Fonctions holomorphes

Frédéric Hélein

1 Définitions et exemples

1.1 Définitions

Nous donnons plusieurs définitions possibles d'une fonction holomorphe. Dans la suite, U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et f une fonction de U vers $\mathbb{C}$.

Définition 1 *On dit que f est holomorphe en $a \in U$ si et seulement si*

$$\lim_{z \to a, z \neq a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existe. La limite se note $f'(a)$ ou $\frac{df}{dz}(a)$ et s'appelle dérivée de f en a.

Analyse de la définition 1

Premièrement, il est possible de réécrire ce qui précède en

$$f(z) = f(a) + (z - a)g(z),$$

où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g(z) & = & \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, \text{ si } z \neq a \\ g(a) & = & f'(a). \end{array} \right.$$

Ainsi on voit immédiatement qu'une fonction holomorphe en a est nécessairement continue en a. Mais on a mieux: cela entraîne en particulier que f est différentiable, en tant que fonction de deux variables x et y. En effet, pour tout $Z = X + iY \in \mathbb{C}$,

$$f(a + tZ) = f(a) + tZg(a + tZ).$$

Donc

$$\frac{f(a + tZ) - f(a)}{t} = Zg(a + tZ)$$

admet une limite en $t = 0$, égale au nombre complexe $Zg(a) = Zf'(a)$. Donc f est différentiable en a et sa différentielle en a est

$$\begin{array}{rccc} df_a : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & Z & \longmapsto & Zf'(a), \end{array}$$

l'application linéaire donnée par la multiplication par $f'(a)$ dans $\mathbb{C}$, donc soit une similitude directe, soit l'application nulle. D'où la définition:

Définition 2 *f est holomorphe en a si et seulement si f est différentiable en a et sa différentielle est soit une similitude directe (c'est à dire la composée d'une rotation par une homothétie), soit nulle.*

Analyse de la définition 2

Une conséquence est que, en notant

$$df_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x} & \frac{\partial f^1}{\partial y} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x} & \frac{\partial f^2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

où $f = f^1 + if^2$ et $z = x + iy$, alors df_a est une similitude directe (ou l'application nulle) si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f^1}{\partial x} - \dfrac{\partial f^2}{\partial y} & = & 0 \\ \dfrac{\partial f^1}{\partial y} + \dfrac{\partial f^2}{\partial x} & = & 0. \end{array} \right. ,$$

Ces identités portent le nom d'*équation de Cauchy-Riemann.*

Remarque toute application $\mathbb{R}$-linéaire $A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$A(z) = \lambda z + \mu \overline{z},$$

où $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$ et λ et μ sont deux constantes complexes. En effet, si on écrit matriciellement

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix},$$

nécessairement,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & \frac{1}{2}(a_1^1 + a_2^2) + \frac{i}{2}(a_1^2 - a_2^1) \\ \mu & = & \frac{1}{2}(a_1^1 - a_2^2) + \frac{i}{2}(a_1^2 + a_2^1) \end{array} \right. .$$

En particulier, si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est différentiable en a, on peut appliquer cela à df_a. On notera $\lambda = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$ et $\mu = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)$ et on a ainsi

$$df_a = \frac{\partial f}{\partial z}(a) dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) d\overline{z},$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right),\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

Définition 3 *f est holomorphe en a si et seulement si f est différentiable en a et $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$. On note alors $\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{df}{dz}(a)$.*

Définition 4 *f est holomorphe sur U si et seulement si f est holomorphe en tout point de U. L'ensemble des fonctions holomorphes sur U se note $\mathcal{H}(U)$.*

Propriétés a) si f est holomorphe sur U et si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ partout, alors f est localement constante (en effet, on a alors $df = 0$).
b) $(\mathcal{H}(U), +, \times)$ est une algèbre. En effet, $\forall f, g \in \mathcal{H}(U)$, $f + g \in \mathcal{H}(U)$, $fg \in \mathcal{H}(U)$ et

$$(f+g)' = f' + g' \text{ et } (fg)' = f'g + fg'.$$

c) Si $f \in \mathcal{H}(U)$, $g \in \mathcal{H}(V)$ et $f(U) \subset V$, alors $g \circ f \in \mathcal{H}(U)$ et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'.$$

1.2 Exemples

a) Si P est un polynôme,

$$f(z) = P(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ et } f'(z) = P'(z) \text{ au sens algébrique.}$$

b) $f : z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^\star)$ et

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

c) Si P et Q sont des polynômes complexes et si $\{a_1, ..., a_k\}$ sont les racines de Q, $\frac{P}{Q} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_1, ..., a_k\})$.
d) Les séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

sur leurs disques de convergence. (cf plus loin.)

Contre-exemples
$|z|$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\overline{z}$, $|z|^2$ . . .

