \right\rangle \dot{c}^i(0) \dot{c}^j(0),$$

une quantité qui ne dépend pas de $\ddot{c}(0)$ (car $n(0)$ est orthogonal à $\frac{\partial f}{\partial t^i}(0)$ par définition). On constate que $\left\langle n(0), \frac{d^2 f \circ c}{(ds)^2}(0) \right\rangle$ est la valeur d'une forme bilinéaire symétrique

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 f}{(\partial t^1)^2}(t), n(t) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t^1 \partial t^2}(t), n(t) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t^2 \partial t^1}(t), n(t) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 f}{(\partial t^2)^2}(t), n(t) \right\rangle \end{pmatrix}$$

en $(\dot{c}(0), \dot{c}(0))$ (pour $t = 0$). Cette forme bilinéaire est appelée la *deuxième forme fondamentale* du plongement f . Remarquons qu'en dérivant la relation

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t^i}(t), n(t) \right\rangle = 0,$$

on obtient

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t^i}(t), \frac{\partial n}{\partial t^j}(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t^i \partial t^j}(t), n(t) \right\rangle = 0,$$

d'où une expression équivalente pour la seconde forme fondamentale

$$B_{ij}(t) = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial t^i}(t), \frac{\partial n}{\partial t^j}(t) \right\rangle.$$

En effectuant un changement de variable $\tilde{f} = f \circ \phi : \tilde{\Omega} \rightarrow E^3$, le calcul de l'expression de la seconde forme fondamentale \tilde{B}_{ij} de \tilde{f} en fonction de B_{ij} est le même que pour la première forme fondamentale :

$$\tilde{B}_{ij}(\tilde{t}) = B_{kl}(\phi(\tilde{t})) \frac{\partial \phi^k}{\partial \tilde{t}^i}(\tilde{t}) \frac{\partial \phi^l}{\partial \tilde{t}^j}(\tilde{t}).$$

Une conséquence de cela est que les valeurs propres (réelles) de la forme bilinéaire $B(t)$ par rapport à $g(t)$, c'est à dire les solutions de

$$\det(B_{ij}(t) - \lambda g_{ij}(t)) = 0,$$

sont indépendantes de l'immersion utilisée f , mais ne dépendent que de la surface image $\mathcal{S} = f(\Omega)$ et du point $p = f(t)$. On appelle ces valeurs propres les *courbures principales* de la surface \mathcal{S} au point p et on les notera $k_1(p) \leq k_2(p)$. La demi-somme $H(p) := \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}$ est appelée la courbure moyenne de \mathcal{S} au point p et le produit $K(p) := k_1(p)k_2(p)$ la *courbure de Gauss* de \mathcal{S} au point p . Des expressions de H et K en fonction de g et B sont

$$H(p) = \text{tr}(g(t)^{-1}B(t)) \text{ et } K(p) = \frac{\det(B(t))}{\det(g(t))},$$

où $g(t)$ et $B(t)$ sont manipulées ici comme des matrices 2×2 .

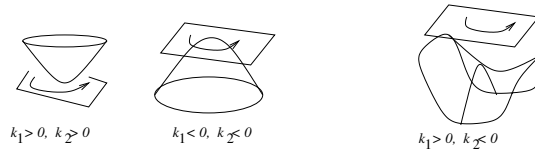


FIG. 5.2 – les courbures principales d'une surface

5.5 Repère de Darboux

Comme dans le paragraphe précédent, $E^m = E^3$ est un espace affine euclidien de dimension 3 orienté. Soit $f : \Omega \rightarrow E^3$ un plongement de classe \mathcal{C}^1 . Un repère de Darboux sur la surface $\mathcal{S} = f(\Omega)$ est la donnée en chaque point $p = f(t) \in \mathcal{S}$

d'une base orthonormée directe $(e_1(p), e_2(p))$ de $T_p\mathcal{S}$ dépendant de façon continue de p (donc de t). La construction d'un tel repère peut se faire par exemple par orthonormalisation de la base $(\frac{\partial f}{\partial t^1}(t), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t))$:

$$e_1(p) = \frac{\frac{\partial f}{\partial t^1}(t)}{\left| \frac{\partial f}{\partial t^1}(t) \right|}, \text{ et } e_2(p) = \frac{\frac{\partial f}{\partial t^2}(t) - \left\langle \frac{\partial f}{\partial t^2}(t), e_1(p) \right\rangle e_1(p)}{\left| \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) - \left\langle \frac{\partial f}{\partial t^2}(t), e_1(p) \right\rangle e_1(p) \right|}.$$

Mais tout autre choix obtenu en choisissant une fonction régulière θ sur \mathcal{S} et en posant $(\tilde{e}_1(p), \tilde{e}_2(p)) = (e_1(p)\cos\theta(p) + e_2(p)\sin\theta(p), -e_1(p)\sin\theta(p) + e_2(p)\cos\theta(p))$ convient.

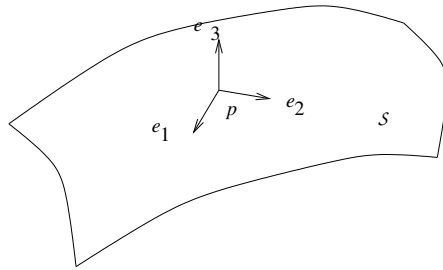


FIG. 5.3 – le repère de Darboux

A $(e_1(p), e_2(p))$, nous pouvons associer sa base duale (α_p^1, α_p^2) , qui est ainsi une base de $T_p^*\mathcal{S}$, l'espace dual de $T_p\mathcal{S}$. On peut aussi considérer $(f^*\alpha^1)_t := \alpha_{f(t)}^1 \circ df_t$, $(f^*\alpha^2)_t := \alpha_{f(t)}^2 \circ df_t$, qui constitue une base de $(\mathbb{R}^2)^*$, l'espace dual de \mathbb{R}^2 . $f^*\alpha^1$ et $f^*\alpha^2$ sont des 1-formes sur Ω , c'est à dire des fonctions définies sur Ω et à valeurs dans $(\mathbb{R}^2)^*$.

Exercice — (pour voir si vous avez bien compris) montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, df_t(\xi) = (f^*\alpha^1)_t(\xi)e_1(p) + (f^*\alpha^2)_t(\xi)e_2(p).$$

Nous pouvons compléter $(e_1(p), e_2(p))$ en une base orthonormée directe $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$ de \vec{E}^3 en posant $e_3(p) = e_1(p) \times e_2(p) = n(p)$. Chaque e_a est une application de \mathcal{S} vers \vec{E}^3 de classe \mathcal{C}^1 et la différentielle de e_a en p , $de_{a,p}$ est une application linéaire de $T_p\mathcal{S}$ dans \vec{E}^3 . Comme pour le repère de Frenet, nous considérons les composantes de $de_{a,p}$ dans la base $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$: pour tout $\xi \in T_p\mathcal{S}$, il existe des réels $\omega_{b,p}^a(\xi)$ (où $1 \leq a, b \leq 3$) tels que

$$de_{a,p}(\xi) = \sum_{b=1}^3 \omega_{a,p}^b(\xi)e_b(p).$$

Comme l'application $\xi \mapsto de_{a,p}(\xi)$ est linéaire, il est nécessaire que les applications $\xi \mapsto \omega_{a,p}^b(\xi)$ soient également linéaires, *id est* $\omega_{a,p}^b \in T_p^*\mathcal{S}$. Ainsi nous pouvons écrire $de_{a,p}$ comme une « combinaison linéaire » de vecteurs $e_b(p)$ avec des coefficients qui sont des formes linéaires : $de_{a,p} = \sum_{b=1}^3 \omega_{a,p}^b e_b(p)$. (Cette écriture, qui correspond à décomposer une matrice carrée en une somme de produit de matrices *colonne* \times *ligne*, est un produit tensoriel.)

En vertu du lemme 2 du chapitre précédent, on doit avoir

$$\forall \xi \in T_p\mathcal{S}, \forall 1 \leq a, b \leq 3, \omega_{a,p}^b(\xi) + \omega_{b,p}^a(\xi) = 0,$$

soit $\omega_{a,p}^b + \omega_{b,p}^a = 0$. De plus, chacune des formes $\omega_{a,p}^b$ dépend de façon continue de $p \in \mathcal{S}$. Il suffit pour vérifier cela de remarquer que $\omega_{a,p}^b(\xi) = \langle de_{a,p}(\xi), e_b(p) \rangle$. Nous noterons $(f^*\omega_a^b)_t := \omega_{a,f(t)}^b \circ df_t$.

Décomposition de $\omega_{1,p}^3$ et $\omega_{2,p}^3$

Comme (α_p^1, α_p^2) est une base de $T_p^* \mathcal{S}$, il existe des coefficients $h_{11}(p)$, $h_{12}(p)$, $h_{21}(p)$ et $h_{22}(p)$ tels que

$$\begin{cases} \omega_{1,p}^3 &= h_{11}(p)\alpha_p^1 + h_{12}(p)\alpha_p^2 \\ \omega_{2,p}^3 &= h_{21}(p)\alpha_p^1 + h_{22}(p)\alpha_p^2. \end{cases} \quad (5.1)$$

Les coefficients h_{ij} sont alors des fonctions continues sur \mathcal{S} .

Retrouvons les première et deuxième formes fondamentales

Nous allons calculer $g_{ij}(t)$ à partir de l'identité $df_t = (f^*\alpha^1)_t e_1(p) + (f^*\alpha^2)_t e_2(p)$. Afin d'alléger les notations, nous ferons les abus de notation $(f^*\alpha^a)_t \simeq (f^*\alpha^a) = (f^*\alpha^a)_1 dt^1 + (f^*\alpha^a)_2 dt^2$.

$$\begin{aligned} g_{ij}(t) &= \langle e_1 (f^*\alpha^1)_i + e_2 (f^*\alpha^2)_i, e_1 (f^*\alpha^1)_j + e_2 (f^*\alpha^2)_j \rangle \\ &= (f^*\alpha^1)_i (f^*\alpha^1)_j + (f^*\alpha^2)_i (f^*\alpha^2)_j. \end{aligned}$$

Notons

$$A(t) = \begin{pmatrix} (f^*\alpha^1)_1 & (f^*\alpha^1)_2 \\ (f^*\alpha^2)_1 & (f^*\alpha^2)_2 \end{pmatrix}$$

(c'est la matrice de l'application linéaire df_t lorsque l'on utilise la base canonique sur \mathbb{R}^2 et la base $(e_1(p), e_2(p))$ sur $T_{f(t)} \mathcal{S}$). Nous avons alors

$$g(t) = (g_{ij}(t)) = {}^t A(t) A(t).$$

De même, nous déduisons de (5.1) l'identité

$$\begin{aligned} (f^*dn)_t = (f^*de_3)_t &\simeq f^*\omega_3^1 e_1(p) + f^*\omega_3^2 e_2(p) \\ &= -(h_{11}(p)f^*\alpha^1 + h_{12}(p)f^*\alpha^2)e_1(p) \\ &\quad - (h_{21}(p)f^*\alpha^1 + h_{22}(p)f^*\alpha^2)e_2(p). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} B_{ij}(t) &= - \left\langle \frac{\partial f}{\partial t^i}(t), \frac{\partial n \circ f}{\partial t^j}(t) \right\rangle \\ &= \sum_{a,b=1}^2 h_{ab}(p) (f^* \alpha^a)_i (f^* \alpha^b)_j, \end{aligned}$$

soit

$$B(t) = (B_{ij}(t)) = {}^t A(t) h(p) A(t),$$

où

$$h(p) = \begin{pmatrix} h_{11}(p) & h_{12}(p) \\ h_{21}(p) & h_{22}(p) \end{pmatrix}.$$

Nous en concluons que

- la matrice $h(p)$ est symétrique, c'est à dire $h_{12}(p) = h_{21}(p)$
- les deux courbures principales de \mathcal{S} en $f(t)$, c'est à dire les valeurs propres de $B_{ij}(t)$ par rapport à $g_{ij}(t)$ sont les valeurs propres de la matrice $h(p)$.

5.6 Intégrales sur les surfaces

Supposons pour commencer que E^m est euclidien. Soit \mathcal{S} une nappe immergée et $f : \Omega \longrightarrow E^m$ une paramétrisation de \mathcal{S} . Si ψ une application définie sur un voisinage U de $f(\Omega)$ dans E^m à valeurs réelles, nous posons

$$\int_{\mathcal{S}} \psi \, d\sigma := \int_{\Omega} \psi \circ f(t) \left| \frac{\partial f}{\partial t^1}(t) \times \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right| dt^1 dt^2,$$

où dans des coordonnées euclidiennes,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t^1}(t) \times \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right| = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} \left(\frac{\partial f^i}{\partial t^1}(t) \frac{\partial f^j}{\partial t^2}(t) - \frac{\partial f^i}{\partial t^2}(t) \frac{\partial f^j}{\partial t^1}(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A titre d'exercice, il est intéressant de vérifier que si on utilise une autre paramétrisation $\tilde{f} = f \circ \phi$ (où $\phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ est un difféomorphisme), alors

$$\int_{\tilde{\Omega}} \psi \circ \tilde{f}(\tilde{t}) \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}^1}(\tilde{t}) \times \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}) \right| d\tilde{t}^1 d\tilde{t}^2$$

coïncide avec la valeur donnée plus haut.

Cette définition s'étend aux variétés immergées (\mathcal{M}, f) de dimension 2, à condition de disposer d'une partition de l'unité, associée à un atlas $(U_i, x_i)_{i \in I}$ de \mathcal{M} . Dans notre contexte, il s'agit d'une famille $(\chi_i)_{i \in I}$ de fonctions $\chi_i \in \mathcal{C}^k(\Omega_i, \mathbb{R})$ (où $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ est l'image de x_i) telle que

- $\forall i \in I$, le support de χ_i est compact et contenu dans Ω_i (donc en particulier χ_i s'annule sur le bord de Ω_i)
- $\forall i \in I, \forall t \in \Omega_i, 0 \leq \chi_i(t) \leq 1$
- $\forall M \in \mathcal{M}, \sum_{i \in I} \chi_i \circ x_i(M) = 1$

On pose alors, notant $f_i := f \circ x_i^{-1}$,

$$\int_{(\mathcal{M}, f)} \psi d\sigma := \sum_{i \in I} \int_{\Omega_i} \psi \circ f_i(t) \chi_i(t) \left| \frac{\partial f_i}{\partial t^1}(t) \times \frac{\partial f_i}{\partial t^2}(t) \right| dt^1 dt^2.$$

5.6.1 Flux d'un champ de vecteur

Nous nous restreignons ici au cas où $E^m = E^3$ est de dimension 3. Soit \mathcal{S} une nappe immergée *orientée* et soit $X \in \mathcal{C}^0(U, \vec{E}^3)$ un

champ de vecteur défini sur un voisinage U de l'image de \mathcal{S} dans E^3 . Le flux de X à travers la surface \mathcal{S} est

$$\int_{\mathcal{S}} \langle X, n \rangle d\sigma := \int_{\Omega} \langle X \circ f(t), n(t) \rangle \left| \frac{\partial f}{\partial t^1}(t) \times \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right| dt^1 dt^2,$$

où $n(t)$ est le vecteur de Gauss — vecteur normal orienté à la nappe au point $f(t)$. Cette expression se simplifie lorsque l'on remplace $n(t)$ en fonction de f :

$$\int_{\mathcal{S}} \langle X, n \rangle d\sigma = \int_{\Omega} \left\langle X \circ f(t), \frac{\partial f}{\partial t^1}(t) \times \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right\rangle dt^1 dt^2.$$

Là encore, on peut vérifier que, par un changement de variable $\tilde{f} = f \circ \phi$, on obtient une expression similaire pour $\int_{\mathcal{S}} \langle X, n \rangle d\sigma$ en fonction de \tilde{f} . Cela prouve que cette intégrale ne dépend que de la nappe orientée et du champ de vecteur et non de la paramétrisation.

Pour une variété orientée immergée (\mathcal{M}, f) , si X est défini sur un voisinage de $f(\mathcal{M})$, le flux de X à travers (\mathcal{M}, f) est :

$$\int_{\mathcal{S}} \langle X, n \rangle d\sigma := \sum_{i \in I} \int_{\Omega_i} \left\langle X \circ f_i(t), \frac{\partial f_i}{\partial t^1}(t) \times \frac{\partial f_i}{\partial t^2}(t) \right\rangle \chi_i(t) dt^1 dt^2.$$

5.6.2 Intégrale d'une 2-forme différentielle

Nous pouvons généraliser ce qui précède à des surfaces plongées dans des espaces de dimension arbitraire, sans avoir besoin d'un produit scalaire sur \vec{E}^m .

Définition 25 Soit V un espace vectoriel réel. Une forme bilinéaire antisymétrique ou 2-forme sur V est une application

$$\begin{aligned} \alpha : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \eta) &\longmapsto \alpha(\xi, \eta), \end{aligned}$$

telle que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \xi, \xi', \eta \in V, \alpha(\lambda\xi + \mu\xi', \eta) = \lambda\alpha(\xi, \eta) + \mu\alpha(\xi', \eta)$ et $\alpha(\xi, \eta) + \alpha(\eta, \xi) = 0$. On note $\Lambda^2 V^*$ l'espace vectoriel des 2-formes sur V .

Un champ de 2-formes sur un ouvert $U \subset E^m$ est une application de U vers $\Lambda^2 \vec{E}^{m*}$ et est appelé 2-forme différentielle sur U . Un exemple de 2-forme différentielle est obtenu comme suit : supposons que E^3 soit un espace affine euclidien orienté de dimension 3 et soit $X \in \mathcal{C}^0(U, \vec{E}^m)$ un champ de vecteurs, alors, nous pouvons définir $\alpha \in \mathcal{C}^0(U, \Lambda^2 \vec{E}^{m*})$ par $\forall \xi, \eta \in V, \alpha_x(\xi, \eta) = \langle X(x), \xi \times \eta \rangle$.