Proposition 1 *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, une série entière de rayon de convergence R (id est $\lim_{n\to 0} a_n r^n = 0$ dès que $r < R$). Alors, $\forall z \in B(0, R)$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

existe (au sens de la convergence normale sur tout compact inclus dans $B(0, R)$), est holomorphe sur $B(0, R)$ et

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Preuve
Soit $a \in B(0, R)$ et $z \in B(0, R)$. Pour étudier

$$\lim_{z \to a, z \neq a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

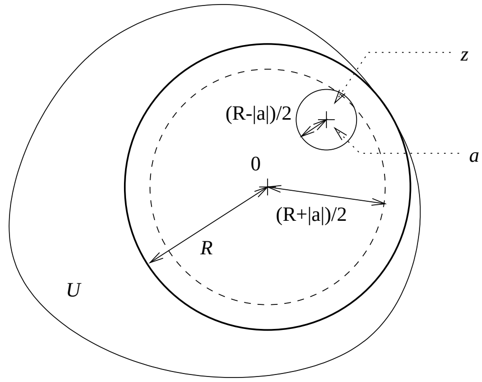

Figure 1: sur la preuve de la Proposition 1

on peut toujours supposer que $|a-z| < \frac{R-|a|}{2}$. Alors,

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - a^n}{z-a}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^n - a^n}{z-a} \right| &= |z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1}| \\ &\leq n \sup(|z|, |a|)^n \\ &\leq n \left(\frac{|a|+R}{2} \right)^n . \end{aligned}$$

Et $\sum_{n=1}^{\infty} na_n \left(\frac{|a|+R}{2} \right)^n$ est absolument convergente. Donc on peut permuter la limite et la sommation,

$$\lim_{z \to a, z \neq a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \text{ existe et vaut } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{z \to a, z \neq a} \frac{z^n - a^n}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}.$$

CQFD.

Exemples $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Il en est de même pour $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\mathrm{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ et $\mathrm{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$. On construit aussi ainsi $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, qui appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}))$.

1.3 Théorème d'inversion locale

Théorème 1 *Soit $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ tels que $f'(a) \neq 0$. Alors il existe un voisinage U_a de a dans U et un voisinage $V_{f(a)}$ de $f(a)$ tel que la restriction $f : U_a \longrightarrow V_{f(a)}$ soit un difféomorphisme et que l'application inverse soit holomorphe, avec*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(z) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(z)}.$$

Preuve Il s'agit de résoudre localement l'équation $f(z) = v$, où z est l'inconnu. L'hypothèse $f'(a) \neq 0$ entraîne que la différentielle df_a est une similitude directe de $\mathbb{R}^2$ et donc est inversible. Le théorème d'inversion local, appliqué aux applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ nous permet d'en déduire que $f : U_a \longrightarrow V_{f(a)}$ est difféomorphisme. De plus, nous savons que, si $\phi := f^{-1} : V_{f(a)} \longrightarrow U_a$,

$$\forall z \in U_a, \ d\phi_{f(z)} \circ df_z = \mathbb{1},$$

donc, en tout point $v = f(z)$, $d\phi_v$ est l'inverse d'une similitude directe de $\mathbb{R}^2$, donc également une similitude directe. Cela prouve que $\phi = f^{-1}$ est aussi holomorphe. Finalement il est simple de déduire de cette relation que le produit $\phi'(v)f'(z)$ dans $\mathbb{C}$ vaut 1. *CQFD.*

Application: définition du logarithme complexe. La *détermination principale du logarithme complexe* est l'unique application continue

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash] - \infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que $e^{\mathrm{Log} z} = z$ et $\mathrm{Log}1 = 0$. On peut vérifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash] - \infty, 0]$, il existe un unique $\rho \in]0, \infty[$ et un unique $\theta \in] - \pi, \pi[$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$ et qu'ainsi

$$\mathrm{Log} z = \mathrm{Log} \rho + i\theta.$$

En utilisant le théorème précédent, on déduit que $\mathrm{Log} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash] - \infty, 0])$. (Remarque: Log applique $\mathbb{C}\backslash] - \infty, 0]$ dans $\mathbb{R} \oplus] - i\pi, i\pi[$.)

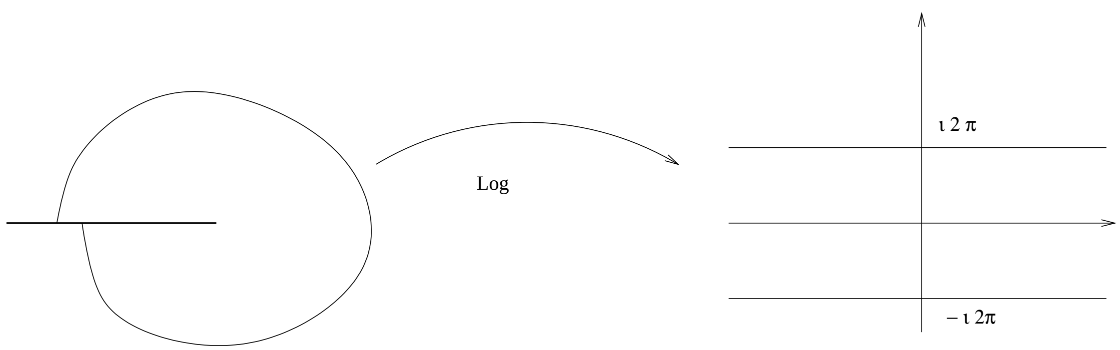

Figure 2: la détermination principale du logarithme complexe

2 Intégrale de Cauchy

2.1 Définitions

Soit Γ une courbe régulière (de classe $\mathcal{C}^1$), orientée dans $U \subset \mathbb{C}$. Cela signifie qu'il existe une paramétrisation $\gamma : I \longrightarrow U$ avec

- γ est de classe $\mathcal{C}^1$
- pour tout $t \in I$, $\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt} \neq 0$

- γ est injective.

On suppose de plus que l'on a choisi γ parcourant Γ dans le sens direct.

Définition 5 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. On note*

$$\int_{\Gamma+} f(z)dz := \int_I f \circ \gamma(t)\dot{\gamma}(t)dt.$$

On appelle cette quantité intégrale de Cauchy. *(Remarque: dans l'intégrale de droite, $f \circ \gamma(t)\dot{\gamma}(t)$ est un nombre complexe.)*

On peut proposer une autre définition.