Enfin, si $f : \Omega \longrightarrow E^m$ est la paramétrisation d'une nappe immergée \mathcal{S} , si U est un voisinage de $f(\Omega)$ dans E^m et $\alpha \in \mathcal{C}^0(U, \Lambda^2 \vec{E}^{m*})$, il s'avère que l'intégrale

$$\int_{\Omega} \alpha_{f(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t^1}(t), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right) dt^1 dt^2$$

est une expression dont la valeur ne change pas si on change la paramétrisation de \mathcal{S} , à condition de garder la même orientation. En effet, soit $\phi : \tilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$ un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^2 qui préserve l'orientation — id est $\det d\phi > 0$ — et soit $\tilde{f} = f \circ \phi$. Alors en utilisant le fait que α est bilinéaire et antisymétrique, on obtient, en posant $t = \phi(\tilde{t})$

$$\int_{\tilde{\Omega}} \alpha_{\tilde{f}(\tilde{t})} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}^1}(\tilde{t}), \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}) \right) d\tilde{t}^1 d\tilde{t}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\tilde{\Omega}} \alpha_{f(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t^1}(t) \frac{\partial \phi^1}{\partial \tilde{t}^1}(\tilde{t}) + \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \frac{\partial \phi^2}{\partial \tilde{t}^1}(\tilde{t}), \frac{\partial f}{\partial t^1}(t) \frac{\partial \phi^1}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}) + \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \frac{\partial \phi^2}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}) \right) d\tilde{t}^1 d\tilde{t}^2 \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \alpha_{f(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t^1}(t), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right) \left(\frac{\partial \phi^1}{\partial \tilde{t}^1}(\tilde{t}) \frac{\partial \phi^2}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}) - \frac{\partial \phi^1}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}) \frac{\partial \phi^2}{\partial \tilde{t}^1}(\tilde{t}) \right) d\tilde{t}^1 d\tilde{t}^2
\end{aligned}$$

et en effectuant le changement de variable $t = \phi(\tilde{t})$,

$$\int_{\tilde{\Omega}} \alpha_{f(\tilde{t})} \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{t}^1}(\tilde{t}), \frac{\partial f}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{t}) \right) d\tilde{t}^1 d\tilde{t}^2 = \int_{\Omega} \alpha_{f(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t^1}(t), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right) dt^1 dt^2.$$

Nous en déduisons que cette intégrale ne dépend que de \mathcal{S}^+ , la classe d'équivalence de f modulo \mathcal{R}^+ — c'est à dire de la nappe immergée *orientée*. Nous pouvons donc définir

$$\int_{\mathcal{S}^+} \alpha := \int_{\Omega} \alpha_{f(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t^1}(t), \frac{\partial f}{\partial t^2}(t) \right) dt^1 dt^2.$$

De même, nous définissons l'intégrale de α sur une variété immergée orientée de dimension deux (\mathcal{M}, f) à l'aide d'une partition de l'unité comme suit :

$$\int_{(\mathcal{M}, f)} \alpha := \sum_{i \in I} \int_{\Omega_i} \alpha_{f_i(t)} \left(\frac{\partial f_i}{\partial t^1}(t), \frac{\partial f_i}{\partial t^2}(t) \right) \chi_i(t) dt^1 dt^2.$$

On peut vérifier que la valeur de cette expression ne dépend pas de l'atlas et de la partition de l'unité utilisée.

Chapitre 6

Formes différentielles

Nous avons rencontré précédemment, à propos des intégrales sur des courbes ou des surfaces, des 1-formes et des 2-formes. Dans ce chapitre, nous développons d'avantage ces notions.

6.1 Algèbre extérieure

Définition 26 Soit V un espace vectoriel de dimension finie m et V^* son dual. Pour $p \in \mathbb{N}$, on appelle p -forme linéaire sur V toute application de $V \times \cdots \times V$ dans \mathbb{R} p -multilinéaire et alternée. On note $\Lambda^p V^*$ l'ensemble des p -formes linéaires sur V . Si $p = 0$, on convient que $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$.

Soit $\alpha \in \Lambda^p V^*$. Le fait que α soit p -multilinéaire signifie que $\forall (v_1, \dots, v_p) \in V^p, \forall w \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq p,$

$$\alpha(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu w, \dots, v_p) = \lambda \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_p) + \mu \alpha(v_1, \dots, w, \dots, v_p).$$

Et le fait que α soit alternée signifie que $\forall (v_1, \dots, v_p) \in V^p, \forall 1 \leq i < j \leq p,$

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p).$$

Exemples

a) Par définition, $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$.

b) $\Lambda^1 V^* = V^*$.

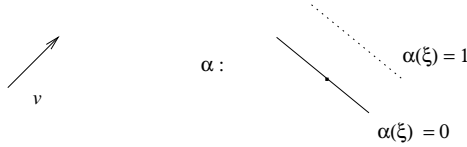


FIG. 6.1 – Représentations symboliques d'un vecteur $v \in V$ et d'une 1-forme $\alpha \in V^*$.

c) $\Lambda^2 V^*$ est l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques sur V (que nous avons déjà rencontré). Soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ une base de V et $(\theta^1, \dots, \theta^m)$ sa base duale sur V^* . Pour toute 2-forme $\alpha \in \Lambda^2 V^*$, notant $\alpha_{ij} = \alpha(\epsilon_i, \epsilon_j)$, on a $\forall \xi, \eta \in V^2$,

$$\begin{aligned} \alpha(\xi, \eta) &= \alpha(\xi^1 \epsilon_1 + \dots + \xi^m \epsilon_m, \eta^1 \epsilon_1 + \dots + \eta^m \epsilon_m) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij} \xi^i \eta^j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_{ij} (\xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_{ij} (\theta^i(\xi) \theta^j(\eta) - \theta^j(\xi) \theta^i(\eta)), \end{aligned}$$

car $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$.

d) Pour toute m -forme $\alpha \in \Lambda^m V^*$, on a : $\forall (v_1, \dots, v_m) \in V^m$, si $v_j = \sum_{k=1}^m v_j^k \epsilon_k$,

$$\alpha(v_1, \dots, v_m) = \lambda \det(v_j^k),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) Si $p > m$, $\Lambda^p V^* = \{0\}$.

Produit extérieur

On définit sur V^* une loi de composition — non interne — appelée *produit extérieur* par

$$\begin{aligned} V^* \times V^* &\longrightarrow \Lambda^2 V^* \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta, \end{aligned}$$

où $\forall \xi, \eta \in V$, $\alpha \wedge \beta(\xi, \eta) = \alpha(\xi)\beta(\eta) - \alpha(\eta)\beta(\xi)$.

Ainsi, revenant à la description d'une 2-forme présentée au c) dans la suite d'exemples précédents, toute 2-forme $\alpha \in \Lambda^2 V^*$ peut se noter

$$\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_{ij} \theta^i \wedge \theta^j,$$

où $\alpha_{ij} = \alpha(\epsilon_i, \epsilon_j)$. La famille $(\theta^i \wedge \theta^j)_{1 \leq i < j \leq m}$ constitue ainsi une base de $\Lambda^2 V^*$.

Cette loi de composition s'étend à toutes les p -formes linéaires. Par exemple, dans le cas où $\dim V = 2$, nous notons

$$\Lambda^* V^* = \Lambda^0 V^* \oplus \Lambda^1 V^* \oplus \Lambda^2 V^*$$

et nous définissons le produit extérieur dans $\Lambda^* V^*$ comme étant une loi de composition interne \wedge telle que $(\Lambda^* V^*, +, \wedge)$ soit une algèbre (en particulier associative) et telle que, dans une base (θ^1, θ^2) de V^* , $1 \wedge \theta^i = \theta^i \wedge 1 = \theta^i$ et $\theta^i \wedge \theta^j + \theta^j \wedge \theta^i = 0$. De façon plus explicite,

$$\begin{aligned}\Lambda^*V^* \times \Lambda^*V^* &\longrightarrow \Lambda^*V^* \\ (A, B) &\longmapsto A \wedge B,\end{aligned}$$

avec si $A = \alpha + \alpha_1\theta^1 + \alpha_2\theta^2 + \alpha_{12}\theta^1 \wedge \theta^2$ et $B = \beta + \beta_1\theta^1 + \beta_2\theta^2 + \beta_{12}\theta^1 \wedge \theta^2$,

$$A \wedge B = \alpha\beta + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)\theta^1 + (\alpha\beta_2 + \alpha_2\beta)\theta^2 + (\alpha\beta_{12} + \alpha_{12}\beta + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\theta^1 \wedge \theta^2.$$

Exercice — Vérifier que le produit extérieur \wedge est associatif.

Cela se généralise au cas où V est de dimension m quelconque. Alors, on note $\Lambda^*V^* = \Lambda^0V^* \oplus \Lambda^1V^* \oplus \dots \oplus \Lambda^mV^*$ et on démontre qu'il existe une unique application bilinéaire

$$\begin{aligned}\wedge : \Lambda^*V^* \times \Lambda^*V^* &\longrightarrow \Lambda^*V^* \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta,\end{aligned}$$

appelée *produit extérieur* telle que

- Si $\alpha \in \Lambda^0V^* = \mathbb{R}$, $\beta \in \Lambda^*V^*$, $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$.
- Si $\alpha \in \Lambda^1V^* = V^*$, $\beta \in \Lambda^pV^*$,
 $\alpha \wedge \beta(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \alpha(\xi_i) \beta(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_p)$
- \wedge est associative.

Alors $(\Lambda^*V^*, +, \wedge)$ est une algèbre, appelée *algèbre extérieure*. Noter que si $(\alpha, \beta) \in \Lambda^pV^* \times \Lambda^qV^*$, $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \in \Lambda^{p+q}V^*$.

6.2 Formes différentielles

Définition 27 Soit E^m un espace affine et \vec{E}^m l'espace vectoriel associé. Soit Ω un ouvert de E^m . Une p -forme différentielle sur Ω est une application $\alpha \in \mathcal{C}^0(\Omega, \Lambda^p\vec{E}^{m*})$.

Exemples

- a) Une 0-forme sur Ω est juste une fonction dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$.
 b) Nous avons rencontré dans les deux chapitres précédents des 1-formes et des 2-formes.

La différentielle extérieure

Nous choisissons une origine $O \in E^m$ et une base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ de \vec{E}^m et nous utiliserons un système de coordonnées affines $(x^1, \dots, x^m) : E^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ défini par $p = O + x^1(p)\epsilon_1 + \dots + x^m(p)\epsilon_m$. Leurs différentielles dx^1, \dots, dx^m forment alors une base de \vec{E}^{m*} .

Nous allons définir un opérateur de dérivation d , appelé *différentielle extérieure* sur $\mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^* \vec{E}^{m*})$. Il envoie $\mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^p \vec{E}^{m*})$ sur $\mathcal{C}^0(\Omega, \Lambda^{p+1} \vec{E}^{m*})$ et est défini par les deux règles suivantes

$$(i) \forall f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^0 \vec{E}^{m*}) = \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}),$$

$$df_x = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(x) dx^\alpha \quad (6.1)$$

$$(ii) \forall \alpha \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^p \vec{E}^{m*}), \text{ si}$$

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

alors

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} (d\alpha_{i_1 \dots i_p})_x \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (6.2)$$

où, en vertu de (6.1), $(d\alpha_{i_1 \dots i_p})_x = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^\alpha}(x) dx^\alpha$.

Définition 28 Une p -forme $\alpha \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^p \vec{E}^{m*})$ est dite fermée si et seulement si $d\alpha = 0$.

Exemples

– Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^0 \vec{E}^{m*}) = \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\forall x \in \Omega$,

$$df_x = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x)dx^m \in \vec{E}^{m*}$$

est la différentielle de f en x . Dans le cas où E^m est euclidien, pour tout $x \in \Omega$, il existe un unique vecteur $\nabla f(x) \in \vec{E}^m$ tel que

$$\forall v \in \vec{E}^m, df_x(v) = \langle \nabla f(x), v \rangle,$$

$\nabla f(x)$ est le gradient de f en x . Si la base utilisée est orthonormée, ses coordonnées dans cette base sont $(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x))$.

– Si $\alpha = \alpha_1 dx^1 + \dots + \alpha_m dx^m \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^1 \vec{E}^{m*})$,

$$\begin{aligned} (d\alpha)_x &= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^m} dx^m \right) \wedge dx^1 + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{\partial \alpha_m}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial \alpha_m}{\partial x^m} dx^m \right) \wedge dx^m \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} \left(\frac{\partial \alpha_{i_2}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial \alpha_{i_1}}{\partial x^{i_2}} \right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \in \Lambda^2 \vec{E}^{m*}, \end{aligned}$$

en vertu de l'antisymétrie du produit extérieur.

– Si $\alpha = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \alpha^i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^m \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^{m-1} \vec{E}^{m*})$,

$$(d\alpha)_x = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^i}(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

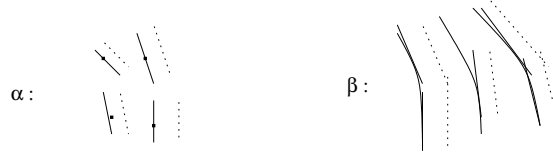


FIG. 6.2 – Représentations symboliques d’une 1-forme non fermée α et d’une 1-forme fermée β .

– Si $\alpha \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^m \vec{E}^{m*})$, $d\alpha = 0$.

Exercice — Dans le cas où $m = 3$ et où E^3 est euclidien et orienté, on peut associer à tout $\alpha \in \Lambda^1 \vec{E}^{3*}$ un unique vecteur V tel que $\forall \xi \in \vec{E}^3$, $\alpha(\xi) = \langle V, \xi \rangle$. A tout $\alpha \in \Lambda^2 \vec{E}^{3*}$, on peut associer un unique vecteur W tel que $\forall \xi, \eta \in \vec{E}^3$, $\alpha(\xi, \eta) = \det(W, \xi, \eta)$ et enfin à tout $\alpha \in \Lambda^3 \vec{E}^{3*}$, on peut associer un unique scalaire λ tel que $\forall \xi, \eta, \zeta \in \vec{E}^3$, $\alpha(\xi, \eta, \zeta) = \lambda \det(\xi, \eta, \zeta)$. Montrer qu’alors on peut identifier

- $d : \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^0 \vec{E}^{3*}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\Omega, \Lambda^1 \vec{E}^{3*})$ avec l’opérateur gradient d’une fonction scalaire
- $d : \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^1 \vec{E}^{3*}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\Omega, \Lambda^2 \vec{E}^{3*})$ avec l’opérateur rotationnel d’un champ de vecteurs
- $d : \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^2 \vec{E}^{3*}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\Omega, \Lambda^3 \vec{E}^{3*})$ avec l’opérateur divergence d’un champ de vecteurs.

Exercice — Démontrer que d est une *antidérivation*, c’est à dire que $\forall \alpha \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^p \vec{E}^{m*})$, $\forall \beta \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^q \vec{E}^{m*})$, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.

Lemme 7 On a $d^2 = 0$. Autrement dit, pour toute forme différentielle $\alpha \in \mathcal{C}^2(\Omega, \Lambda^p \vec{E}^{m*})$,

$$d(d\alpha) = 0.$$

Preuve Commençons par le cas où $p = 0$. Il s'agit alors de montrer que $\forall f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \Lambda^0 \vec{E}^{m*}) = \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$,

$$df_x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) dx^j$$

entraîne

$$\begin{aligned} d(df)_x &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \right) dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq m} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \right) \right) dx^i \wedge dx^j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans le cas des formes de degré $p \geq 1$, on commence par remarquer que, à cause de la linéarité de l'opérateur d , il suffit de vérifier le résultat pour $\alpha \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^p \vec{E}^{3*})$ de la forme

$$\alpha_x = f(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} =: f(x) dx^I,$$

où $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Cela provient du fait que d est une antidérivation (voir exercice précédent) et que, par conséquent, $d\alpha = df \wedge dx^I$ entraîne $d(d\alpha) = d(df) \wedge dx^I - df \wedge d(dx^I) = 0$.

Exercice — Démontrer, à l'aide du lemme précédent que, pour un champ de vecteur V dans $\mathcal{C}^2(\Omega, \vec{E}^3)$,

$$\vec{\text{rot}}(\nabla V) = 0 \text{ et } \text{div}(\vec{\text{rot}}V) = 0.$$

Lemme 8 (*Lemme de Poincaré*) Soit Ω un ouvert convexe de E^m et $p \geq 1$. Alors pour tout $\alpha \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^p \vec{E}^{m*})$, tel que $d\alpha = 0$, il existe $\beta \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^{p-1} \vec{E}^{m*})$ tel que $\alpha = d\beta$.

Preuve Nous ne démontrerons ce résultat que dans les cas où $m = 1$ avec Ω intervalle connexe et où $m = 2$, avec $x(\Omega) = B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1\}$. Dans le cas où $m = 1$, il s'agit de montrer que pour tout $\alpha = \alpha(x)dx \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^1 \vec{E}^{1*})$, il existe $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^0 \vec{E}^{1*})$ tel que $df = \alpha$. Cela revient donc à trouver une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $f'(x) = \alpha(x)$, résultat obtenu par intégration. Alors f est de classe \mathcal{C}^2 et est unique à l'addition d'une constante près.

Dans le cas où $m = 2$, deux sous-cas se présentent. Si $\alpha = \alpha_1(x)dx^1 + \alpha_2(x)dx^2 \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^1 \vec{E}^{2*})$, la condition $d\alpha = 0$ équivaut à l'identité $\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1}(x) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2}(x) = 0$. Soit f — a priori dans $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ — défini par

$$f(x^1, x^2) = \int_0^{x^1} \alpha_1(t, 0)dt + \int_0^{x^2} \alpha_2(x^1, s)ds.$$

D'une part, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, x^2) = \alpha_2(x^1, x^2)$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, x^2) &= \alpha_1(x^1, 0) + \int_0^{x^2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1}(x^1, s)ds \\ &= \alpha_1(x^1, 0) + \int_0^{x^2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2}(x^1, s)ds \\ &= \alpha_1(x^1, 0) + \alpha_1(x^1, x^2) - \alpha_1(x^1, 0) \\ &= \alpha_1(x^1, x^2). \end{aligned}$$

Donc $df = \alpha$. A posteriori, les dérivées partielles de f étant dans $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, f est de classe \mathcal{C}^2 . De plus, f est unique à l'addition d'une constante près.

Pour tout $\alpha = \alpha_{12}(x)dx^1 \wedge dx^2 \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^2 \vec{E}^{2*})$, on peut obtenir $\beta \in \mathcal{C}^1(\Omega, \Lambda^1 \vec{E}^{2*})$ tel que $d\beta = \alpha$ en choisissant par exemple $\beta = \beta_2(x)dx^2$ avec

$$\beta_2(x) = \int_0^{x^1} \alpha_{12}(t, x^2) dt.$$

Alors β n'est pas de classe \mathcal{C}^2 en général et n'est pas unique, même modulo l'addition d'une constante.

Remarque — La preuve générale peut s'obtenir par récurrence sur m .

Les équations de Maxwell

Ces équations gouvernent le comportement des champs électrique et magnétique, en présence de charges électriques distribuées dans l'espace, en fonction du temps. Soit \vec{E} le champ électrique et \vec{B} le champ magnétique. A première vue, \vec{E} et \vec{B} ressemblent à des champs de vecteurs (à valeurs dans \mathbb{R}^3) définis sur l'espace-temps $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, qui sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho, \end{array} \right.$$

où $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est la densité de charge électrique par unité de volume, $\vec{j} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le vecteur densité de courant électrique et c est la vitesse de la lumière.

En fait il est plus naturel de considérer \vec{E} et \vec{B} comme les composantes d'une paire de 2-formes sur l'espace-temps $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, tandis que \vec{j} et ρ sont les composantes d'une 3-forme sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Les 2-formes sont :

$$F := (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge c dt + (B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2),$$

et

$$\star F := -(B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3) \wedge c dt + (E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2).$$

La 3-forme est :

$$J := \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - (j_1 dx^2 \wedge dx^3 + j_2 dx^3 \wedge dx^1 + j_3 dx^1 \wedge dx^2) \wedge dt.$$

Exercice — 1) Vérifier que le premier système des équations de Maxwell est équivalent à la relation $dF = 0$ et que le second système est équivalent à $d(\star F) = 4\pi J$.

2) Appliquer le lemme de Poincaré et en déduire qu'il existe une 1-forme A sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, telle que $F = dA$. Faites appel à vos souvenirs des physique et interprétez.

3) Appliquer le lemme 7 et trouver une équation que doivent satisfaire ρ et \vec{j} . Interpréter.

Ecrire les équations de Maxwell sous la forme $dF = 0$ et $d(\star F) = 4\pi J$ est non seulement plus concis, mais en plus, cela suggère comment l'expression des coordonnées du champ électromagnétique change lorsque l'on passe d'un référentiel inertiel à un autre (par exemple, \vec{E} et \vec{B} ne changent pas du tout comme change le vecteur vitesse d'une particule, ce qui invalide définitivement la croyance selon laquelle \vec{E} et \vec{B} devraient être des « vecteurs »). Les

transformations des coordonnées de \vec{E} et \vec{B} sont en fait obtenues en appliquant les règles décrites au prochain sous-chapitre (ces règles permettent même de prédire quelles sont les coordonnées du champ électromagnétique dans un système de coordonnées complètement arbitraire). L'identification de ces règles de transformation est importante : il y a plus d'un siècle, Lorentz et Poincaré ont déterminé — parmi tous les changements de coordonnées — ceux dans lesquels l'expression des équations de Maxwell n'est pas altérée ¹. La grande surprise a été de découvrir que les équations de Maxwell étaient invariantes sous l'action d'un groupe appelé maintenant *groupe de Poincaré*, qui est différent du groupe d'invariance des équations de la mécanique de Newton (le *groupe de Galilée*). De cette contradiction (et aussi sur la base d'expériences sur la vitesse de la lumière) est née la théorie de la relativité restreinte, mécanique invariante sous l'action du groupe de Poincaré.

6.3 Image inverse d'une p -forme par une application différentiable (« pull-back »)

Définition 29 Soit $\Omega_1 \subset E_1^{m_1}$ et $\Omega_2 \subset E_2^{m_2}$ deux ouverts d'espaces affines. Soit $\phi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ une application de classe \mathcal{C}^1 et soit $\alpha \in \mathcal{C}^0(\Omega_2, \Lambda^p \vec{E}_2^{m_2^*})$ une p -forme différentielle sur Ω_2 . On note $\phi^* \alpha$ et on appelle image inverse de α par ϕ (ou pull-back de α par ϕ) la p -forme dans $\mathcal{C}^0(\Omega_1, \Lambda^p \vec{E}_1^{m_1^*})$ définie par $\forall v_1, \dots, v_p \in \vec{E}_1^{m_1}, \forall x \in \Omega_1$,

$$(\phi^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_p) = \alpha_{\phi(x)}(d\phi_x(v_1), \dots, d\phi_x(v_p)).$$

¹on peut dire ici que la forme des équations de Maxwell n'est pas altérée si et seulement si l'opérateur linéaire qui permet de passer de F à $\star F$ est toujours le même

Exemples

a) Si $\alpha \in \mathcal{C}^0(\Omega_2, \Lambda^0 \vec{E}_2^{m_2^*}) = \mathcal{C}^0(\Omega_2, \mathbb{R})$, $\phi^* \alpha = \alpha \circ \phi$.

b) Si $\alpha = \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_j(y) dy^j \in \mathcal{C}^0(\Omega_2, \Lambda^1 \vec{E}_2^{m_2^*})$,

$$(\phi^* \alpha)_x = \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_j \circ \phi(x) \left(\sum_{i=1}^{m_1} \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} dx^i \right) = \sum_{i=1}^{m_1} \left(\sum_{j=1}^{m_2} \alpha_j \circ \phi(x) \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} \right) dx^i.$$

c) Si $\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq m_2} \alpha_{j_1 j_2}(y) dy^{j_1} \wedge dy^{j_2} \in \mathcal{C}^0(\Omega_2, \Lambda^2 \vec{E}_2^{m_2^*})$,

$$\begin{aligned} (\phi^* \alpha)_x &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq m_2} \alpha_{j_1 j_2} \circ \phi(x) \left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \frac{\partial \phi^{j_1}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \right) \wedge \left(\sum_{i_2=1}^{m_1} \frac{\partial \phi^{j_2}}{\partial x^{i_2}} dx^{i_2} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m_1} \left(\sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq m_2} \alpha_{j_1 j_2} \circ \phi(x) \left(\frac{\partial \phi^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \phi^{j_2}}{\partial x^{i_2}} - \frac{\partial \phi^{j_1}}{\partial x^{i_2}} \frac{\partial \phi^{j_2}}{\partial x^{i_1}} \right) \right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}. \end{aligned}$$

d) En général, si $\alpha_y = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m_2} \alpha_{j_1 \dots j_p}(y) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_p} \in \mathcal{C}^0(\Omega_2, \Lambda^p \vec{E}_2^{m_2^*})$,

$$(\phi^* \alpha)_x = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m_2} \alpha_{j_1 \dots j_p} \circ \phi(x) d(\phi^{j_1}(x)) \wedge \dots \wedge d(\phi^{j_p}(x)),$$

où, en substituant $d(\phi^j(x)) = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} dx^i$ et en utilisant les règles algébriques sur le produit extérieur, on obtient :

$$(\phi^* \alpha)_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m_1} \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m_2} \alpha_{j_1 \dots j_p} \circ \phi(x) \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi^{j_1}}{\partial x^{i_1}} & \dots & \frac{\partial \phi^{j_1}}{\partial x^{i_p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi^{j_p}}{\partial x^{i_1}} & \dots & \frac{\partial \phi^{j_p}}{\partial x^{i_p}} \end{vmatrix} \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Lemme 9 *Supposons que $\phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ soit une application de classe \mathcal{C}^2 . Soit $\alpha \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \Lambda^p \vec{E}_2^{m_2^*})$, alors*

$$\phi^*(d\alpha) = d(\phi^*\alpha).$$

Preuve Nous n'en donnons la preuve que pour $p = 0$ et $p = 1$. Dans le cas où $p = 0$, si $\alpha \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \phi^*(d\alpha)_x &= \phi^* \left(\sum_{j=1}^{m_2} \frac{\partial \alpha}{\partial y^j}(y) dy^j \right)_x \\ &= \sum_{j=1}^{m_2} \frac{\partial \alpha}{\partial y^j}(\phi(x)) d(\phi^j(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\partial \alpha}{\partial y^j} \circ \phi(x) \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i}(x) dx^i \\ &= d(\alpha \circ \phi)_x = d(\phi^*\alpha)_x. \end{aligned}$$

Dans le cas où $p = 1$, si $\alpha \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \Lambda^1 \vec{E}_2^{m_2^*})$,

$$\begin{aligned} \phi^*(d\alpha)_x &= \phi^* \left(d \left(\sum_{j_2=1}^{m_2} \alpha_{j_2}(y) dy^{j_2} \right) \right) \\ &= \phi^* \left(\sum_{j_1, j_2=1}^{m_2} \left(\frac{\partial \alpha_{j_2}}{\partial y^{j_1}}(y) dy^{j_1} \right) \wedge dy^{j_2} \right) \\ &= \sum_{j_1, j_2=1}^{m_2} \frac{\partial \alpha_{j_2}}{\partial y^{j_1}}(\phi(x)) d(\phi^{j_1}(x)) \wedge d(\phi^{j_2}(x)) \\ &= \sum_{i_1, i_2=1}^{m_1} \sum_{j_1, j_2=1}^{m_2} \frac{\partial \alpha_{j_2}}{\partial y^{j_1}}(\phi(x)) \frac{\partial \phi^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \phi^{j_2}}{\partial x^{i_2}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}. \end{aligned}$$

et d'un autre coté, en posant $y = \phi(x)$,

$$\begin{aligned}
d(\phi^*\alpha) &= d\left(\sum_{i_2=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \alpha_{j_2} \circ \phi(x) \frac{\partial \phi^{j_2}}{\partial x^{i_2}} dx^{i_2}\right) \\
&= \sum_{i_1, i_2=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \left(\sum_{j_1=1}^{m_2} \frac{\partial \alpha_{j_2}}{\partial y^{j_1}}(y) \frac{\partial \phi^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \phi^{j_2}}{\partial x^{i_2}} dx^{i_1} + \alpha_{j_2}(y) \frac{\partial^2 \phi^{j_2}}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} dx^{i_1} \right) \wedge dx^{i_2} \\
&= \sum_{i_1, i_2=1}^{m_1} \sum_{j_1, j_2=1}^{m_2} \frac{\partial \alpha_{j_2}}{\partial y^{j_1}}(y) \frac{\partial \phi^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \phi^{j_2}}{\partial x^{i_2}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}.
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité $\sum_{i_1, i_2=1}^{m_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} = 0$. On en déduit le résultat. *CQFD*.

6.4 Formes différentielles sur une variété

Soit \mathcal{M} une variété différentielle de dimension m et de classe \mathcal{C}^k , avec $k \geq 1$. Une p -forme différentielle α sur \mathcal{M} est la donnée, en chaque point $M \in \mathcal{M}$ d'une application p -linéaire alternée

$$\begin{aligned}
\alpha_M : \quad (T_M \mathcal{M})^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(V_1, \dots, V_p) &\longmapsto \alpha_M(V_1, \dots, V_p),
\end{aligned}$$

autrement dit, $\alpha_M \in \Lambda^p(T_M \mathcal{M})^*$.

Remarque — On a l'habitude de noter $T_M^* \mathcal{M} := (T_M \mathcal{M})^*$, le dual de $T_M \mathcal{M}$, que l'on appelle *espace cotangent* à \mathcal{M} en M . Par conséquent, on écrira plutôt $\alpha_M \in \Lambda^p T_M^* \mathcal{M}$.

Exemples

a) si $p = 0$, une 0-forme différentielle α est simplement une fonction de \mathcal{M} vers \mathbb{R} .

b) si $p = 1$, en chaque point $M \in \mathcal{M}$, $\alpha_M \in T_M^* \mathcal{M}$ est une forme

linéaire sur $T_M\mathcal{M}$.

La régularité de α (continue? différentiable?) peut être précisée exactement de la même façon que pour les fonctions de \mathcal{M} dans \mathbb{R} : soit $U \subset \mathcal{M}$ et $x : U \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$ une carte locale (trouvée à l'une des pages de l'atlas $(U_i, x_i)_{i \in I}$, de classe \mathcal{C}^k). Afin d'alléger les notations, nous poserons $f := x^{-1}$. Nous commençons par définir la p -forme différentielle $f^*\alpha$ par $\forall \xi \in \Omega, \forall W_1, \dots, W_p \in \mathbb{R}^m$,

$$(f^*\alpha)_\xi(W_1, \dots, W_p) = \alpha_{f(\xi)}(df_\xi(W_1), \dots, df_\xi(W_p)),$$

ou, de façon équivalente, $\forall M \in \mathcal{M}, \forall V_1, \dots, V_p \in T_M\mathcal{M}$,

$$(f^*\alpha)_{x(M)}(dx_M(V_1), \dots, dx_M(V_p)) = \alpha_M(V_1, \dots, V_p).$$

Nous dirons que α est de classe \mathcal{C}^l si et seulement si, pour toute carte $x : U \longrightarrow \Omega$, $f^*\alpha = (x^{-1})^*\alpha \in \mathcal{C}^l(\Omega, \Lambda^p\mathbb{R}^m)$ (c'est à dire tous les coefficients de $f^*\alpha$ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^l). Cette définition est cohérente seulement si $l + 1 \leq k$.

Grâce au lemme 9, nous pouvons également définir la différentielle extérieure d'une forme différentielle définie sur une variété suffisamment régulière.

Définition 30 Soit \mathcal{M} une variété différentielle de classe \mathcal{C}^k , avec $k \geq 2$ et soit α une p -forme différentielle de classe \mathcal{C}^l sur \mathcal{M} , où $l \geq 1$. Alors la différentielle de α est la $(p + 1)$ -forme différentielle notée $d\alpha$ sur \mathcal{M} , définie par

$$\text{pour toute carte locale } (U, x), \quad (x^{-1})^*(d\alpha) = d((x^{-1})^*\alpha).$$

Insistons sur le fait qu'il est nécessaire de supposer que la variété soit au moins de classe \mathcal{C}^2 , à cause des hypothèses du lemme 9. Nous pouvons alors vérifier que cette définition ne dépend pas de la carte utilisée.

En effet, soit (U_i, x_i) et (U_j, x_j) deux cartes. Notons $f_i := x_i^{-1}$ et $f_j := x_j^{-1}$ et définissons provisoirement les opérateurs d_i et d_j , agissant sur les restrictions à $U_{ij} := U_i \cap U_j$ des p -formes différentielles, par

$$f_i^*(d_i\alpha) = d(f_i^*\alpha) \quad \text{et} \quad f_j^*(d_j\alpha) = d(f_j^*\alpha).$$

Posons $\phi := x_i \circ x_j^{-1} = f_i^{-1} \circ f_j : x_j(U_{ij}) \longrightarrow x_i(U_{ij})$.

Exercice — Démontrer que $\phi^*(f_i^*\alpha) = f_j^*\alpha$ et que, pour toute

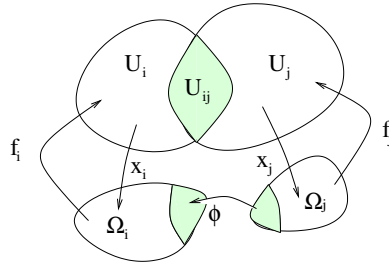


FIG. 6.3 — $x_i, x_j, f_i = x_i^{-1}, f_j = x_j^{-1}$ et ϕ .

p -forme β sur $x_i(U_{ij})$, $x_i^*\beta = x_j^*(\phi^*\beta)$.

En appliquant les résultats de l'exercice précédent et le lemme 9, on a donc

$$\begin{aligned}
d_i \alpha &= x_i^* (df_i^* \alpha) \\
&= x_j^* (\phi^* (df_i^* \alpha)) \\
&= x_j^* (d(\phi^* f_i^* \alpha)) \\
&= x_j^* (df_j^* \alpha) \\
&= d_j \alpha.
\end{aligned}$$

Ainsi d_i et d_j coïncident.

Exercice — Démontrer que, si \mathcal{M} est une variété de classe \mathcal{C}^3 et, si α est une p -forme de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{M} , alors $dd\alpha = 0$.

6.5 Intégrale d'une p -forme

- Supposons que E^m soit un espace affine et orienté de dimension m et soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ une base directe de \vec{E}^m , $O \in E^m$ une origine et $x = (x^1, \dots, x^m)$ les fonctions coordonnées sur E^m dans ce référentiel. Considérons le parallélépipède $P := \{p \in E^m / 0 \leq x^j(p) \leq 1, \forall j = 1, \dots, m\}$, c'est à dire celui dont les côtés sont constitués par les vecteurs ϵ_j . L'idée de base est que si β est une m -forme sur \vec{E}^m (c'est à dire $\beta \in \Lambda^m \vec{E}^{m*}$), alors le « volume » de P mesuré à l'aide de β est simplement

$$\int_P \beta := \beta(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m).$$

Si nous échangeons P contre un autre parallélépipède $\tilde{P} := \{p \in E^m / 0 \leq x^j(p) \leq \delta \xi^j, \forall j = 1, \dots, m\}$, on aura

$$\int_{\tilde{P}} \beta := \delta \xi^1 \dots \delta \xi^m \beta(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m).$$

- A présent, remplaçons le parallélépipède par un ouvert quelconque U dans E^m et β par une m -forme différentielle sur U

(c'est à dire $\beta \in \mathcal{C}^0(U, \Lambda^m \vec{E}^{m*})$: β est à coefficients variables). Notons $\Omega := (x^1, \dots, x^m)(U) \subset \mathbb{R}^m$ et (ξ_1, \dots, ξ_m) un point de \mathbb{R}^m . Nous commençons par remarquer que l'intégrale au sens de Lebesgue

$$\int_{\Omega} \beta_{x^{-1}(\xi)}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) d\xi^1 \dots d\xi^m$$

ne dépend que de β et de U . C'est à dire, si $(\tilde{O}, \tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_m)$ est un autre référentiel direct dans lequel les fonctions coordonnées sont $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$ et si $\tilde{\Omega} := \tilde{x}(U)$, on calcule en exploitant le fait que β est m -linéaire alternée et en faisant le changement de variables $\xi = x \circ \tilde{x}^{-1}(\tilde{\xi})$

$$\int_{\Omega} \beta_{x^{-1}(\xi)}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) d\xi^1 \dots d\xi^m = \int_{\tilde{\Omega}} \beta_{\tilde{x}^{-1}(\tilde{\xi})}(\tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_m) d\tilde{\xi}^1 \dots d\tilde{\xi}^m.$$

Cette vérification repose sur le fait que $\xi = A\tilde{\xi} + B$, où A est une matrice $m \times m$ inversible et $B \in \mathbb{R}^m$. De plus $(\tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_m) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)A$.