Définition 6 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. On lui associe la 1-forme à coefficients complexes $\alpha := f(z)dz$. Soit $\Gamma+$ une courbe orientée régulière de $\mathbb{C}$. L'intégrale de Cauchy $\int_{\Gamma+} f(z)dz$ de f le long de Γ est égale à l'intégrale de la 1-forme*

$$\int_{\Gamma+} \alpha.$$

ou encore

Définition 7 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Décomposons $f = f^1 + if^2$, où f^1 et f^2 sont deux fonctions réelles sur U. On leur associe les 1-formes à coefficients réels $\beta^1 := f^1(z)dx - f^2(z)dy$ et $\beta^2 := f^2dx + f^1dy$. Soit $\Gamma+$ une courbe orientée régulière de $\mathbb{C}$. L'intégrale de Cauchy $\int_{\Gamma+} f(z)dz$ de f le long de Γ est égale à la somme des intégrales*

$$\int_{\Gamma+} \beta^1 + i\int_{\Gamma+} \beta^2.$$

L'équivalence entre les deux dernières définitions résulte de l'identité

$$\alpha = (f^1 + if^2)(dx + idy) = \beta^1 + i\beta^2.$$

On peut étendre toutes ces définitions au cas où Γ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceau (une ligne brisée). Cela signifie, notant $I =]t_0, t_n[$, que l'on peut trouver une paramétrisation continue $\gamma :]t_o, t_n[\longrightarrow U$ et qu'il existent des points $t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n$ tels que pour $i = 1, ..., n$, la restriction $\gamma_{|]t_{i-1},t_i[}$ coïncide avec un plongement de $[t_{i-1}, t_i]$. Alors

$$\int_{\Gamma+} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \circ \gamma(t)\dot{\gamma}(t)dt.$$

2.2 Formule de Stokes complexe et formule de Cauchy

Théorème 2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ dont le bord est une courbe régulière ($\mathcal{C}^1$). Nous orientons la courbe $\partial\Omega$ de la façon suivante: si n est la normale extérieure à $\partial\Omega$ et t est tangent à $\partial\Omega$, alors t est dans le sens direct si et seulement si (n, t) est un repère direct de $\mathbb{C}$. et nous notons $\partial\Omega^+$ la courbe ainsi orientée. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant Ω et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$. Alors,*

$$\int_{\partial\Omega^+} f(z)dz = 2i \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)dxdy.$$

Corollaire 1 *Si $f \in \mathcal{H}(U)$, alors $\int_{\partial\Omega^+} f(z)dz = 0$.*

Preuve a) *notations réelles*
On a $fdz = (f^1dx - f^2dy) + i(f^2dx + f^1dy)$. Nous appliquons la formule de Stokes pour les deux formes sur Ω.

$$\int_{\partial\Omega^+} f^1dx - f^2dy = \int_\Omega d(f^1dx - f^2dy) = \int_\Omega -\left(\frac{\partial f^1}{\partial y} + \frac{\partial f^2}{\partial x}\right) dx \wedge dy,$$

et

$$\int_{\partial\Omega^+} f^2dx + f^1dy = \int_\Omega d(f^2dx + f^1dy) = \int_\Omega \left(\frac{\partial f^1}{\partial x} - \frac{\partial f^2}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

D'où le résultat.
b) *notations complexes*
On travaille avec la formule de Stokes à coefficients complexes:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega^+} f(z)dz &= \int_\Omega d(f(z)dz) \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge dz \\
&= \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \wedge dz \\
&= \int_\Omega 2i\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

CQFD.

Corollaire 2 *(Formule de Cauchy) Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(U)$, où $\overline{\Omega} \subset U$, alors*

$$\int_{\partial\Omega^+} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

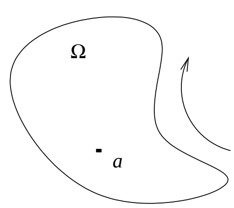

Figure 3: La formule de Cauchy

Preuve On considère, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $\overline{B(a,\epsilon)} \subset \Omega$ et $\Omega_\epsilon := \Omega \setminus \overline{B(a,\epsilon)}$. Comme $z \longmapsto \frac{f(z)}{z-a}$ est holomorphe sur $\overline{\Omega_\epsilon}$, on a

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon^+} \frac{f(z)dz}{z-a} = 0.$$

Noter que l'orientation sur la courbe $\partial B(a,\epsilon)$, vue comme une composante connexe du bord de Ω_ϵ est l'inverse de celle obtenue en considérant cette courbe comme le bord de $B(a,\epsilon)$. Ainsi,

$$(\partial\Omega_\epsilon^+) = (\partial\Omega^+) \cup (\partial B(a,\epsilon)^-).$$

Donc on a

$$\int_{\partial\Omega^+} \frac{f(z)dz}{z-a} - \int_{\partial B(a,\epsilon)^+} \frac{f(z)dz}{z-a} = 0.$$

Or,

$$\int_{\partial B(a,\epsilon)^+} \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\epsilon e^{i\theta})}{a+\epsilon e^{i\theta}-a}\epsilon i e^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})d\theta.$$

Utilisons le fait que f est continue en a: $\forall\eta > 0$, $\exists\epsilon > 0$, $|f(z) - f(a)| < \eta$ sur $B(a,\epsilon)$. Cela entraîne que

$$\left|2\pi i f(a) - \int_{\partial B(a,\epsilon)^+} \frac{f(z)dz}{z-a}\right| = \left|\int_0^{2\pi} (f(a) - f(a+\epsilon e^{i\theta}))id\theta\right| \leq 2\pi\eta.$$

Donc,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial B(a,\epsilon)^+} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a),$$

et on en déduit la formule. *CQFD.*

3 Conséquences de la formule de Cauchy

3.1 Les fonctions holomorphes sont analytiques complexes

Théorème 3 *Soit $f \in \mathcal{H}(U)$, alors pour tout point $a \in U$ et tout $R > 0$ tel que $\overline{B(a,R)} \subset U$, f est analytique complexe sur $B(a,R)$ et $\forall z \in B(a,R)$,*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$$

(série convergente sur $B(a,R)$).