Donc cette quantité est indépendante du référentiel direct qui a été choisi. Elle ne dépend que du domaine U , son orientation et de β . On la note

$$\int_U \beta.$$

• Un raisonnement similaire montre que $\int_U \beta$ est invariante par difféomorphisme. Plus précisément, supposons que U soit un ouvert de E^m , soit F^m un autre espace affine orienté de dimension m , soit V un ouvert de F^m et soit $\phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme *direct* de classe \mathcal{C}^1 . Enfin, soit α une m -forme différentielle sur V . Alors

$$\int_U \phi^* \beta = \int_V \beta.$$

La preuve de cela repose aussi toujours sur le fait que β est m -linéaire alternée et sur la formule de changement de variable.

- Soit \mathcal{M} une variété de dimension m et de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$), et soit β une m -forme différentielle sur \mathcal{M} . Soit $(U_i, x_i)_{i \in I}$ un atlas de \mathcal{M} et $(\chi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité associée à cet atlas, id est $\chi_i \in \mathcal{C}^k(\Omega_i)$, où $\Omega_i := x_i(U_i)$, et
 - $\forall i \in I$, le support de χ_i est compact et contenu dans Ω_i
 - $\forall i \in I, \forall \xi \in \Omega_i, 0 \leq \chi_i(\xi) \leq 1$
 - $\forall M \in \mathcal{M}, \sum_{i \in I} \chi_i \circ x_i(M) = 1$.

Alors nous définissons

$$\int_{\mathcal{M}} \beta := \sum_{i \in I} \int_{\Omega_i} \chi_i(\xi) (x_i^{-1})^* \beta.$$

- Enfin, un cas particulier ce ce qui précède est lorsque la variété est une sous-variété \mathcal{S} de dimension p d'un espace affine E^m (ou bien, plus généralement, d'une autre variété). On peut soit appliquer la définition précédente, soit supposer que \mathcal{S} est recouvert par des ouverts U_i de E^m (pour $i \in I$) tels que chaque $U_i \cap \mathcal{S}$ est l'image d'une paramétrisation $f_i : \Omega_i \longrightarrow E^m$. Nous utilisons une partition de l'unité $(\theta_i)_{i \in I}$ associée au recouvrement $\mathcal{S} \subset \cup_{i \in I} U_i$ légèrement différente de celle utilisée précédemment : les fonctions $\theta_i \in \mathcal{C}^k(U_i, \mathbb{R})$ satisfont
 - $\forall i \in I$, le support de θ_i est compact et contenu dans U_i
 - $\forall i \in I, \forall M \in U_i, 0 \leq \theta_i(M) \leq 1$
 - $\forall M \in \mathcal{S}, \sum_{i \in I} \theta_i(M) = 1$.

Alors on définit l'intégrale de β sur \mathcal{S} par

$$\int_S \beta = \sum_{i \in I} \int_{\Omega_i} \theta_i(f_i(t)) f_i^* \beta.$$

6.6 Formule de Stokes

6.6.1 Formule de Stokes sur un ouvert de E^m

Nous supposons encore que E^m est affine et orienté. Ω désigne un ouvert de E^m dont le bord $\partial\Omega$ est une sous-variété de classe \mathcal{C}^1 . On munit $\partial\Omega$ d'une orientation de la façon suivante : en un point p de $\partial\Omega$, considérons le vecteur normal sortant à $\partial\Omega$ en p , $n(p)$. Nous dirons alors qu'une base (e_2, \dots, e_m) de $T_p\partial\Omega$ est directe si et seulement si (n, e_2, \dots, e_m) est une base directe de \vec{E}^m .

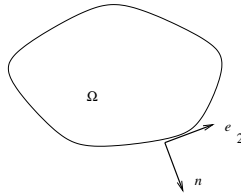


FIG. 6.4 – Orientation de $\partial\Omega$.

Soit maintenant une $(m-1)$ -forme α définie sur un voisinage de $\partial\Omega$. Conformément à ce qui précède, nous définissons l'intégrale de α sur $\partial\Omega$ comme suit. Soit $\bar{\Omega} \subset \cup_{j \in J} \Omega_j$ un recouvrement de $\bar{\Omega}$ et soit $(\theta_j)_{j \in J}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement, en particulier telle que $\sum_{j \in J} \theta_j = 1$ sur $\partial\Omega$. De plus, nous supposons que chaque $\Gamma_j := \partial\Omega \cap \Omega_j$ est l'image d'un plongement $f_j : \omega_j \longrightarrow E^m$, où ω_j est un ouvert de \mathbb{R}^{m-1} . Alors, utilisant les coordonnées (t^2, \dots, t^m) sur \mathbb{R}^{m-1} , nous posons

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \sum_{j \in J} \int_{\omega_j} \alpha_{f_j(t)} \left(\frac{\partial f_j}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial f_j}{\partial t^m} \right) \theta_j(f_j(t)) dt^2 \dots dt^m.$$

Théorème 8 Soit Ω un ouvert de E^m et $\alpha \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \Lambda^{m-1} \vec{E}^{m*})$, alors

$$\int_{\Omega} d\alpha = \int_{\partial\Omega} \alpha,$$

où les intégrales tiennent compte des orientations définies plus haut.

Preuve Nous ne démontrerons ce résultat que dans les cas où $m = 1$ et $m = 2$. Si $m = 1$, la formule de Stokes est juste

$$\int_a^b \frac{d\alpha}{dx}(x) dx = \alpha(b) - \alpha(a),$$

sur chaque composante connexe $]a, b[$ de Ω .

Si $m = 2$, on recouvre Ω par $\Omega \subset \Omega_0 \cup \bigcup_{j \in J} \Omega_j$, avec $\partial\Omega \subset \bigcup_{j \in J} \Omega_j$ et on suppose que pour tout $j \in J$, il existe un difféomorphisme $f_j : B(0, 1) \rightarrow \Omega_j$ tel que, notant $B(0, 1) = \{t = (t^1, t^2) \in \mathbb{R}^2 / |t| < 1\}$, $B^-(0, 1) = \{t \in B(0, 1) / t^1 < 0\}$ et $\{0\} \times]0, 1[= \{t \in B(0, 1) / t^1 = 0\}$,

$$f_j(B^-(0, 1)) = \Omega \cap \Omega_j \text{ et } f_j(\{0\} \times]0, 1[) = \partial\Omega \cap \Omega_j.$$

Soit $\theta_0, (\theta_j)_{j \in J}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement, telle que $\theta_0 + \sum_{j \in J} \theta_j = 1$ sur Ω , alors

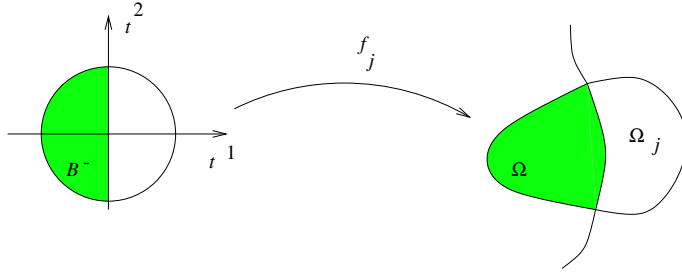


FIG. 6.5 – La preuve de la formule de Stokes en dimension 2

$$\int_{\Omega} d\alpha = \int_{\Omega} d\left(\theta_0(x)\alpha + \sum_{j \in J} \theta_j(x)\alpha\right) = \int_{\Omega} d(\theta_0(x)\alpha) + \sum_{j \in J} \int_{\Omega} d(\theta_j(x)\alpha).$$

D'une part, en utilisant le théorème de Fubini et en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d(\theta_0(x)\alpha) &= \int_{\Omega} d(\theta_0(x)(\alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2)) \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(\theta_0 \alpha_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(\theta_0 \alpha_1)}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $j \in J$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d(\theta_j(x)\alpha) &= \int_{\Omega_j} d(\theta_j(x)\alpha) \\ &= \int_{B^-(0,1)} f_j^*(d(\theta_j\alpha)) \\ &= \int_{B^-(0,1)} d(f_j^*(\theta_j\alpha)). \end{aligned}$$

Notons $\alpha_j = \alpha_{j,1} dt^1 + \alpha_{j,2} dt^2 = f_j^*(\theta_j\alpha)$. Comme α_j s'annule sur

$\partial B(0, 1) \cap \overline{B^-(0, 1)}$, il vient, en utilisant le théorème de Fubini et en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_{B^-(0,1)} d\alpha_j &= \int_{B^-(0,1)} \left(\frac{\partial \alpha_{j,2}}{\partial t^1} - \frac{\partial \alpha_{j,1}}{\partial t^2} \right) dt^1 dt^2 \\ &= \int_{]-1,1[} \alpha_{j,2} dt^2 = \int_{\{0\} \times]-1,1[} \alpha_j. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} d\alpha = \sum_{j \in J} \int_{\{0\} \times]-1,1[} f_j^*(\theta_j \alpha) = \sum_{j \in J} \int_{\partial \Omega \cap U_j} \theta_j \alpha = \int_{\partial \Omega} \alpha.$$

CQFD.

Exercice — Démontrer le théorème en toute dimension.

6.6.2 Formule de Stokes sur une variété à bord

Théorème 9 *Soit \mathcal{M} une variété orientée à bord de classe \mathcal{C}^2 de dimension m , dont le bord $\partial \mathcal{M}$ est une variété de classe \mathcal{C}^1 et de dimension $m - 1$. Soit α une $(m - 1)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur $\overline{\mathcal{M}}$. Alors*

$$\int_{\mathcal{M}} d\alpha = \int_{\partial \mathcal{M}} \alpha.$$

Preuve Nous ne donnons la preuve que dans le cas où $\overline{\mathcal{M}}$ est décrit par une paramétrisation $x : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathcal{M}} \subset \mathbb{R}^m$, telle que l'image de $\partial \mathcal{M}$ soit $\partial \Omega$. Notons $f := x^{-1} : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}$. En utilisant le lemme 9 et la formule de Stokes sur Ω ,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \alpha = \int_{\partial\Omega} f^* \alpha = \int_{\Omega} d(f^* \alpha) = \int_{\Omega} f^*(d\alpha) = \int_{\mathcal{M}} d\alpha.$$

Dans le cas où \mathcal{M} est décrite par un atlas, on a recourt à un argument de partition de l'unité. *CQFD*.

Corollaire 2 *Soit \mathcal{S} une sous-variété orientée à bord de classe \mathcal{C}^2 , de dimension p , plongée dans un espace affine E^m , dont le bord $\partial\mathcal{M}$ est une sous-variété de classe \mathcal{C}^1 et de dimension $p-1$. Soit α une $(p-1)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 définie sur $\overline{\mathcal{M}}$. Alors*

$$\int_{\mathcal{M}} d\alpha = \int_{\partial\mathcal{M}} \alpha.$$

6.7 Le « theorema egregium » de Gauss

(Hors programme) Revenons à l'étude des surfaces plongées dans un espace euclidien orienté de dimension 3, E^3 , en suivant une approche inspirée d'Elie Cartan. Soit \mathcal{S} une surface orientée plongée dans E^3 de classe \mathcal{C}^2 et $(e_1, e_2, e_3) : \mathcal{S} \rightarrow (\vec{E}^3)^3$ un repère de Darboux sur \mathcal{S} (de classe \mathcal{C}^1). En particulier, $\forall p \in \mathcal{S}$, $(e_1(p), e_2(p))$ est une base orthonormée directe de $T_p\mathcal{S}$. On note (α_p^1, α_p^2) la base duale. Désignons par $X : \mathcal{S} \rightarrow E^3$ l'injection de \mathcal{S} dans E^3 . On a

$$dX = e_1\alpha^1 + e_2\alpha^2 \quad (6.3)$$

et

$$de_a = \sum_{b=1}^3 e_b\omega_a^b, \text{ pour } a = 1, 2, 3. \quad (6.4)$$

Lemme 10 (formules de Cartan) Les formes α^a et ω_a^b satisfont les relations suivantes (en convenant de poser $\alpha^3 = 0$)

$$d\alpha^a + \sum_{b=1}^3 \omega_b^a \wedge \alpha^b = 0, \text{ pour } a = 1, 2, 3 \quad (6.5)$$

$$d\omega_b^a + \sum_{c=1}^3 \omega_c^a \wedge \omega_b^c = 0, \text{ pour } a = 1, 2, 3 \quad (6.6)$$

Preuve Pour montrer (6.5), nous appliquons l'opérateur d à (6.3) et nous utilisons (6.4)

$$\begin{aligned} 0 = d(dX) &= e_1 d\alpha^1 + de_1 \wedge \alpha^1 + e_2 d\alpha^2 + de_2 \wedge \alpha^2 \\ &= e_1 d\alpha^1 + (e_2 \omega_1^2 + e_3 \omega_1^3) \wedge \alpha^1 + e_2 d\alpha^2 + (e_1 \omega_2^1 + e_3 \omega_2^3) \wedge \alpha^2 \\ &= e_1 (d\alpha^1 + \omega_2^1 \wedge \alpha^2) + e_2 (d\alpha^2 + \omega_1^2 \wedge \alpha^1) + e_3 (\omega_1^3 \wedge \alpha^1 + \omega_2^3 \wedge \alpha^2) \end{aligned}$$

De même, en utilisant deux fois (6.4), on montre (6.6) :

$$\begin{aligned} 0 = d(de_a) &= d \left(\sum_{b=1}^3 e_b \omega_a^b \right) \\ &= \sum_{b=1}^3 \left(\sum_{c=1}^3 e_c \omega_b^c \right) \wedge \omega_a^b + e_b d\omega_a^b \\ &= \sum_{b=1}^3 e_b \left(d\omega_a^b + \sum_{c=1}^3 \omega_c^b \wedge \omega_a^c \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat. *CQFD*.

Théorème 10 (Gauss) Soit $f : \Omega \longrightarrow E^3$ un plongement de classe \mathcal{C}^3 . Alors la courbure de Gauss K de f est totalement déterminée par la première forme fondamentale g_{ij} de ce plongement. Plus précisément, $K(f(t))$ est une fonction (explicite) de g_{ij} et de ses dérivées premières et deuxièmes.

Preuve 1) Soit $\mathcal{S} := f(\Omega)$ et (e_1, e_2, e_3) un repère de Darboux sur \mathcal{S} . La relation (6.5) entraîne ne que

$$d\alpha^1 + \omega_2^1 \wedge \alpha^2 = d\alpha^2 + \omega_1^2 \wedge \alpha^1 = 0,$$

ce qui permet de déduire que $d\alpha^1(e_1, e_2) + \omega_2^1(e_1) = 0$ et $d\alpha^2(e_1, e_2) - \omega_1^2(e_2) = 0$. On peut ainsi exprimer ω_2^1 à partir de α^1 et α^2 :

$$\omega_2^1 = \omega_2^1(e_1)\alpha^1 + \omega_2^1(e_2)\alpha^2 = -d\alpha^1(e_1, e_2)\alpha^1 - d\alpha^2(e_1, e_2)\alpha^2.$$

Utilisons à présent l'identité (6.6) et en particulier $d\omega_2^1 + \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = 0$. Dans le chapitre précédent, nous avons obtenu ω_1^3 et ω_2^3 en fonction de (α^1, α^2) et d'une matrice $h(p)$

$$\begin{cases} \omega_1^3 &= h_{11}\alpha^1 + h_{12}\alpha^2 \\ \omega_2^3 &= h_{21}\alpha^1 + h_{22}\alpha^2 \end{cases},$$

d'où l'on déduit

$$d\omega_2^1 = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = (h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})\alpha^1 \wedge \alpha^2 = K(p)\alpha^1 \wedge \alpha^2.$$

Ainsi la courbure de Gauss est le rapport entre $d\omega_2^1 = -d(d\alpha^1(e_1, e_2)\alpha^1 + d\alpha^2(e_1, e_2)\alpha^2)$ et $\alpha^1 \wedge \alpha^2$. Or ces deux quantités ne dépendent pas de la seconde forme fondamentale. On peut aussi remarquer qu'il était possible de choisir un autre repère de Darboux $(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta, -e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta)$, pour toute fonction régulière $\theta : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, mais alors ω_2^1 est changé en $\omega_2^1 - d\theta$, ce qui signifie que $d\omega_2^1$ ne change pas !

2) (Si vous n'êtes pas convaincu par ce qui précède). Nous pouvons prendre l'image inverse par f de l'identité obtenue précédemment :

$$d(f^*\omega_2^1) = K(f(t))f^*\alpha^1 \wedge f^*\alpha^2$$

et vérifier que toutes les quantités qui interviennent dans cette équation peuvent être construites à partir de la seconde forme fondamentale g_{ij} de f . En effet si on construit un repère mobile $(v_1(t), v_2(t))$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tel que pour tout $t \in \Omega$, $(v_1(t), v_2(t))$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^2 pour le produit scalaire $g_{ij}(t)$, alors $e_1 := df_t(v_1(t))$ et $e_2 := df_t(v_2(t))$ forment une base orthonormée directe de $T_{f(t)}\mathcal{S}$ (donc on peut la compléter en un repère de Darboux). Et la base duale de $(v_1(t), v_2(t))$ est alors juste $((f^*\alpha^1)_t, (f^*\alpha^2)_t)$. En réfléchissant encore un peu, on réalise que $f^*\alpha^1 = a_1^1 dt^1 + a_2^1 dt^2$ et $f^*\alpha^2 = a_1^2 dt^1 + a_2^2 dt^2$, avec

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Donc

$$f^*\alpha^1 \wedge f^*\alpha^2 = \det \begin{pmatrix} a_1^1(t) & a_2^1(t) \\ a_1^2(t) & a_2^2(t) \end{pmatrix} dt^1 \wedge dt^2 = \sqrt{\det g(t)} dt^1 \wedge dt^2.$$

De même, on peut calculer $f^*\omega_2^1$ à partir de $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$, puisque

$$f^*\omega_2^1 = -d(f^*\alpha^1)(v_1, v_2)f^*\alpha^1 - d(f^*\alpha^2)(v_1, v_2)f^*\alpha^2,$$

toutes les quantités apparaissant dans le membre de droite de cette équation pouvant être produites à partir de g_{ij} et des ses dérivées premières et deuxièmes. Plus exactement, on choisit une solution a_j^i de (6.7), ce qui détermine immédiatement les composantes de $f^*\alpha^1$ et $f^*\alpha^2$ dans la base (dt^1, dt^2) . Les coordonnées

de (v_1, v_2) sont obtenues en inversant la matrice (a_j^i) . Encore une fois, on remarque que les solutions de l'équation (6.7) ne sont pas uniques, mais de la forme

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^1 & \tilde{a}_2^1 \\ \tilde{a}_1^2 & \tilde{a}_2^2 \end{pmatrix} / \theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \right\},$$

où $\begin{pmatrix} \tilde{a}_1^1 & \tilde{a}_2^1 \\ \tilde{a}_1^2 & \tilde{a}_2^2 \end{pmatrix}$ est une solution particulière. Cela fait que $f^*\omega_2^1$ dépend du choix de la solution et en particulier si l'on change $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$, $f^*\omega_2^1$ sera changé en $f^*\omega_2^1 - d\theta$, mais alors $df^*\omega_2^1$ ne change pas. *CQFD*.

Chapitre 7

Champs de vecteurs

Commençons par rappeler ce qu'est un champ de vecteur (cf paragraphe 4.6.2). Un champ de vecteur X de classe \mathcal{C}^k sur un ouvert Ω d'un espace affine E^m est une application $X : \Omega \longrightarrow \vec{E}^m$ de classe \mathcal{C}^k .

Les champs de vecteurs sont naturellement liés à des problèmes d'évolution. Par exemple dans un fluide en mouvement, la vitesse des molécules du fluide qui se trouvent au point $x \in \Omega$ à l'instant t est représentée par un vecteur $X(t, x)$ et l'application $x \longmapsto X(t, x)$ est un champ de vecteur qui décrit l'état instantané des vitesses des molécules. La trajectoire d'une molécule au cours du temps est décrite par un chemin $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ (où I est l'intervalle de temps considéré) tel que $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(t, \gamma(t))$ pour tout instant t .

De même, à toute solution $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de \mathbb{R}) de l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) = F \left(u(t), \frac{du}{dt}(t) \right),$$

correspond une solution $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de l'équation $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t))$, où

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ F(x, y) \end{pmatrix}.$$

7.1 Résultat d'existence locale

Nous allons voir que, sous des hypothèse relativement générale, le type d'équation évoqué précédemment admet toujours une solution au moins pour un intervalle de temps suffisamment court. On parle de solution locale.

Théorème 11 *Soit Ω un domaine ouvert de E^m et soit X un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^k , avec $k \geq 1$, sur Ω . Alors pour tout point $a \in \Omega$, il existe un intervalle I de \mathbb{R} contenant 0 et un voisinage U_a de a dans Ω , tels qu'il existe une unique application $\Phi : I \times U_a \longrightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^k satisfaisant*

- $\forall x \in U_a, \Phi(0, x) = x$
- $\forall x \in U_a, \forall t \in I,$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = X(\Phi(t, x)). \quad (7.1)$$

Preuve Notons

$$E_0 := \{c \in \mathcal{C}^0([0, 1], \vec{E}^m) / c(0) = 0\}$$

et remarquons que E_0 est un espace de Banach pour la norme

$$\|c\| := \sup_{s \in [0, 1]} |c(s)|.$$

L'idée est de rechercher pour tout (T, x) proche de $(0, a)$ un chemin (qui sera en fait dérivable) $c = G(T, x) \in E_0$ tel que $\gamma(t) := x + c\left(\frac{t}{T}\right)$ soit une solution de

$$\gamma(0) = x \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)).$$

La première condition est automatiquement vérifiée, car $c \in E_0$.
La deuxième condition est équivalente à

$$\frac{dc}{ds}(s) = T X(x + c(s)), \quad \forall s \in [0, 1].$$

Enfin il est préférable de réécrire cette équation sous une forme intégrale

$$c(s) - T \int_0^s X(x + c(\tau)) d\tau = 0, \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (7.2)$$

On remarque que

$$C(s) := c(s) - T \int_0^s X(x + c(\tau)) d\tau \quad (7.3)$$

définit un chemin $C \in E_0$.

Ainsi (7.2) se reformule en disant que l'on cherche un chemin $c \in E_0$ tel que

$$F(T, x, c) = 0, \quad (7.4)$$

où

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \Omega \times E_0 &\longrightarrow E_0 \\ (T, x, c) &\longmapsto C, \text{ défini par (7.3).} \end{aligned}$$

Une solution évidente de (7.4) est $(T, x, c) = (0, a, 0)$. Le théorème des fonctions implicites va nous donner une famille de solutions de la forme $(T, x, G(T, x))$, pour (T, x) proche de $(0, a)$. Pour cela, nous devons vérifier

- que $dF_{(0,a,0)}$ est inversible par rapport à la dernière « variable » $c \in T_0E_0 \simeq E_0$. Or un calcul simple donne que

$$dF_{(0,a,0)} = dc,$$

c'est à dire que « $\frac{\partial F}{\partial c}$ » = Id_{E_0}

- que F est de classe \mathcal{C}^k . Cela se vérifie aisément.

Donc, par le théorème des fonctions implicites, nous concluons qu'il existe un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant 0 et un voisinage U_a de a dans Ω tels qu'il existe une application $G : I \times U_a \longrightarrow E_0$ de classe \mathcal{C}^k satisfaisant $G(0, a) = 0$ et $F(T, x, G(T, x)) = 0$. De plus $c = G(T, x)$ satisfait (7.2), ce qui entraînera que c est en fait un chemin de classe \mathcal{C}^1 .

Qu'avons-nous obtenu? Pour tout $x \in U_a$ et tout $T \in I$, l'application $\Phi_T(t, x) := x + G(x, T)(\frac{t}{T})$ est une solution de (7.1) définie sur l'intervalle $[0, T]$ (avec la convention que si $T < 0$, $[0, T] = [-|T|, 0]$). Pouvons-nous étendre cette solution sur l'intervalle I ? Il faut pour cela recoller les diverses solutions Φ_T en une solution Φ définie sur I . Nous utilisons pour cela le Lemme d'unicité qui va suivre. En vertu de ce Lemme, si $0 < T < T'$, Φ_T coïncide avec $\Phi_{T'}$ sur $[0, T]$. On peut donc définir Φ sur $[0, T]$ par $\Phi(t, x) := \Phi_{T'}(t, x)$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall T' \in I$ tel que $T' \geq T$. On définit de même $\Phi(t, x)$ pour $t \in [-|T|, 0]$ et $T < 0$. Ainsi Φ est défini sur I . *CQFD*

Lemme 11 Soit $X : \Omega \longrightarrow \vec{E}^m$ un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^1 (en fait lipschitzien suffirait), et soit $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \longrightarrow \Omega$ deux solutions \mathcal{C}^1 de

$$\gamma(0) = x \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)), \quad \forall t \in [0, T],$$

alors $\gamma_1 = \gamma_2$.

Preuve Nous utilisons n'importe quel produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \vec{E}^m et notons $|\xi| := \langle \xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}}$. Comme $[0, T]$ est compact et γ_1, γ_2 sont continus, leurs images sont contenues dans un compact $K \subset \Omega$. La restriction de X à K est lipschitzienne de constante de Lipschitz M . Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|^2 &= 2 \langle \gamma_1(t) - \gamma_2(t), X(\gamma_1(t)) - X(\gamma_2(t)) \rangle \\ &\leq 2M |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|^2. \end{aligned}$$

Posons $\lambda(t) := |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|^2$. L'inégalité $\frac{d\lambda}{dt}(t) \leq 2M\lambda(t)$ entraîne ne

$$\frac{d}{dt} (\lambda(t)e^{-2Mt}) \leq 0.$$

La fonction $t \mapsto \lambda(t)e^{-2Mt}$ est ainsi positive, décroissante et vaut 0 en 0. Elle est donc identiquement nulle. Cela prouve que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \forall t \in [0, T]$. *CQFD*

7.2 Ensemble de vie d'un champ de vecteur

Soit $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, \vec{E}^m)$ un champ de vecteur et soit $x \in \Omega$. On définit $\Gamma_x := \{(I, \gamma) / I \text{ est un intervalle ouvert de } \mathbb{R}, 0 \in I, \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \Omega), \gamma(0) = x \text{ et } \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))\}$.

Si (I, γ) et (I', γ') $\in \Gamma_x$, par le Lemme d'unicité qui précède, on a $\gamma = \gamma'$ sur $I \cap I'$ et on peut donc recoller les deux solutions en une solution γ'' , définie sur $I \cup I'$. On note $I_x := \cup_{(I, \gamma) \in \Gamma_x} I$: c'est l'*intervalle de vie de la solution maximale issue de x*.

Définition 31 *L'ensemble de vie du flot du champ de vecteur x est*

$$\Delta_X := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega / t \in I_x\}.$$

On note $\Phi : \Delta_X \longrightarrow \Omega$ la solution maximale de l'équation $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = X(\Phi(t, x))$, $\Phi(0, x) = x$.

Exercice — Démontrer que, pour $\Omega = \mathbb{R}$ et $X(x) = x^2$, l'ensemble de vie est $\Delta_X = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / tx < 0\}$.

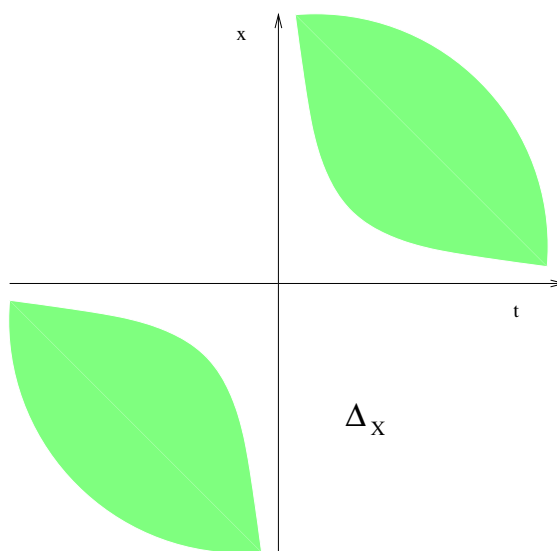


FIG. 7.1 – L'ensemble de vie pour $X(x) = x^2$

Théorème 12 *L'ensemble de vie Δ_X est ouvert dans $\mathbb{R} \times \Omega$. De plus, pour tout $(t, x) \in \Delta_X$ et $t' \in \mathbb{R}$ tel que $(t + t', x) \in \Delta_X$,*

$$\Phi(t', \Phi(t, x)) = \Phi(t + t', x). \quad (7.5)$$

Preuve Le fait que Δ_X soit ouvert est une conséquence du théorème d'existence du paragraphe précédent. L'identité (7.5) s'obtient en considérant

$$\begin{aligned}\alpha : s &\longmapsto \Phi(t + s, x) \\ \beta : s &\longmapsto \Phi(s, \Phi(t, x))\end{aligned}$$

et en vérifiant que $\alpha(0) = \beta(0) = \Phi(t, x)$ et $\frac{d\alpha}{ds} = X(\alpha)$ et $\frac{d\beta}{ds} = X(\beta)$, ce qui entraîne $\alpha = \beta$ par le Lemme d'unicité. *CQFD*

Proposition 1 *Soit $\epsilon > 0$ tel que $] - \epsilon, \epsilon[\times \Omega \subset \Delta_X$. Alors, pour tout $t \in] - \epsilon, \epsilon[$ fixé,*

$$\Phi(t) : x \longmapsto \Phi(t, x)$$

est un difféomorphisme de Ω dans lui-même.

*Dans le cas où $\Delta_X = \mathbb{R} \times \Omega$, le champ de vecteur X est dit **complet** et l'ensemble $\{\Phi(t)/t \in \mathbb{R}\}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe à un paramètre (c'est à dire isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$) de difféomorphismes de Ω .*

Preuve $\phi(t)$ est difféomorphisme en vertu du fait que $\phi(t)$ est \mathcal{C}^1 et du théorème précédent : $(\Phi(t))^{-1} = \Phi(-t)$.

La deuxième assertion est alors immédiate. *CQFD*.

7.3 Image d'un champ de vecteur par un difféomorphisme

Soit Ω et $\tilde{\Omega}$ deux ouverts de E^m et soit $\Psi : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$ un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^{k+1} . Pour tout champ de vecteur $X \in \mathcal{C}^k(\Omega, E^m)$, on définit le champ de vecteur $\Psi_*X : \tilde{\Omega} \longrightarrow \vec{E}^m$ par

$$\forall y \in \tilde{\Omega}, \quad (\Psi_* X)(y) := d\Psi_{\Psi^{-1}(y)}(X(\Psi^{-1}(y))) \quad (7.6)$$

ou, de manière équivalente, en posant $y = \Psi(x)$,

$$\forall x \in \Omega, \quad (\Psi_* X)(\Psi(x)) := d\Psi_x(X(x)). \quad (7.7)$$

On peut vérifier sans difficulté que si $X \in \mathcal{C}^k(\Omega, E^m)$ et Ψ est de classe \mathcal{C}^{k+1} , alors $\Psi_* X \in \mathcal{C}^k(\tilde{\Omega}, E^m)$.

Théorème 13 *Supposons $k \geq 2$. Soit $\Psi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^{k+1} . Soit $\Phi : \Delta_X \rightarrow \Omega$ le flot maximal de X et soit $\tilde{\Phi} : \Delta_{\Psi_* X} \rightarrow \tilde{\Omega}$ le flot maximal de $\Psi_* X$. Notons*

$$\Psi_*(\Delta_X) := \{(t, \Psi(x)) \in \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} / (t, x) \in \Delta_X\}.$$

Alors $\Delta_{\Psi_* X} = \Psi_*(\Delta_X)$ et

$$\forall (t, x) \in \Delta_X, \quad \tilde{\Phi}(t, \Psi(x)) = \Psi(\Phi(t, x)). \quad (7.8)$$

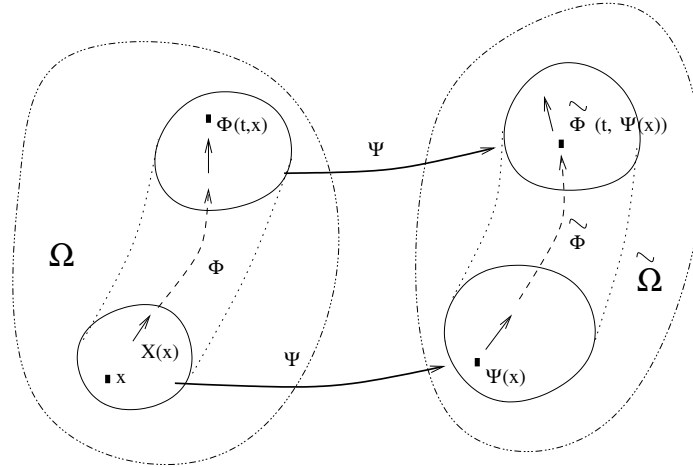


FIG. 7.2 – L'image d'un champ de vecteur X par un difféomorphisme Ψ

Preuve On considère $\widehat{\Phi}(t, y) := \Psi(\Phi(t, \Psi^{-1}(y)))$, pour $(t, y) \in \Psi_*(\Delta_X)$. Alors

$$\widehat{\Phi}(0, y) = \Psi(\Phi(0, \Psi^{-1}(y))) = \Psi \circ \Psi^{-1}(y) = y, \quad \forall y \in \Omega$$

et, notant $x := \Psi^{-1}(y)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial t}(t, y) &= d\Psi_{\Phi(t, x)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) \right) \\ &= d\Psi_{\Phi(t, x)} (X(\Phi(t, x))) \\ &= (\Psi_* X)(\Psi(\Phi(t, x))) \\ &= (\Psi_* X)(\widehat{\Phi}(t, y)). \end{aligned}$$

Donc $\widehat{\Phi}$ est solution des mêmes équations que $\widetilde{\Phi}$, ce qui entraîne $\Psi_*(\Delta_X) \subset \Delta_{\Psi_* X}$ et $\widetilde{\Phi} = \widehat{\Phi}$ sur $\Psi_*(\Delta_X)$.

En inversant les rôles (passer à $\Psi^{-1} : \widetilde{\Omega} \rightarrow \Omega$) on a l'inclusion inverse : $\Delta_{\Psi_* X} \subset \Psi_*(\Delta_X)$. On conclut que $\Delta_{\Psi_* X} = \Psi_*(\Delta_X)$ et $\widehat{\Phi} = \widetilde{\Phi}$. *CQFD*

Une autre propriété, qui sera utile dans le paragraphe suivant est qu'un champ de vecteur est invariant sous l'action de son propre flot :

Lemme 12 Soit $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^m)$ et soit $\Phi : \Delta_X \rightarrow \Omega$ le flot de X . Alors, on a sur Δ_X

$$\Phi(t)_* X = X.$$

Preuve Nous écrivons la conséquence suivante du théorème 12 :

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(t, \Phi(s, x))$$

et nous calculons la dérivée de cette expression par rapport à s en $s = 0$. On obtient ainsi

$$X(\Phi(t, x)) = d\Phi(t)_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}(0, x) \right) = d\Phi(t)_x(X(x)) = (\Phi(t)_*X)(\Phi(t, x)).$$

CQFD.

7.4 Dérivée de Lie et paire de champs de vecteur

Nous commençons par introduire une notation souvent utilisée : toute base (e_1, \dots, e_m) de \vec{E}^m et tout choix d'une origine $O \in E^m$ définissent un système de coordonnées $x = (x^1, \dots, x^m) : E^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ par $M = O + x^1(M)e_1 + \dots + x^m(M)e_m$. Nous rappelons alors la notation

$$\frac{\partial}{\partial x^i} := e_i,$$

de sorte qu'un vecteur est ainsi identifié avec un opérateur différentiel d'ordre 1.

Pour tout champ de vecteur $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^m)$, et toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, on définit la **dérivée de Lie** de f par rapport à X comme étant

$$L_X f(x) := df_x(X(x)) = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x),$$

où $(X^i)_{i=1, \dots, m}$ sont les composantes de X dans la base $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1, \dots, m}$. Ainsi $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Une définition équivalente de la dérivée de Lie est

$$L_X f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Phi(t, x)) - f(x)}{t}. \quad (7.9)$$

Exercice — vérifier.

Examinons à présent ce qui se passe avec deux champs de vecteur.

Lemme 13 Soit $X_1 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$ et $X_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$, deux champs de vecteur, et soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Alors, $\forall x \in \Omega$,

$$L_{X_1}(L_{X_2}f)(x) - L_{X_2}(L_{X_1}f)(x) = L_{[X_1, X_2]}f(x),$$

où

$$[X_1, X_2] := \sum_{i,j=1}^m \left(X_1^i \frac{\partial X_2^j}{\partial x^i} - X_2^i \frac{\partial X_1^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

est le **crochet de Lie** de X_1 et X_2 (c'est un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^1).

Il s'agit d'un résultat élémentaire, mais remarquable : le commutateur $L_{X_1}L_{X_2} - L_{X_2}L_{X_1}$ devrait être a priori un opérateur différentiel du deuxième ordre et pourtant il est du premier ordre et s'exprime à partir d'un troisième champ de vecteur.