Preuve Utilisons la formule de Cauchy: pour tout $z \in B(a,r)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)^+} \frac{f(v)dv}{v-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)^+} \frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{v-a}\right)}\frac{f(v)dv}{v-a} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,R)^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(v-a)^n}\frac{f(v)dv}{v-a}. \end{aligned}$$

La série qui apparaît étant normalement convergente pour $v \in \partial B(a,R)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \int_{\partial B(a,R)^+} \frac{f(v)dv}{(v-a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,R)^+} \frac{f(v)dv}{(v-a)^{n+1}},$$

et

$$|a_n| \leq \left(\sup_{\partial B(a,R)} |f(z)| \right) R^{-n}.$$

CQFD.

Corollaire 3 *Si $f \in \mathcal{H}(U)$, alors f est dérivable indéfiniment et toutes ses dérivées $f^{(n)}$ sont aussi dans $\mathcal{H}(U)$.*

Preuve Cela résulte de l'équivalence entre analytique et holomorphe et du fait que toute fonction analytique est indéfiniment dérivable et que ses dérivées sont toutes analytiques. *CQFD.*

Remarque *On a deux déterminations a posteriori des coefficients a_n:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,R)^+} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a). \tag{1}$$

3.2 Théorème de Liouville

Définition 8 *Une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$ est dite entière. $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est ainsi l'ensemble des fonctions entières.*

Lemme 1 *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $R \in]0, \infty[$,*

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,R)^+} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}},$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n$ a un rayon de convergence infini et

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n \text{ sur } \mathbb{C}.$$

Preuve La démonstration de ce résultat est une répétition de celle du théorème précédent. La seule chose à vérifier concerne le rayon de convergence. Pour tout $R \in]0, \infty[$, f est bornée sur le compact $\partial B(0, R)$:

$$\forall z \in \partial B(0, R), |f(z)| \leq M_R,$$

et ainsi , en vertu de (1),

$$|\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)| \leq \frac{M_R}{R^n}.$$

Donc le rayon de convergence de la série est supérieur à R. Comme R est arbitraire, cela prouve le résultat. *CQFD.*

Théorème 4 *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, alors*

- *si f est uniformément bornée sur $\mathbb{C}$, f est constante*
- *si $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, nécessairement $f = 0$*
- *si il existe une constante $C > 0$ et $k \in [0, \infty[$ tel que $|f(z)| \leq C(1 + |z|^k)$ sur $\mathbb{C}$, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k*

Preuve On a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

avec

$$\forall R > 0,\ |a_n| \leq \left(\sup_{z\in\partial B(0,R)} |f(z)|\right) R^{-n},$$

donc

- si f est uniformément bornée sur $\mathbb{C}$, $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $f(z) = a_0$
- Si $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, $a_n = 0$ pour tout $\in \mathbb{N}$ et $f = 0$
- si $|f(z)| \leq C(1 + |z|^k)$ sur $\mathbb{C}$, $a_n = 0$ pour tout $n > k$ et donc $f(z) = \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n$, où n_0 est le plus petit entier strictement plus petit que k.

CQFD.

Corollaire 4 *(Théorème de D'Alembert) Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$ (id est $\mathbb{C}$ est algébriquement clos).*

Preuve Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme non constant. Supposons que P ne s'annule jamais, alors $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ est une fonction entière qui tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers l'infini (puisque nécessairement $|P(z)|$ tend ∞ lorsque $|z|$ tend vers l'infini). Donc le théorème de Liouville nous dit que $f = 0$, c'est une contradiction. *CQFD.*

4 Zéros et singularités d'une fonction holomorphe

4.1 Les zéros d'une fonction holomorphe

Lemme 2 *Soit $f \in \mathcal{H}(U)$, $a \in U$. Alors trois cas se présentent*

- *$f(a) \neq 0$, alors $f \neq 0$ sur un voisinage de a.*
- *$f(a) = 0$ et $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{d^k f}{dz^k}(a) \neq 0$, alors il existe une boule $B(a, \epsilon)$ dans U telle que $f \neq 0$ sur $B(a, \epsilon) \setminus \{a\}$ et même $f(z) = (z - a)^k g(z)$ sur $B(a, \epsilon)$, où g est non nulle sur $B(a, \epsilon)$*
- *$f(a) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k f}{dz^k}(a) = 0$, alors f est nulle sur un voisinage de a*

Preuve Si le premier cas se produit, le fait que f ne s'annule pas sur un voisinage de a est juste un conséquence de la continuité de f. Dans le deuxième cas, soit k_0 le plus petit entier tel que $\frac{d^{k_0} f}{dz^{k_0}}(a) \neq 0$. Alors, puisque f est analytique,

$$f(z) = \sum_{n \geq k_0}^{\infty} a_k (z-a)^k, \text{ avec } a_{k_0} \neq 0,$$

ou bien encore $f(z) = (z-a)^{k_0} g(z)$, avec

$$g(z) = a_{k_0} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+k_0}}{a_{k_0}} (z-a)^n \right),$$

fonction non nulle sur un voisinage de a.