Preuve c'est un simple calcul qui utilise la propriété que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$.

Nous allons voir à présent une autre définition du crochet de Lie de deux champs de vecteur, qui fait intervenir le transport d'un des champs par le flot de l'autre. Cette définition procède du point

de vue inspiré par la relation (7.9). Nous noterons respectivement $\Phi_1 : \Delta_{X_1} \longrightarrow \Omega$ et $\Phi_2 : \Delta_{X_2} \longrightarrow \Omega$ les flots de X_1 et X_2 . L'idée est, par exemple, la suivante :

- on part d'un point $x \in \Omega$, on le pousse par le flot de X_1 pendant un temps t , on se retrouve ainsi en $\Phi_1(t, x)$
- on cueille X_2 en $\Phi_1(t, x)$; on aimerait bien comparer $X_2(\Phi_1(t, x))$ avec $X_2(x)$, mais ces deux vecteurs appartiennent à deux espaces vectoriels différents (pour un géomètre différentiel)...
- on ramène $X_2(\Phi_1(t, x))$ au point initial x , en le transportant par le flot de X_1 vers le passé, et l'on obtient le vecteur $d\Phi_1(-t)_{\Phi_1(t, x)}(X_2(\Phi_1(t, x)))$ que l'on dépose en x
- on réalise que $d\Phi_1(-t)_{\Phi_1(t, x)}(X_2(\Phi_1(t, x))) = (\Phi_1(-t)_*X_2)(x)$
- on compare $(\Phi_1(-t)_*X_2)(x)$ avec $X_2(x)$, pour t tendant vers zéro...

on obtient ainsi

$$L_{X_1}X_2(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_1(-t)_*X_2)(x) - X_2(x)}{t}.$$

Théorème 14 *Si $X_1 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$ et $X_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$, alors*

$$L_{X_1}X_2 = [X_1, X_2].$$

Preuve Posons $y = \Phi_1(t, x)$. Nous pouvons exploiter le fait que Φ est \mathcal{C}^1 pour écrire un développement de Taylor

$$y = x + tX_1(x) + o(t). \quad (7.10)$$

De même, $x = \Phi_1(-t, y) = y - tX_1(y) + o(t)$, ce qui entraînera

$$d\Phi_1(-t)_y = dy - t \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_1}{\partial x^i}(y) dy^i + o(t). \quad (7.11)$$

En partant des relations (7.6) ou (7.7), on a

$$\begin{aligned}
(\Phi_1(-t)_* X_2)(x) &= d\Phi_1(-t)_y(X_2(y)) \\
&= X_2(y) - t \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_1}{\partial x^i}(y) X_2^i(y) + o(t) \\
&= X_2(x) + t \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_2}{\partial x^i}(x) X_1^i(x) - t \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_1}{\partial x^i}(x) X_2^i(x) + o(t) \\
&= X_2(x) + t[X_1, X_2](x) + o(t).
\end{aligned}$$

On a utilisé (7.11) à la deuxième ligne et (7.10) à la troisième ligne. Le résultat se déduit alors directement. *CQFD*

Image d'un crochet de Lie par un difféomorphisme

Le résultat suivant sera crucial pour démontrer le Théorème de la fin de ce paragraphe.

Théorème 15 *Soit $X_1 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$ et $X_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$ deux champs de vecteurs et soit $\Psi : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$ un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^3 . Alors*

$$\Psi_*[X_1, X_2] = [\Psi_* X_1, \Psi_* X_2].$$

Preuve Il est beaucoup plus simple de démontrer ce résultat en utilisant comme définition du crochet de Lie, celle donnée par le Lemme 13. Pour cela nous commençons par remarquer le résultat suivant : si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\Psi : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$ est de classe \mathcal{C}^2 et $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^m)$, alors

$$L_{\Psi_* X} f = L_X(f \circ \Psi) \circ \Psi^{-1}. \quad (7.12)$$

En effet, pour tout $y \in \Omega$, notant $y = \Psi(x)$, on a

$$\begin{aligned} L_{\Psi_* X} f(y) &= df_y(\Psi_* X(y)) \\ &= df_y(d\Psi_x(X(x))) \\ &= df_y \circ d\Psi_x(X(x)) \\ &= L_X(f \circ \Psi)(x). \end{aligned}$$

A présent, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on a, en utilisant (7.12),

$$\begin{aligned} L_{[\Psi_* X_1, \Psi_* X_2]} f &= L_{\Psi_* X_1}(L_{\Psi_* X_2} f) - L_{\Psi_* X_2}(L_{\Psi_* X_1} f) \\ &= L_{\Psi_* X_1}(L_{X_2}(f \circ \Psi) \circ \Psi^{-1}) - L_{\Psi_* X_2}(L_{X_1} f \circ \Psi) \circ \Psi^{-1} \\ &= L_{X_1}(L_{X_2}(f \circ \Psi)) \circ \Psi^{-1} - L_{X_1}(L_{X_2}(f \circ \Psi)) \circ \Psi^{-1} \\ &= L_{[X_1, X_2]}(f \circ \Psi) \circ \Psi^{-1} \\ &= L_{\Psi_* [X_1, X_2]} f. \end{aligned}$$

CQFD.

Théorème 16 Soient $X_1 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$ et $X_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$ deux champs de vecteurs et soient $\Phi_1 : \Delta_{X_1} \longrightarrow \Omega$ et $\Phi_2 : \Delta_{X_2} \longrightarrow \Omega$ leurs flots respectifs. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

(a) $[X_1, X_2] = 0$

(b) si $(t_1, x), (t_1, \Phi_2(t_2, x)) \in \Delta_{X_1}$ et $(t_2, x), (t_2, \Phi_1(t_1, x)) \in \Delta_{X_2}$,

$$\Phi_1(t_1, \Phi_2(t_2, x)) = \Phi_2(t_2, \Phi_1(t_1, x)).$$

Preuve *Etape 1* Nous montrons que (a) implique (b). Pour cela, une étape intermédiaire consiste à prouver que si (a) est vrai, alors

$$\Phi_1(t)_* X_2 = X_2. \quad (7.13)$$

Cette relation est évidemment vraie pour $t = 0$. Il suffit donc, pour la prouver, de montrer que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_1(t)_* X_2(x)) = 0. \quad (7.14)$$

Or, par définition de $L_{X_1}(\Phi_1(t)_* X_2)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_1(t)_* X_2(x)) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi_1(t+s)_* X_2(x) - \Phi_1(t)_* X_2(x)}{s} = -L_{X_1}(\Phi_1(t)_* X_2)(x).$$

Mais, en utilisant successivement le théorème 14, le lemme 12 et le théorème 15, on obtient

$$\begin{aligned} L_{X_1}(\Phi_1(t)_* X_2) &= [X_1, \Phi_1(t)_* X_2] \\ &= [\Phi_1(t)_* X_1, \Phi_1(t)_* X_2] \\ &= \Phi_1(t)_* [X_1, X_2] = 0, \end{aligned}$$

d'où la relation (7.14).

Pour conclure (b), nous utilisons le Théorème 13 avec $\Psi = \Phi_1(t_1)$, $\Phi = \Phi_2$ et $t = t_2$. D'après (7.13), on a $\tilde{\Phi} = \Phi_2$ et donc (7.8) donne exactement (b).

Etape 2 Nous montrons que (b) implique (a). Nous dérivons d'abord l'identité (b) par rapport à t_2 en $t_2 = 0$, pour obtenir

$$d\Phi_1(t_1)_x(X_2(x)) = X_2(\Phi_1(t_1, x)),$$

ce qui équivaut à $(\Phi_1(t_1)_* X_2)(\Phi_1(t_1, x)) = X_2(\Phi_1(t_1, x))$. Donc $\Phi_1(t_1)_* X_2 = X_2$. En dérivant cette dernière équation par rapport à t_1 en $t_1 = 0$, on a finalement $L_{X_1} X_2 = 0$, ce qui équivaut à (a). *CQFD*.

7.5 Théorème de redressement

Théorème 17 *Soit $X \in \mathcal{C}^k(\Omega, E^m)$ un champ de vecteur et $a \in \Omega$. Supposons que $X(a) \neq 0$. Alors il existe un ouvert U_a inclus*

dans Ω contenant a et il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$ et un difféomorphisme $\Psi : V \longrightarrow U_a$ tel que

$$X = \Psi_* \epsilon_1,$$

où $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ est la base canonique de \mathbb{R}^m .

Preuve Nous noterons (t^1, t^2, \dots, t^m) les coordonnées sur \mathbb{R}^m . Sans perte de généralité, on peut choisir une base (e_1, \dots, e_m) de \vec{E}^m telle que $X(a) = e_1$. Nous considérons, pour $r > 0$, l'application

$$\begin{aligned} \Psi :]-r, r[\times B_r^{m-1} &\longrightarrow \Omega \\ (t^1, t^2, \dots, t^m) &\longmapsto \Phi(t^1, a + t^2 e_2 + \dots + t^m e_m), \end{aligned}$$

où B_r^{m-1} est la boule de rayon r dans \mathbb{R}^{m-1} et $\Phi : \Delta_X \longrightarrow \Omega$ est le flot de X . On remarque que $d\Psi_0 = \text{Id}$ et que Ψ est de classe \mathcal{C}^k . On applique le théorème d'inversion locale et on en déduit que si r est suffisamment petit, Ψ est un difféomorphisme vers son image.

Enfin un calcul immédiat donne

$$X(\Psi(t^1, t^2, \dots, t^m)) = \frac{\partial \Psi}{\partial t^1}(t^1, t^2, \dots, t^m),$$

et le résultat s'ensuit. *CQFD*.

7.6 Champs de vecteur complets

Rappelons qu'un champ de vecteur X sur Ω est dit complet si $\Delta_X = \mathbb{R} \times \Omega$. Le résultat suivant permet, entre autre, d'obtenir une condition suffisante sur un champ de vecteur pour qu'il soit complet.

Théorème 18 Soit $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^m)$ un champ de vecteur et $a \in \Omega$. Soit I_a l'intervalle de la solution maximale issue de a . Notons $\gamma(t) := \Phi(t, a)$ la courbe intégrale de X passant par a en $t = 0$. Alors

- I_a est ouvert et on a donc $I_a =]t', t''[$, où $t', t'' \in [-\infty, \infty]$
- si t'' est fini, alors, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un temps $T > 0$ tel que $\gamma(T) \notin K$ (on dit que γ sort de tout compact)
- de même, si t' est fini, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un temps $T < 0$ tel que $\gamma(T) \notin K$

Ce résultat entraî ne aussitôt ce qui suit.

Corollaire 3 Soit $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^m)$ un champ de vecteur à support compact, c'est à dire qui s'annule en dehors d'un compact. Alors X est complet.

Preuve du Théorème La première assertion est une conséquence du Théorème d'existence. Nous nous contenterons de montrer la deuxième propriété (la dernière étant identique). Raisonnons par l'absurde et supposons que t'' est fini et qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\forall t \in [0, t''[\gamma(t) \in K$. Puisque K est compact, on peut construire une suite $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de réels dans $[0, t''[$ qui converge vers t'' et telle que $\gamma(t_j)$ converge vers un point $m \in K$. Remarquons que, puisque K est compact, X est borné sur K et donc $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ est borné. Donc en particulier, γ est lipschitzien sur $[0, t'']$. On déduit de tout cela que $\lim_{t \rightarrow t''} \gamma(t) = m$. Posons $\gamma(t'') := m$. Alors γ est dérivable sur $[0, t'']$ (car $\dot{\gamma} = X \circ \gamma$ est continu et borné sur $]0, t''[$ et on peut prolonger cette fonction par continuité en t''). Donc on peut, par recollement avec une solution intégrale issue de m prolonger la solution, ce qui est une contradiction. *CQFD.*

7.7 Retour à la géométrie : champs de vecteur sur une variété

Par la même démarche que celle utilisée pour définir les p -formes différentielles sur une variété, nous pouvons définir des champs de vecteur sur une variété.

Définition 32 *Soit \mathcal{M} une variété différentielle. Un champ de vecteur X sur \mathcal{M} est la donnée, en chaque point $M \in \mathcal{M}$ d'un vecteur $X(M) \in T_M\mathcal{M}$.*

La régularité de X est précisée comme suit : supposons que \mathcal{M} soit de classe \mathcal{C}^k et soit $U \subset \mathcal{M}$ et $x : U \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$ une carte locale de classe \mathcal{C}^k . Nous appellerons *image de X par x* le champ de vecteur x_*X défini sur Ω par

$$\forall \xi \in \Omega, \quad x_*X(\xi) = dx_{x^{-1}(\xi)} (X(x^{-1}(\xi)))$$

ou, de façon équivalente,

$$\forall M \in \mathcal{M}, \quad x_*X(x(M)) = dx_M(X(M)).$$

Nous dirons que X est de classe \mathcal{C}^l si et seulement si x_*X est de classe \mathcal{C}^l . Cette définition n'a de sens que si $k \geq l + 1$.

Supposons que la variété soit de classe \mathcal{C}^2 et que le champ de vecteur X soit de classe \mathcal{C}^1 , et soit $x : U \longrightarrow \Omega$ une carte locale. Nous pouvons alors intégrer le champ de vecteur x_*X : cela nous donne l'application $\Phi_{x_*X} : \Delta_{x_*X} \longrightarrow \Omega$ (où $\Delta_{x_*X} \subset \mathbb{R} \times \Omega$), solution de $\Phi_{x_*X}(0, \xi) = \xi$ sur Ω et $\frac{\partial \Phi_{x_*X}}{\partial t}(t, \xi) = x_*X(\Phi_{x_*X}(t, \xi))$.

Soit $\Delta_{X,U} := \{(t, M) \in \mathbb{R} \times U / (t, x(M)) \in \Delta_{x_*X}\}$, nous définissons alors le flot de X sur U comme étant l'application Φ_U :

$\Delta_{X,U} \longrightarrow U$ telle que $\Phi_U(t, M) = x^{-1}(\Phi_{x^*X}(t, x(M)))$.

Cette définition dépend-elle ou non de la carte utilisée ? Vous avez deviné que non. Il ne vous reste plus qu'à le vérifier, en utilisant le théorème 13. Un dernier travail consisterait à vérifier que l'on peut recoller les morceaux et définir un flot global $\Phi : \Delta_X \longrightarrow \mathcal{M}$, où $\Delta_X \subset \mathbb{R} \times \mathcal{M}$.

Chapitre 8

Calcul des variations

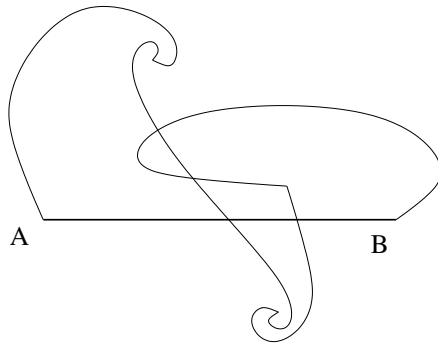


FIG. 8.1 – Quel est le plus court chemin entre les points A et B ?

Un des problèmes les plus élémentaires en calcul des variations consiste à trouver le plus court chemin entre deux points A et B dans le plan euclidien E^2 . Chacun sait — comme Euclide — que c'est le segment de droite joignant ces deux points : en voici une preuve. Nous notons \mathcal{E} l'ensemble des chemins γ de classe \mathcal{C}^1 joignant A à B , c'est à dire tels que $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], E^2)$, $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$. La longueur de l'arc immergé représenté par γ est

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Considérons, parmi tous les $\gamma \in \mathcal{E}$, le chemin $\gamma_0(t) = (1-t)A + tB$. Nous allons montrer que $\forall \gamma \in \mathcal{E}$, $\mathcal{L}(\gamma) \geq \mathcal{L}(\gamma_0)$. Soit $\vec{u} := \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ et considérons la 1-forme différentielle α sur E^2 , définie par

$$\alpha_M(V) := \langle \vec{u}, V \rangle.$$

Notons que, comme $\dot{\gamma}_0(t) = |\vec{AB}|\vec{u}$, $\forall t$ et $|\vec{u}| = 1$, on a

$$\mathcal{L}(\gamma_0) = \int_0^1 |\vec{AB}| dt = \int_0^1 \langle \vec{u}, \dot{\gamma}_0(t) \rangle dt = \int_0^1 \gamma_0^* \alpha.$$

Par ailleurs, on a aussi, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $\forall \gamma \in \mathcal{E}$,

$$\forall t \in [0, 1], \quad |\dot{\gamma}(t)| \geq \langle \vec{u}, \dot{\gamma}(t) \rangle = \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)).$$

Donc

$$\mathcal{L}(\gamma) \geq \int_0^1 \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_0^1 \gamma^* \alpha.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $d\alpha = 0$ et donc, par le lemme de Poincaré, qu'il existe une fonction $\beta : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\alpha = d\beta$. Nous pouvons alors utiliser le théorème de Stokes deux fois :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &\geq \int_0^1 \gamma^* d\beta = \int_0^1 d\gamma^* \beta \\ &= \beta \circ \gamma(1) - \beta \circ \gamma(0) = \beta \circ \gamma_0(1) - \beta \circ \gamma_0(0) \\ &= \int_0^1 d\gamma_0^* \beta = \int_0^1 \gamma_0^* d\beta = \mathcal{L}(\gamma_0). \end{aligned}$$

Exercice — Démystifiez cette preuve : utilisez un système de coordonnées cartésiennes sur E^2 , réécrivez tout et montrez que tout

ça vient de l'identité $\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0)$! Montrer aussi que la preuve marche tout aussi bien pour un segment dans un espace euclidien de dimension n quelconque.

Un autre exemple de problème variationnel, considéré il y a près de 2000 ans, est le suivant. Soit E_+^2 un demi-plan dans le plan euclidien E^2 , dont la frontière est la droite D et soient A et B deux points distincts dans E_+^2 : quel est, parmi tous les chemins γ qui vont de A à B dans E_+^2 en passant par un point de D , celui de longueur minimale ? Appelons C le point où γ touche la droite D . D'après ce qui précède, il est clair que le chemin minimal doit forcément être constitué par un segment de droite entre A et C , suivi d'un segment de droite entre C et B .