Enfin, il est clair que si les deux premiers cas ne se produisent pas, on se retrouve dans le dernier cas et, sur un voisinage de a,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(a)(z-a)^n = 0.$$

CQFD.

Définition 9 *Soit $f \in \mathcal{H}(U)$, $a \in U$. Dans le cas où f ne s'annule pas sur un voisinage de a, on appelle* ordre de f en a *et on note $ord_a f$ le plus petit entier k_0 tel que $f^{(k_0)}(a) \neq 0$. Dans le cas où f s'annule sur un voisinage de a, on pose $ord_a f = \infty$.*

A l'aide de ce qui précède, nous sommes en mesure de prouver le résultat suivant, qui sera à la base du prolongement analytique d'une fonction holomorphe.

Théorème 5 (prolongement analytique) *Supposons que U est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$, alors*

a) l'ensemble $\Omega = \{a \in U / ord_a f = \infty\}$ est ouvert et fermé dans U

b) si $f^{-1}(0)$ possède un point d'accumulation intérieur *à U et si U est connexe, alors $f = 0$.*

Preuve Montrons d'abord a):

- Ω est ouvert, car d'après le lemme précédent, si $a \in \Omega$, f s'annule sur un voisinage de a, donc en particulier ce voisinage est inclus dans Ω.

- Ω est fermé car c'est une intersection de fermés:

$$\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (f^{(k)})^{-1}(0).$$

A présent, soit A l'ensemble des points d'accumulation de $f^{-1}(0)$ intérieurs à U et montrons que $A = \Omega$ (notons qu'à cause de la continuité de f, il est immédiat que $A \subset f^{-1}(0)$). En effet, si a n'est pas dans Ω, $\text{ord}_a f < \infty$, alors d'après le lemme qui précède, il existe une boule $B(a, \epsilon) \subset U$, telle que $f \neq 0$ sur $B(a, \epsilon) \setminus \{a\}$ et donc a est un zéro isolé. Donc, a n'est pas dans A. Par contraposée, $A \subset \Omega$. Réciproquement, si $a \in \Omega$, alors, toujours d'après le lemme qui précède, f s'annule sur un voisinage de a, donc en particulier $a \in A$. Donc $\Omega \subset A$. Donc $\Omega = A$ et, en vertu de a), A est ouvert et fermé dans U.

Dans le cas où U est connexe, il en résulte que soit $A = \emptyset$, soit $A = U$. Donc si $f^{-1}(0)$ possède un point d'accumulation, $A = U$ et donc $f = 0$ sur U. *CQFD.*

Corollaire 5 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Alors, si l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaites*

- $\exists a \in U$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a),$$

ou

- *il existe une suite de points x_n, tous distincts et appartenant à U, telle que $\lim_{n\to\infty} x_n \in U$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = g(x_n)$*

alors $f = g$ sur U.

Preuve Appliquer le théorème précédent (prolongement analytique) avec $f - g$.

4.2 Singularités d'une fonction holomorphe

Nous allons commencer par analyser une fonction holomorphe sur un anneau.

Lemme 3 *Soit $0 < r_1 < r_2 < \infty$ et $A_{r_1,r_2} = \{z \in \mathbb{C}/r_1 < |z-a| < r_2\}$. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$, où U est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{A_{r_1,r_2}}$. Alors, pour tout $z \in A_{r_1,r_2}$,*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n,$$

où la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a un un rayon de convergence supérieur ou égal à r_2 et la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\frac{1}{r_1}$. De plus, a_n est donné par l'intégrale suivante, indépendante de r:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)^+} \frac{f(v)}{(v-a)^{n+1}} dv,$$

pour tout $r_1 < r < r_2$.

Preuve Grâce à un changement de variable, on peut toujours supposer que $a = 0$. Posons

$$a_{n,r} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)^+} \frac{f(v)}{v^{n+1}} dv.$$

Pour tout point $z \in A_{r_1,r_2}$, on a

$$\begin{aligned}
2\pi i f(z) &= \int_{\partial A^+_{r_1,r_2}} \frac{f(v)dv}{v-z} = \int_{\partial B(0,r_2)^+} \frac{f(v)dv}{v-z} - \int_{\partial B(0,r_1)^+} \frac{f(v)dv}{v-z} \\
&= \int_{\partial B(0,r_2)^+} \frac{f(v)}{v} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{v}\right)^n dv + \int_{\partial B(0,r_1)^+} \frac{f(v)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{v}{z}\right)^n dv \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\partial B(0,r_2)^+} \frac{f(v)}{v^{n+1}} dv + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z^{m+1}} \int_{\partial B(0,r_1)^+} f(v) v^m dv \\
&= 2\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n,
\end{aligned}$$

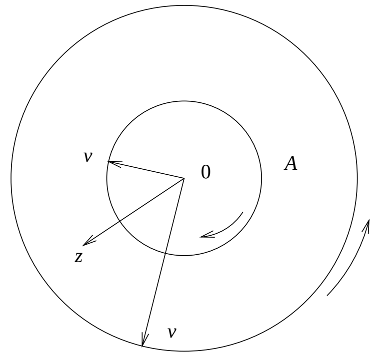

Figure 4: une fonction holomorphe sur un anneau

où $a_n = a_{n,r_2}$ si $n \geq 0$ et $a_n = a_{n,r_1}$ si $n \leq -1$. Donc, puisque f est bornée sur $\partial B(0, r_2)$, on a $|a_n| = |a_{n,r_2}| \leq \frac{\sup_{\partial B(a,r_2)} |f|}{r_2^n}$ si $n \geq 0$. Et, puisque f est bornée sur $\partial B(0, r_1)$, on a $|a_{-n}| = |a_{-n,r_1}| \leq \frac{\sup_{\partial B(0,r_1)} |f|}{(\frac{1}{r_1})^n}$ si $n \leq -1$, d'où les estimations sur les rayons de convergence.

Pour terminer, il ne reste plus qu'à vérifier que les coefficients $a_{n,r}$ sont indépendants de r. Supposons que $r_1 \leq r < r' \leq r_2$ et considérons l'anneau $A_{r,r'} = \{z \in \mathbb{C} / r < |z| < r'\}$, alors, puisque $v \longmapsto \frac{f(v)}{v^{n+1}}$ est holomorphe sur $\overline{A_{r,r'}}$,

$$0 = \int_{\partial A^+_{r,r'}} \frac{f(v)}{v^{n+1}} dv = \int_{\partial B(0,r')^+} \frac{f(v)}{v^{n+1}} dv - \int_{\partial B(0,r)^+} \frac{f(v)}{v^{n+1}} dv = 2\pi i (a_{n,r} - a_{n,r'}).$$

CQFD.

Corollaire 6 *Soit a, un point de U et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset U$. Alors, f admet un* développement de Laurent *sur $B(a,r) \setminus \{a\}$:*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n,$$

où la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à r et la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n$ a un rayon de convergence infini.

Preuve En appliquant le lemme précédent, on sait que f admet un tel développement sur tout anneau A_{r^1,r^2} avec des coefficients indépendants de r_1 et r_2. Donc le développement de Laurent existe sur $B(a,r) \setminus \{a\}$. Le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n$ est supérieur à $\frac{1}{r_1}$, où r_1 est arbitraire dans $]0, r[$, donc est infini. *CQFD.*

Lemme 4 *Soit $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$. Alors trois cas se présentent:*

- *f est bornée au voisinage de a, alors f s'étend en une unique fonction holomorphe sur tout U*
- *f n'est pas bornée au voisinage de a, mais il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $(z-a)^k f(z)$ soit bornée au voisinage de a. Alors il existe une fonction holomorphe $g \in \mathcal{H}(U)$ telle que $g(a) = 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^\star$ et il existe $\alpha_a \in \mathbb{C}^\star$ tels que*

$$f(z) = \frac{\alpha_a}{(z-a)^{k_0}}(1 + g(z)).$$

On dit que a est un ple *de f, d'*ordre *$ord_a f = -k_0$.*

- *soit $\forall k \in \mathbb{N}$, $(z-a)^k f(z)$ n'est jamais bornée au voisinage de a. On dit que f admet une* singularité essentielle *en a.*

Preuve La preuve consiste à suivre essentiellement la même démarche que dans la preuve du lemme précédent (section 2.1) sur les zéros d'une fonction holomorphe. Elle est donc laissée au lecteur. *CQFD.*

Définition 10 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, toute fonction f dans $\mathcal{H}(U \setminus \{a_j / j \in J\})$, où $(a_j)_{j\in J}$ est un sous-ensemble fini ou dénombrable de U et qui est telle que chaque point a_j est un* pôle*, c'est à dire une singularité d'ordre finie est appelée* fonction méromorphe sur *U. L'ensemble des fonction méromorphes sur U est noté $\mathcal{M}(U)$.*

4.3 Le théorème des résidus

Définition 11 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{M}(U)$. Si a est un ple de f et si $k_0 = ord_a f$, le résidu de f en a est le nombre complexe (non nul) $Rés_a f$ tel que, au voisinage de a,*

$$f(z) = \sum_{n=k_0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \text{ avec } a_{-1} = Rés_a f.$$

De manière équivalente,

$$2\pi i Rés_a f = \int_{\partial B(a,\epsilon)^+} f(v) dv.$$

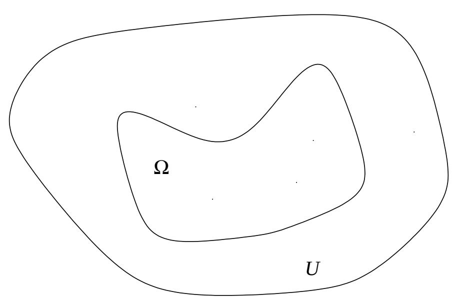

Figure 5: le théorème des résidus

Proposition 2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{M}(U)$. Soit Ω un ouvert à bord régulier (de classe $\mathcal{C}^1$), tel que $\overline{\Omega} \subset U$ et tel que $\partial\Omega$ ne rencontre pas les ples de f. Alors*

$$\int_{\partial\Omega^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a_j \in \Omega} Rés_{a_j}.f$$

Preuve Cette relation s'obtient en écrivant la formule de Cauchy sur le bord de $\Omega_\epsilon = \Omega \backslash \bigcup_{a,\text{ple de } f} \overline{B(a,\epsilon)}$, où l'on a choisi ϵ suffisamment petit. *CQFD.*

5 Principe du maximum et topologie

5.1 Le principe du maximum

Ce principe dit en gros que toute fonction holomorphe atteint le maximum de son module sur le bord ou à l'infini du domaine. Cette propriété n'est pas propre aux fonctions holomorphes, mais sera vraie pour toute solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique.