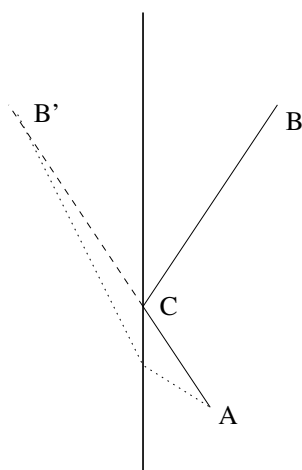


FIG. 8.2 – Reflection d'un rayon lumineux sur un miroir plan

Quelle est la position optimale pour C ? Une astuce pour répondre à cette question consiste à dessiner le point B' , symétrique de B par rapport à la droite D . A tout chemin Γ , constitué par les segments de droites $[A, C]$ et $[C, B]$, nous associons le chemin Γ' ,

constitué par les segments de droites $[A, C]$ et $[C, B']$. Ces chemins ont même longueur et donc il revient au même de trouver le chemin le plus court entre A et B' — qui est de nouveau un segment de droite. Nous remarquons ainsi que le chemin le plus court est celui suivi par un rayon lumineux qui va de A en B en se réfléchissant sur un miroir figuré par D : cette observation est le principe de Héron d'Alexandrie et la preuve que nous avons vue est dûe à Héron et date du premier siècle après Jésus Christ.

Ce principe a été généralisé par Pierre de Fermat (1601–1665) pour décrire le trajet d'un rayon lumineux dans des milieux où l'indice de réfraction n varie : le chemin suivi par le « rayon lumineux » entre les points A et B est la courbe dont la longueur est minimale, à condition d'appeler « longueur » l'intégrale

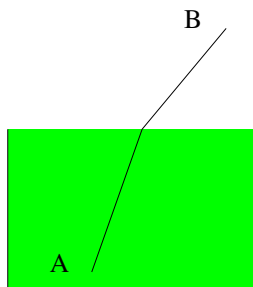


FIG. 8.3 – Réfraction d'un rayon lumineux

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_{\Gamma} n \, dl = \int_0^1 n \circ \gamma(t) |\dot{\gamma}(t)| \, dt,$$

où le trajet Γ a été paramétrisé par $t \in [0, 1]$ via γ . C'est ce que l'on appelle le principe de Fermat, il permet de retrouver les relations sur les angles de réfraction de la lumière à la surface séparant deux milieux d'indices optiques différents (les lois

de Descartes... découvertes plusieurs années avant Descartes par le hollandais Willebrord Snell).

Plus généralement, on va s'intéresser à la situation suivante : \mathcal{E} est un ensemble d'applications entre deux variétés (ou un ensemble de sous-variétés d'une variété) satisfaisant certaines conditions, qui décrivent la configuration ou l'évolution d'un système physique et \mathcal{L} est une fonction de \mathcal{E} vers \mathbb{R} , correspondant plus ou moins à une énergie, que l'on appelle *fonctionnelle*. On cherche alors les applications dans \mathcal{E} qui minimisent la fonctionnelle \mathcal{L} , appelées *minima* de \mathcal{L} , sensées, selon les principes de « moindre action » de Leibniz et Maupertuis représenter ce que « choisit » la nature.

Comment caractériser les minima ? Supposons pour simplifier que l'ensemble \mathcal{E} soit un sous-ensemble ouvert d'un espace vectoriel, en général de dimension infinie, et supposons que \mathcal{L} soit différentiable partout. Cela signifie qu'au voisinage d'un minimum $f_0 \in \mathcal{E}$, on peut écrire

$$\mathcal{L}(f_0 + \varepsilon g) = \mathcal{L}(f_0) + \varepsilon d\mathcal{L}_{f_0}(g) + o(\varepsilon),$$

où g est une déformation infinitésimale de f_0 telle que $f_0 + \varepsilon g \in \mathcal{M}$, pour ε suffisamment petit ($g \in T_{f_0}\mathcal{E}$).

Supposons que la différentielle de \mathcal{L} en f_0 , $d\mathcal{L}_{f_0}$, soit non nulle. Cela signifie qu'il existe une déformation infinitésimale $g \in T_{f_0}\mathcal{E}$ telle que $d\mathcal{L}_{f_0}(g) \neq 0$. Quitte à changer g en $-g$ si nécessaire, nous pouvons toujours supposer que $d\mathcal{L}_{f_0}(g) < 0$. Cela entraîne que, si ε est suffisamment petit,

$$\mathcal{L}(f_0 + \varepsilon g) < \mathcal{L}(f_0).$$

Et donc f_0 ne peut pas être un minimum (même local). En passant à la contraposée, nous en déduisons le résultat suivant

Définition 33 *On appelle **minimum global de \mathcal{L}** toute application $f_0 \in \mathcal{E}$, telle que $\forall f \in \mathcal{E}$, $\mathcal{L}(f_0) \leq \mathcal{L}(f)$. On appelle **minimum local de \mathcal{L}** tout $f_0 \in \mathcal{E}$, telle qu'il existe un voisinage V_{f_0} de f_0 dans \mathcal{E} , tel que $\forall f \in V_{f_0}$, $\mathcal{L}(f_0) \leq \mathcal{L}(f)$. Bien évidemment, tout minimum global est un minimum local. Enfin on appelle **point critique de \mathcal{L}** toute application $f_0 \in \mathcal{E}$ telle que $d\mathcal{L}_{f_0}(g) = 0$.*

Proposition 2 *Tout minimum local est un point critique.*

Une conséquence est que l'on doit chercher les minima de \mathcal{L} parmi les solutions de l'équation $d\mathcal{L}_{f_0}(g) = 0$. Mais l'intérêt de l'étude des points critiques n'est pas uniquement d'aider à caractériser les minima. Ainsi par exemple dans le cas des principes de Héron et de Fermat en optique, on doit plutôt énoncer : « le trajet suivi par la lumière est un point critique de la longueur ». Un exemple est donné dans la figure 8, où le rayon lumineux va du point A au point B , en se réfléchissant sur les parois de deux miroirs parallèles. Le rayon lumineux peut se réfléchir en C ou en C' et dans le deuxième cas, la longueur du trajet est plus grande, mais les deux trajets sont des points critiques de la fonctionnelle « longueur parcourue ».

Le principe variationnel découvert par Héron et Fermat a en fait un champ d'applications beaucoup plus large que l'optique,

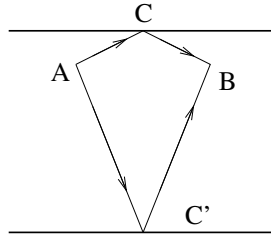


FIG. 8.4 – Principe de Héron : la lumière ne choisit pas toujours le chemin le plus court.

et s'applique également à la mécanique. Ainsi au dix-huitième siècle, Leibniz, puis Maupertuis ont observé que les équations de la dynamique de Newton, $m \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) = \vec{F}(\gamma)$, pouvaient être vues comme une conséquence d'un principe variationnel, à condition que le champ de force \vec{F} dérive d'un potentiel, comme c'est le cas pour la force de gravitation.

On peut l'énoncer de la façon suivante : un point matériel de masse m évolue dans l'espace (euclidien) E^3 de dimension 3 entre les instants t_0 et t_1 , où $t_0 < t_1$. Nous savons qu'il se trouve au point M_0 au temps t_0 et au point M_1 au temps t_1 — nous pouvons donc formuler cela en disant que sa trajectoire est décrite par un chemin dans $\mathcal{E} := \{\gamma \in \mathcal{C}^2([t_0, t_1], E^3) / \gamma(t_0) = M_0, \gamma(t_1) = M_1\}$. Entre-temps ce point est soumis au champ de force $\vec{F}(x) = -\nabla V(x)$. Le principe de Leibniz–Maupertuis nous dit alors que la trajectoire observée physiquement est un point critique de l'action $\mathcal{A} := \int_{t_0}^{t_1} (E_c - E_p) dt$, où E_c est l'énergie cinétique et E_p est l'énergie potentielle. Si $\gamma \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left(m \frac{|\dot{\gamma}(t)|^2}{2} - V(\gamma(t)) \right) dt.$$

Ecrivons la condition de point critique : cela signifie que, pour

toute variation infinitésimale $\delta\gamma \in \mathcal{C}^2([t_0, t_1], E^3)$, telle que $\delta\gamma(t_0) = \delta\gamma(t_1) = 0$ (de façon à ce que $\gamma + \varepsilon \delta\gamma$ soit bien dans \mathcal{E}),

$$\mathcal{A}(\gamma + \varepsilon \delta\gamma) = \mathcal{A}(\gamma) + o(\varepsilon),$$

ou, puisque $\mathcal{A}(\gamma + \varepsilon \delta\gamma) = \mathcal{A}(\gamma) + \varepsilon d\mathcal{A}_\gamma(\delta\gamma) + o(\varepsilon)$,

$$d\mathcal{A}_\gamma(\delta\gamma) = 0.$$

Calculons $d\mathcal{A}_\gamma(\delta\gamma)$: pour cela, le plus simple est encore de substituer $\gamma + \varepsilon \delta\gamma$ dans \mathcal{A} et d'écrire le développement de Taylor :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\gamma + \varepsilon \delta\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(m \frac{|\dot{\gamma} + \varepsilon \dot{\delta}\gamma|^2}{2} - V(\gamma + \varepsilon \delta\gamma) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(m \frac{|\dot{\gamma}|^2}{2} - V(\gamma) \right) dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(m \langle \dot{\gamma}, \dot{\delta}\gamma \rangle - \langle \nabla V(\gamma), \delta\gamma \rangle \right) dt \end{aligned}$$

Donc,

$$d\mathcal{A}_\gamma(\delta\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left(m \langle \dot{\gamma}, \dot{\delta}\gamma \rangle - \langle \nabla V(\gamma), \delta\gamma \rangle \right) dt.$$

Nous intégrons par partie le terme provenant de l'énergie cinétique :

$$\int_{t_0}^{t_1} m \langle \dot{\gamma}, \dot{\delta}\gamma \rangle dt = [m \langle \dot{\gamma}, \delta\gamma \rangle]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m \langle \ddot{\gamma}, \delta\gamma \rangle dt.$$

Nous observons que le premier terme dans le membre de droite s'annule car $\delta\gamma(t_0) = \delta\gamma(t_1) = 0$. Il nous reste donc

$$d\mathcal{A}_\gamma(\delta\gamma) = - \int_{t_0}^{t_1} \langle m\ddot{\gamma} + \nabla V(\gamma), \delta\gamma \rangle dt.$$

Donc nous trouvons que γ est point critique de \mathcal{A} si et seulement si

$$m\ddot{\gamma} = -\nabla V(\gamma),$$

et nous retrouvons ainsi la loi de Newton.

8.1 Equation d'Euler-Lagrange

Nous allons généraliser ce qui précède. Considérons tout d'abord un problème variationnel sur des courbes γ à valeurs dans un espace affine E^n . Nous considérons $\mathcal{E} := \{\gamma \in \mathcal{C}^2([t_0, t_1]) / \gamma(t_0) = a, \gamma(t_1) = b\}$, où a et b sont les points de départ et d'arrivée, fixés dans E^n . Nous considérons aussi une fonction

$$\begin{aligned} L : [t_0, t_1] \times E^n \times \vec{E}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, v) &\longmapsto L(t, x, v), \end{aligned}$$

que nous supposons être de classe \mathcal{C}^2 . Alors nous associons à tout chemin $\gamma \in \mathcal{E}$, l'action (ou le lagrangien)

$$\mathcal{A}(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

A quelle condition un chemin γ est-il point critique de \mathcal{A} ? De façon plus précise, nous cherchons s'il existe une condition sous forme d'une équation différentielle satisfaite par γ pour tout temps t . Pour cela nous procédons comme pour le principe de Leibniz-Maupertuis : nous calculons d'abord $d\mathcal{A}_\gamma(\delta\gamma)$ en substituant $\gamma + \varepsilon \delta\gamma$ dans \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A}(\gamma + \varepsilon \delta\gamma) =$$

$$\mathcal{A}(\gamma) + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \delta\gamma^i(t) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \delta\dot{\gamma}^i(t) \right) dt + o(\varepsilon),$$

(Nous avons omis les signes $\sum_{i=1}^n$). Donc

$$d\mathcal{A}_\gamma(\delta\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \delta\gamma^i(t) + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \delta\dot{\gamma}^i(t) \right) dt.$$

A nouveau nous intégrons par partie le second terme en utilisant le fait que $\delta\gamma(t_0) = \delta\gamma(t_1) = 0$. Cela donne :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_\gamma(\delta\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \delta\gamma^i(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) \delta\gamma^i(t) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) \right) \delta\gamma^i(t) dt. \end{aligned}$$

Et nous trouvons que, pour que $d\mathcal{A}_\gamma(\delta\gamma) = 0$, pour tout $\delta\gamma \in T_\gamma\mathcal{E}$, il faut et il suffit que γ satisfasse l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \forall i. \quad (8.1)$$

Remarquons qu'il s'agit d'une équation du deuxième ordre en t : si on développe l'équation d'Euler-Lagrange, on trouve (en omettant les dépendances en t et le signe $\sum_{j=1}^n$ pour alléger les notations)

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial t}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial x^j}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \ddot{\gamma}^j = 0, \quad \forall i.$$

8.2 Calcul des variations à plusieurs variables

On rencontre également beaucoup de problèmes variationnels en physique ou en géométrie à plusieurs variables, c'est à dire où le temps t est remplacé par une variable $t \in \Omega$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^m . (Dans beaucoup de cas, \mathbb{R}^m est l'espace et $m = 3$.) Un exemple est l'équilibre thermique d'une pièce de matériau conducteur : supposons qu'un tel matériau (homogène) emplisse un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et que la température soit imposée au bord de Ω (par le contact avec un milieu extérieur). On peut alors représenter l'état thermique par une fonction $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta = \theta_0$ sur $\partial\Omega$, où θ_0 est une fonction fixée sur $\partial\Omega$. A l'équilibre, θ est un minimum (donc un point critique) de la fonctionnelle

$$\mathcal{L}(\theta) := \int_{\Omega} |\nabla\theta|^2 dt^1 dt^2 dt^3, \quad \text{où } |\nabla\theta|^2 := \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial\theta}{\partial t^\alpha} \right)^2.$$

Ecrivons que θ est point critique de \mathcal{L} : calculons d'abord $d\mathcal{L}_\theta(\psi)$ en substituant $\theta + \varepsilon \psi$ à θ dans \mathcal{L} ,

$$\mathcal{L}(\theta + \varepsilon \psi) = \mathcal{L}(\theta) + 2\varepsilon \int_{\Omega} \langle \nabla\theta, \nabla\psi \rangle dt^1 dt^2 dt^3 + o(\varepsilon).$$

A présent nous intégrons par partie, c'est à dire nous utilisons la formule de Stokes, pour obtenir

$$d\mathcal{L}_\theta(\psi) = 2 \int_{\partial\Omega} \psi \langle \nabla\theta, \vec{n} \rangle d\sigma - 2 \int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\nabla\theta) dt^1 dt^2 dt^3,$$

où \vec{n} est la normale extérieure et $d\sigma$ est l'élément d'aire sur $\partial\Omega$. Comme $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$ (pour que $\theta + \varepsilon \psi$ coïncide avec θ sur

le bord), il reste $d\mathcal{L}_\theta(\psi) = -2 \int_\Omega \psi \operatorname{div}(\nabla\theta) dt^1 dt^2 dt^3$. Cela nous donne l'équation

$$\Delta\theta = \operatorname{div}(\nabla\theta) = \sum_\alpha \frac{\partial^2\theta}{(\partial t^\alpha)^2} = 0.$$

Remarque — Nous avons utilisé la formule de Stokes sous la forme $\int_\Omega \langle X, \nabla(\psi) \rangle dt^1 dt^2 dt^3 = \int_{\partial\Omega} \psi \langle X, n \rangle d\sigma - \int_\Omega \psi \operatorname{div}(X) dt^1 dt^2 dt^3$, avec $X = \nabla\theta$. Nous aurions pu formuler ce calcul en utilisant les formes différentielles. Pour cela notons $\beta := \frac{\partial\theta}{\partial t^1} dt^2 \wedge dt^3 + \frac{\partial\theta}{\partial t^2} dt^3 \wedge dt^1 + \frac{\partial\theta}{\partial t^3} dt^1 \wedge dt^2$. Alors

$$\int_\Omega \langle \nabla\theta, \nabla(\psi) \rangle dt^1 dt^2 dt^3 = \int_\Omega \langle \nabla\theta, \nabla(\psi) \rangle dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3 = \int_\Omega \left(\sum_\alpha \frac{\partial(\psi)}{\partial t^\alpha} dt^\alpha \right) \wedge \beta,$$

Mais $\left(\sum_\alpha \frac{\partial(\psi)}{\partial t^\alpha} dt^\alpha \right) \wedge \beta = d(\psi) \wedge \beta = d(\psi \beta) - \psi d\beta$. Donc, en utilisant la formule de Stokes,

$$\int_\Omega \left(\sum_\alpha \frac{\partial(\psi)}{\partial t^\alpha} dt^\alpha \right) \wedge \beta = \int_{\partial\Omega} \psi \beta - \int_\Omega \psi d\beta.$$

Et comme $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$ et $d\beta = \Delta\theta dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3$, on retrouve le résultat.

Il s'agit là d'une version particulière du calcul de l'équation d'Euler–Lagrange pour un problème variationnel du type suivant. On considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ et on se donne un ensemble $\mathcal{E} := \{u \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^n) / u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et une fonction de classe \mathcal{C}^2

$$\begin{aligned} L : \Omega \times E^n \times M(\mathbb{R}^m, \vec{E}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, y, v) &\longmapsto L(t, x, v), \end{aligned}$$

où $M(\mathbb{R}^m, \vec{E}^n)$ est l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^m vers \vec{E}^n . A tout $u \in \mathcal{E}$, on associe le Lagrangien

$$\mathcal{L}(u) := \int_{\Omega} L(t, u(t), du(t)) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^m.$$

Exercice — Démontrer que les points critiques $u \in \mathcal{E}$ de \mathcal{L} satisfont le système d'équations d'Euler–Lagrange

$$\sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha^i}(t, u(t), du(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial y^i}(t, u(t), du(t)), \quad \forall t \in \Omega, \forall i.$$

8.3 Equations de Hamilton

Dans ce qui suit, nous revenons au calcul des variations à une variable.