Théorème 6 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors*

a) si $|f|$ admet un maximum local en un point de U, alors f est constante

b) si $\exists M > 0$ telle que

$$\forall x \in \partial U, \quad \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in U}} |f(y)| \leq M$$

et

$$\limsup_{\substack{|y| \to \infty \\ y \in U}} |f(y)| \leq M,$$

alors $|f| \leq M$ sur U.

Preuve Commençons par la preuve de a), qui est la version locale du principe du maximum. Soit a un point intérieur à U, où $|f|$ atteint un maximum local, c'est à dire: il existe un voisinage $B(a,r)$ de a tel que $\forall z \in B(a,r)$, $|f(z)| \leq |f(a)|$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(a) \neq 0$. Soit $k = \text{ord}_a(f - f(a))$ et supposons que k est fini. Alors,

$$f(z) = f(a) + a_k(z-a)^k + O(|z-a|^{k+1}) = f(a)(1 + \frac{a_k}{f(a)}(z-a)^k + O(|z-a|^{k+1})).$$

Nous choisissons $\epsilon > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{f(a)}{a_k} = \left|\frac{f(a)}{a_k}\right| e^{i\theta}$ et nous posons $z = a + \epsilon e^{\frac{i\theta}{k}}$. Alors

$$f(z) = f(a)\left(1 + \left|\frac{a_k}{f(a)}\right| \epsilon^k + O(\epsilon^{k+1})\right),$$

et on en déduit que $|f(z)| > |f(a)|$ si ϵ est assez petit, ce qui est une contradiction. Donc, $\text{ord}_a(f - f(a))$ est infini, ce qui signifie que $f = f(a)$ partout, car U est connexe.

Pour prouver b), nous allons aussi raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe $a \in U$ tel que $|f(a)| > M$. Alors l'ensemble $A := \{b \in U / |f(b)| \geq |f(a)|\}$ est non vide. Il est clair que A est fermé dans U, puisque f est continue. Les hypothèses du théorème signifie que A est borné et fermé dans $\mathbb{C}$. Donc A est un ensemble compact non vide. Par conséquent, il existe $b \in A$ tel que f atteint son maximum en b. En particulier, b est un maximum local pour $|f|$ et donc, en appliquant ce qui précède, on obtient $f = f(b)$ sur U, ce qui, compte tenu de $|f(b)| > M$, contredit les hypothèses du théorème. *CQFD.*

5.2 Suites et séries de fonctions holomorphes

5.2.1 Notion de convergence

Définition 12 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^0(U)$* converge uniformément sur tout compact *si et seulement si, pour tout compact $K \subset U$, la suite des restrictions $f_{n|K}$ converge dans la topologie uniforme sur K.*

Remarque 1 *Il est immédiat que, si pour tout K, f_K désigne la limite uniforme de $f_{n|K}$, alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0(U)$ telle que, pour tout K, $f_{|K} = f_K$.*

Théorème 7 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{H}(U)$ qui converge uniformément sur tout compact vers $f \in \mathcal{C}^0(U)$. Alors*

- *la limite f est holomorphe*
- *pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées k-ièmes $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$.*

Preuve Soit $a \in U$ et $r > 0$ tels que $\overline{B(a,r)} \subset U$. Alors, pour tout $z \in B(a,r)$, nous avons

$$2\pi i f_n(z) = \int_{\partial B(a,r)^+} \frac{f_n(v)dv}{v-z}.$$

En faisant tendre n vers l'infini et en utilisant la convergence uniforme de f_n sur $\overline{B(a,r)}$, nous en déduisons

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial B(a,r)^+} \frac{f(v)dv}{v-z}.$$

On en déduit, par un développement en série en la variable $z-a$ dans l'intégrale, que f est analytique sur $B(a,r)$, donc holomorphe sur U, puisque $B(a,r)$ est arbitraire. De plus, nous pouvons aussi écrire les relations dérivées pour $f_n^{(k)}$ et $f^{(k)}$:

$$2\pi i f_n^{(k)}(z) = k! \int_{\partial B(a,r)^+} \frac{f_n(v)dv}{(v-z)^{k+1}},$$

et

$$2\pi i f^{(k)}(z) = k! \int_{\partial B(a,r)^+} \frac{f(v)dv}{(v-z)^{k+1}}.$$

Et, à nouveau en utilisant la convergence uniforme de f_n sur $\partial B(a,r)$, on en déduit que $f_n^{(k)}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact inclus dans $B(a,r)$. La preuve se termine par un argument de recouvrement. *CQFD.*

Définition 13 *Soit U ou ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(U)$. On dit que la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

converge normalement sur tout compact *(respectivement* uniformément sur tout compact*) si et seulement si, pour tout compact $K \subset U$, la série des restrictions $\sum_{n=0}^{\infty} f_{n|K}$ converge normalement, id est: $\exists(\rho_{K,n})_{n\in\mathbb{N}}$, suite de réels positifs, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in K$, $0 \leq |f_n(z)| \leq \rho_{K,n}$ et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{K,n} < \infty$$

(respectivement la somme partielle $\sum_{n=0}^{N} f_{n|K}$ converge uniformément lorsque N tend vers l'infini).

Il est immédiat que si la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur tout compact, alors la suite des sommes partielle $\sum_{n=0}^{N} f_n$ converge uniformément sur tout compact, lorsque N tend vers l'infini. Nous en déduisons le résultat suivant, en appliquant le théorème qui précède.

Théorème 8 *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ une série de fonctions normalement (ou uniformément) convergente sur tout compact dans $\mathcal{H}(U)$. Alors la somme de cette série est une fonction holomorphe sur U.*

5.2.2 Séries de fonctions méromorphes

On peut étendre ce qui précède à des séries $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, où les f_n sont des fonction méromorphes sur un ouvert U, à condition de prendre quelques précautions.