Il arrive souvent que l'on écrive la loi de Newton $m\ddot{\gamma} = -\nabla V(\gamma)$ sous une forme légèrement différente :

$$\frac{dp}{dt} = -\nabla V(\gamma) \iff \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}(\gamma), \quad (8.2)$$

où $p := m\dot{\gamma}$ est appelé l'*impulsion*, la *quantité de mouvement* ou encore le *moment* de la particule. Un intérêt de cette écriture est que l'on sait que, pour une ou plusieurs particules qui ne sont pas soumises à des forces extérieures, la quantité de mouvement totale est conservée. Cela est une conséquence immédiate de la loi de Newton. Mais il y a d'autres raisons pour préférer manipuler l'impulsion d'une particule, plutôt que sa vitesse et en particulier le fait que la notion d'impulsion se généralise de façon naturelle

dans le cadre de la relativité ou de la mécanique quantique. Pourquoi ?

Tout cela se comprend mieux en revenant au principe de Maupertuis. Dans ce cas $L(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{m}{2}|\dot{\gamma}|^2 - V(\gamma)$ et on peut observer que les composantes de p se calculent en fonction de L par

$$p_i = m\dot{\gamma}^i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma, \dot{\gamma}).$$

Ainsi on remarque que l'équation d'Euler–Lagrange (8.1) présente d'avantage de similitudes avec la loi de Newton sous la forme (8.2) plutôt que sous la forme $m\ddot{\gamma} = -\nabla V(\gamma)$.

Plus généralement, pour tout problème variationnel à une variable $\mathcal{A}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$ ¹, nous poserons,

$$\pi_i(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$$

et nous appellerons *impulsion* cette quantité. De même nous pouvons interpréter le second membre de (8.1), c'est à dire la quantité $F_i := \frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma, \dot{\gamma})$, comme la composante d'une force. Ainsi (8.1) se réécrit $\frac{d\pi_i}{dt} = F_i$.

Mais l'histoire ne s'arrête pas là. Puisque nous avons dit que les variables impulsions étaient plus commodes que les variables vitesses, jouons le jeu jusqu'au bout et essayons d'écrire l'équation d'Euler–Lagrange (8.1) en utilisant les variables de position et d'impulsion. Commençons par mieux poser le problème : soit $\gamma : [t_0, t_1] \longrightarrow E^n$ une solution de (8.1), posons $c(t) := \frac{d\gamma}{dt}(t)$

¹nous supposons ici que L ne dépend pas de t , de façon à simplifier la présentation

(c comme célérité) et réécrivons (8.1) sous la forme d'un système d'équations du premier ordre

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma(t), c(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma(t), c(t)) \\ \frac{d\gamma}{dt}(t) = c(t). \end{cases} \quad (8.3)$$

Nous cherchons ensuite à substituer $\pi_i(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma(t), c(t))$ à c . Introduisons quelques notations. Rappelons que (x^i, v^i) sont les coordonnées locales sur $E^n \times \vec{E}^n$. Par ailleurs, les composantes $\pi_i(t)$ ne représentent pas les coordonnées d'un vecteur de \vec{E}^n , mais plutôt d'un covecteur $\pi(t) \in (\vec{E}^n)^*$. L'espace dans lequel vont vivre les nouvelles variables $\gamma(t)$ et $\pi(t)$ est donc $E^n \times (\vec{E}^n)^*$. Nous désignerons par (q^i, p_i) les coordonnées sur $E^n \times (\vec{E}^n)^*$. Le changement de variable se fait via l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E^n \times \vec{E}^n &\longrightarrow E^n \times (\vec{E}^n)^* \\ (x, v) &\longmapsto (q, p) = \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \right), \end{aligned}$$

où $\frac{\partial L}{\partial v}(x, v)$ est défini par $\frac{\partial L}{\partial v}(x, v)(\xi) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v)\xi^i$, $\forall \xi \in \vec{E}^n$. Nous avons besoin de supposer que Φ est un difféomorphisme : c'est l'hypothèse de Legendre (que nous ferons dans la suite). Notons

$$\begin{aligned} \Psi : E^n \times (\vec{E}^n)^* &\longrightarrow E^n \times \vec{E}^n \\ (q, p) &\longmapsto (x, v) = (q, \mathcal{V}(q, p)) \end{aligned}$$

son inverse, où $\mathcal{V}(q, p)$ est caractérisé par

$$\frac{\partial L}{\partial v^i}(q, \mathcal{V}(q, p)) = p_i \quad \text{et} \quad \mathcal{V}^i \left(q, \frac{\partial L}{\partial v}(q, v) \right) = v^i.$$

Le terme de gauche dans la première équation dans (8.3) est $\frac{d\pi_i}{dt}(t)$. Cherchons à exprimer le terme de droite

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma(t), c(t)) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma(t), \mathcal{V}(\gamma(t), \pi(t)))$$

en fonction de γ et π . Remarquons que (en omettant d'écrire les signes $\sum_{j=1}^n$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L \circ \Psi}{\partial q^i}(q, p) &= \frac{\partial}{\partial q^i}(L(q, \mathcal{V}(q, p))) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x^i}(q, \mathcal{V}(q, p)) + \frac{\partial L}{\partial v^j}(q, \mathcal{V}(q, p)) \frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial q^i}(q, p) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x^i}(q, \mathcal{V}(q, p)) + p_j \frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial q^i}(q, p). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(q, \mathcal{V}(q, p)) = -\frac{\partial}{\partial q^i}(p_j \mathcal{V}^j(q, p) - L \circ \Psi(q, p)). \quad (8.4)$$

Posons

$$H(q, p) := \sum_{j=1}^n p_j \mathcal{V}^j(q, p) - L \circ \Psi(q, p) = p_j \mathcal{V}^j(q, p) - L(q, \mathcal{V}(q, p)).$$

Cette fonction s'appelle l'*hamiltonien*. Nous pouvons maintenant réécrire la première équation dans (8.3) sous la forme

$$\frac{d\pi_i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(\gamma(t), \pi(t)).$$

A présent il nous reste à traduire la deuxième équation dans (8.3), cela donne $\frac{d\gamma}{dt}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t), \pi(t))$. Mais nous pouvons exprimer la fonction \mathcal{V} en fonction de l'hamiltonien. En effet :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) &= \mathcal{V}^i(q, p) + p_j \frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial p_i}(q, p) - \frac{\partial L}{\partial v^j}(q, \mathcal{V}(q, p)) \frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial p_i}(q, p) \\
&= \mathcal{V}^i(q, p) + p_j \frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial p_i}(q, p) - p_j \frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial p_i}(q, p) \\
&= \mathcal{V}^i(q, p).
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d\gamma^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma(t), \pi(t)).$$

Conclusion : le système d'équation obtenu à la place de (8.3) est

$$\begin{cases} \frac{d\pi_i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(\gamma(t), \pi(t)) \\ \frac{d\gamma^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma(t), \pi(t)). \end{cases} \quad (8.5)$$

Il s'agit des *équations de Hamilton* (découvertes plusieurs décennies avant Hamilton par Lagrange). On remarquera l'élégance de la symétrie entre les variables positions et impulsions.

On peut écrire ces équation sous une forme plus géométrique : notons $m(t) := \Phi(\gamma(y), c(t))$ l'application de $[t_0, t_1]$ dans $E^n \times (\vec{E}^n)^*$ (dont les coordonnées sont $q^i(m(t)) = \gamma^i(t)$ et $p_i(m(t)) = \pi_i(t)$) et considérons le champ de vecteur $\xi_H : E^n \times (\vec{E}^n)^* \longrightarrow \vec{E}^n \times (\vec{E}^n)^*$ défini par

$$\xi_H(q, p) := \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}(q, p) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Alors (8.5) équivaut à $\frac{dm}{dt}(t) = \xi_H(m(t))$.

Remarque — Pour écrire les équations de Hamilton, on fait souvent l'abus de notation $q^i(t) \simeq q^i \circ m(t) = \gamma^i(t)$ et $p_i(t) \simeq p_i \circ m(t) = \pi_i(t)$. Cela donne

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t)) \\ \frac{dq^i}{dt}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)). \end{cases}$$

Notons pour terminer que, dans le cas où $L(x, v) = \frac{m}{2}|v|^2 - V(x)$, on trouve que $H(q, p) = \frac{1}{2m}|p|^2 + V(q)$ (exercice : vérifier !), c'est à dire : H est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, donc est égal à l'énergie totale. Il s'agit d'un principe général : l'hamiltonien est l'énergie totale de la particule.

Exercice — Montrer que, si le problème est indépendant du temps, c'est à dire, si $L(t, x, v) = L(x, v)$ (ce que nous avons implicitement supposé dans les calculs de ce paragraphe), alors pour toute solution $t \mapsto (q(t), p(t))$ des équations de Hamilton, la valeur de $H(q(t), p(t))$ est constante.

Exercice — Réécrire ce qui précède dans le cas où $L(t, x, v)$ dépend du temps.

8.4 Géométrie symplectique

Ainsi les équations de Hamilton se résument à l'évolution d'un point $t \mapsto m(t) = (\gamma(t), \pi(t)) \in E^n \times (\vec{E}^n)^*$, gouvernée par l'équation $\frac{dm}{dt}(t) = \xi_H(m(t))$, où ξ_H a été défini au paragraphe précédent. Nous allons voir maintenant une construction géométrique de ξ_H .

Considérons $M^{2n} := E^n \times (\vec{E}^n)^*$ (l'espace dans lequel évolue m). Le point clef sera qu'en chaque point $m \in M^{2n}$ l'espace tangent $T_m M^{2n}$ est isomorphe (canoniquement) à $\vec{E}^n \times (\vec{E}^n)^*$. Cette structure particulière permet de construire une 1-forme différentielle « canonique » θ sur M^{2n} définie comme suit : si $m = (q, p) \in M^{2n}$ et si on note $\delta m = (\delta q, \delta p) \in T_m M^{2n}$, alors $\theta_m(\delta m)$ est égal au produit de dualité $(p, \delta q) = p(\delta q)$ (puisque $p \in (\vec{E}^n)^*$ et $\delta q \in \vec{E}^n$). Si on note (q^i, p_i) les coordonnées de m et $(\delta q^i, \delta p_i)$ les coordonnées de δm , alors

$$\theta_m(\delta m) = p_i \delta q^i \quad (\text{un signe } \sum_{i=1}^n \text{ est sous-entendu}),$$

si bien qu'en fait $\theta = p_i dq^i$; θ est appelée forme de Poincaré–Cartan. Sa différentielle

$$\omega := d\theta = dp_i \wedge dq^i$$

est appelée *forme symplectique*.

A présent, soit $H : M^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière; à partir de ω et de H , nous pouvons fabriquer une 1-forme différentielle $\xi_H \lrcorner \omega$ définie en tout point $m \in M^{2n}$ par

$$\begin{aligned} (\xi_H \lrcorner \omega)_m : T_m M^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \delta m &\longmapsto \omega(\xi_H, \delta m). \end{aligned}$$

Calculons $\xi_H \lrcorner \omega$: notant $\delta m = \delta q^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \delta p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ et utilisant la définition $\xi_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\xi_H \lrcorner \omega &= \omega \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}, \delta q^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \delta p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\
&= -\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i \\
&= -dH(\delta m), \quad \forall \delta m.
\end{aligned}$$

Donc

$$\xi_H \lrcorner \omega + dH = 0. \quad (8.6)$$

Inversement cette relation caractérise complètement ξ_H à partir de H .

Définition 34 Soit \mathcal{M} une variété différentielle de dimension paire. Une 2-forme ω sur \mathcal{M} est dite symplectique si et seulement si

1. $d\omega = 0$

2. $\forall m \in \mathcal{M}, \forall \xi \in T_m \mathcal{M}, \quad \xi \lrcorner \omega = 0 \implies \xi = 0.$

Si tel est le cas, alors on dit que (\mathcal{M}, ω) est une variété symplectique.

La condition 2. dans la définition 34 est précisément ce qui garantit le fait que, étant donnée une fonction $H : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique champ de vecteur ξ_H sur \mathcal{M} tel que $\xi_H \lrcorner \omega + dH = 0$. En effet, puisque l'application

$$\begin{array}{ccc}
T_m \mathcal{M} & \longrightarrow & T_m^* \mathcal{M} \\
\xi & \longmapsto & \xi \lrcorner \omega
\end{array}$$

est linéaire et injective et puisque $\dim T_m^* \mathcal{M} = \dim T_m \mathcal{M}$, c'est un isomorphisme.

8.5 Calcul des variations sur une variété

Il est possible de généraliser tout ce qui précède sur le calcul des variations à une variable, lorsque la trajectoire du point étudié est tracée sur une variété au lieu d'un espace affine. Il faut pour cela commencer par définir les « espaces de phases » correspondants.

Si \mathcal{N} est une variété de classe \mathcal{C}^k , avec $k \geq 2$, la réunion des espaces tangents $T_x\mathcal{N}$

$$T\mathcal{N} := \bigcup_{x \in \mathcal{N}} \{(x, v) / v \in T_x\mathcal{N}\}$$

peut être munie d'une structure de variété de classe \mathcal{C}^{k-1} de façon canonique (Exercice : construire un atlas). On appelle cette variété le *fibré tangent* de \mathcal{N} . De même, la réunion des espaces cotangents $T_m^*\mathcal{N}$

$$T^*\mathcal{N} := \bigcup_{x \in \mathcal{N}} \{(x, p) / p \in T_x^*\mathcal{N}\}$$

est aussi une variété de classe \mathcal{C}^{k-1} , appelé *fibré cotangent*.

Toute fonction suffisamment régulière $L : T\mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définit un lagrangien sur l'ensemble $\mathcal{E} := \{\gamma \in \mathcal{C}^2([t_0, t_1], \mathcal{N})\}$ par

$$\mathcal{A}(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

puisque $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in T\mathcal{N}$. (On aurait aussi pu supposer que L dépend du temps, *id est* $L : [t_0, t_1] \times T\mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.)

De plus nous pouvons définir la forme de Poincaré–Cartan θ sur $T^*\mathcal{N}$ de la façon suivante. Pour tout point $(q, p) \in T^*\mathcal{N}$ (où

$q \in \mathcal{N}$ et $p \in T_q^* \mathcal{N}$) et pour tout vecteur $\xi \in T_{(q,p)}(T^* \mathcal{N})$, on peut écrire $\xi = (\delta q, \delta p)$, où $\delta q \in T_q \mathcal{N}$ et $\delta p \in T_p(T_q^* \mathcal{N}) \simeq T_q^* \mathcal{N}$. Alors

$$\theta_{(q,p)}(\delta q, \delta p) = (p, \delta q) = p(\delta q),$$

au sens de la dualité entre $T_q^* \mathcal{N}$ et $T_q \mathcal{N}$. La différentielle

$$\omega := d\theta$$

est une forme symplectique définie sur la variété $T^* \mathcal{N}$. Dans des coordonnées locales (q^i, p_i) , où les q^i sont des coordonnées sur \mathcal{N} et les p_i des coordonnées sur $T_q^* \mathcal{N}$, la forme symplectique s'écrit $\omega = dp_i \wedge dq^i$: c'est une expression identique à celle rencontrée pour l'espace symplectique $E^n \times (\vec{E}^n)^*$. Ainsi le fibré cotangent de n'importe quelle variété différentielle est une variété symplectique avec une forme symplectique canonique.

Remarque — Il y a des exemples de variétés symplectiques qui ne sont pas des fibrés cotangents : sauriez-vous en trouver un exemple ?

Revenons au problème variationnel de départ : pour toute densité lagrangienne $L : T\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, nous pouvons définir sur $T\mathcal{N} \times_{\mathcal{N}} T^* \mathcal{N} := \{(x, v, p) / x \in \mathcal{N}, v \in T_x \mathcal{N}, p \in T_x^* \mathcal{N}\}$ la fonction

$$W(x, v, p) := p(v) - L(x, v).$$

Supposons que L soit tel que l'application $(x, v) \mapsto (x, p) = (x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v))$ soit un difféomorphisme entre $T\mathcal{N}$ et $T^* \mathcal{N}$ et soit $(q, p) \mapsto (q, \mathcal{V}(q, p))$ l'application inverse. Cela définit la transformée de Legendre. Nous pouvons remarquer que

$$\frac{\partial W}{\partial v}(q, \mathcal{V}(q, p), p) = 0, \quad \forall (q, p) \in T^*\mathcal{N} \quad (8.7)$$

(et cette équation est même la caractérisation de \mathcal{V}). Nous définissons l'hamiltonien $H : T^*\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$H(q, p) := W(q, \mathcal{V}(q, p), p), \quad \forall (q, p) \in T^*\mathcal{N}.$$

Le calcul de la différentielle de H ² se fait de façon immédiate si l'on utilise la relation (8.7) :

$$\begin{aligned} dH_{(q,p)} &= \frac{\partial W}{\partial q^i}(q, \mathcal{V}(q, p), p)dq^i + \frac{\partial W}{\partial p_i}(q, \mathcal{V}(q, p), p)dp_i \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x^i}(q, \mathcal{V}(q, p))dq^i + \mathcal{V}^i(q, p)dp_i. \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc que si $t \mapsto \gamma(t)$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma, \dot{\gamma}) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma, \dot{\gamma})$, alors γ et $\pi_i := \frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma, \dot{\gamma})$ sont solutions de $\frac{d\gamma^i}{dt} = \mathcal{V}^i(\gamma, \pi) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma, \pi)$ et $\frac{d\pi_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^i}(\gamma, \mathcal{V}(\gamma, \pi)) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(\gamma, \pi)$, c'est à dire des équations de Hamilton.

Il est enfin possible d'écrire les équations d'Hamilton d'une manière plus géométrique : $\frac{dm}{dt}(t) = \xi_H(m(t))$, où ξ_H est défini par $\xi_H \lrcorner \omega + dH = 0$.

²c'est à dire $dH = \frac{\partial W}{\partial q^i}(q, \mathcal{V}(q, p), p)dq^i + \frac{\partial W}{\partial v^j}(q, \mathcal{V}(q, p), p)\frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial q^i}(q, p)dq^i + \frac{\partial W}{\partial v^j}(q, \mathcal{V}(q, p), p)\frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial p_i}(q, p)dp_i + \frac{\partial W}{\partial p_i}(q, \mathcal{V}(q, p), p)dp_i$

Bibliographie

- [1] M. Audin, *Géométrie*, Belin.
- [2] I. Chavel, *Riemannian geometry, a modern introduction*, Cambridge University Press.
- [3] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, *Géométrie contemporaine*, tomes 1 et 2, édition Mir (réédition en anglais chez Springer sous le titre *Modern geometry*).
- [4] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer-Verlag.
- [5] J. Oprea, *Differential geometry and its applications*, Prentice Hall.
- [6] T. Willmore, *Riemannian geometry*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 1993.