Définition 14 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{M}(U)$. On dit que la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

converge normalement sur tout compact *(respectivement* uniformément sur tout compact*) si et seulement si, pour tout compact $K \subset U$, il existe $n_K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_K$, f_n n'admet pas de ple dans K et la série des restrictions $\sum_{n=n_K}^{\infty} f_{n|K}$ converge normalement sur K (respectivement la suite des sommes partielles $\sum_{n=n_K}^{N} f_{n|K}$ converge uniformément sur K).*

Il est aisé de démontrer le théorème suivant.

Théorème 9 *Soit une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de fonctions méromorphes sur U. Si cette série converge normalement (respectivement uniformément) sur tout compact de U, la somme de cette série est une fonction méromorphe sur U. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ la somme partielle des dérivées $\sum_{n=0}^{N} f_n^{(k)}$ converge normalement (respectivement uniformément) sur tout compact vers la dérivée de $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.*

Exemple 1 *(exercice) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ et définit une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$. Déterminer les ples de f, montrer que $\forall z \in \mathbb{Z}$, $f(z+1) = f(z)$. Montrer que $\lim_{|Im(z)|\to\infty} |f(z)| = 0$. En déduire que $f(z) = \left(\frac{\pi}{sin \pi z}\right)^2$.*

Exemple 2 *Soit $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $Im(z) > 0$ et $\Gamma = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. La série*

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{k\in\Gamma^\star} \left(\frac{1}{(z-k)^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$. Sa somme définit une fonction méromorphe notée $\wp$ et appelée fonction de Weierstrass.

5.3 Résultats de compacité

Définition 15 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{H}(U)$. On dit que A est* borné *si et seulement si, pour tout compact $K \subset U$, il existe une contante $C_K > 0$ telle que*

$$\forall f \in A,\ \forall z \in K,\ |f(z)| \leq C_K.$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 10 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{H}(U)$ bornée (au sens où l'ensemble $\{f_n/n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble borné de $\mathcal{H}(U)$). Alors il existe une sous-suite $\phi(n)$ de n telle que $f_{\phi(n)}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathcal{H}(U)$.*

Preuve *Etape 1* Soit K un compact inclus dans U et soit $r > 0$ tel que $K_r = \{z \in \mathbb{C}/ \operatorname{dist}(z, K) \leq r\}$ soit inclus dans U. Pour tout z dans K et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z,r)^+} \frac{f_n(v)dv}{(v-z)^2}\right| \leq \frac{C_{K_r}}{r},$$

donc f_n' est bornée sur K, uniformément en z et en n. On en déduit que la suite est uniformément équicontinue sur K.
Etape 2 Nous choisissons une suite croissante K_m de compacts inclus dans U telle que $\cup_{m\in\mathbb{N}} K_m = U$. Par exemple,

$$K_m = \{z \in U/ \operatorname{dist}(z, \partial U) \leq \frac{1}{m} \text{ et } |z| \leq m\}.$$

Sur chaque K_m, $f_{n|K_m}$ est uniformément équicontinue, donc, d'après le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite $\phi_m(n)$ de n telle que $f_{\phi_m(n)|K_m}$ converge uniformément. On conclut par un procédé de suite diagonale. *CQFD.*

Rappelons le théorème d'Ascoli.

Définition 16 *Soit X un espace métrique et V un espace vectoriel. $\mathcal{C}^0(X, V)$ est l'ensemble des fonction continues de X vers V. On dit qu'une suite f_n dans $\mathcal{C}^0(X, V)$ est* uniformément équicontinue *si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X,\ dist(x, y) < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Théorème 11 (Ascoli) *Soit X un espace métrique et V un espace vectoriel de dimension finie. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(X, V)$. Supposons que f_n soit uniformément équicontinue et uniformément bornée. Alors il existe une sous-suite $\phi(n)$ de n telle que $f_{\phi(n)}$ converge uniformément vers une limite f dans $\mathcal{C}^0(X, V)$.*

Preuve cf J. Dixmier, *Topologie générale*, PUF 1980 ou J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthiers Villars 1963.

Corollaire 7 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathcal{H}(U)$. Supposons que U est connexe. Soit $a \in U$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(a) := l_a^{(k)}$ existe. Alors f_n converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f^{(k)}(a) = l_a^{(k)}$.*

Preuve D'après le théorème qui précède, on peut extraire une sous-suite $\phi(n)$ de n telle que $f_{\phi(n)}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}(U)$.

Supposons que f_n ne converge pas uniformément sur tout compact de U vers f. Cela signifie qu'il existe un compact $K \subset U$ sur lequel $f_{n|K}$ ne converge pas uniformément vers $f_{|K}$. Donc il existe une sous-suite $\psi(n)$ de n et $\epsilon_0 > 0$ tels que $\sup_K |f - f_{\psi(n)}| \geq \epsilon_0$. Appliquons à nouveau le théorème avec la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$: il existe une sous-suite $\tilde{\phi}(n)$ de $\psi(n)$ telle que $f_{\tilde{\phi}(n)}$ converge uniformément sur tout compact vers une limite $\tilde{f} \in \mathcal{H}(U)$. Utilisant les théorèmes de convergence, on a

$$f^{(k)}(a) = \lim_{n\to\infty} f^{(k)}_{\phi(n)}(a) = l^{(k)}_a = \lim_{n\to\infty} f^{(k)}_{\tilde{\phi}(n)}(a) = \tilde{f}^{(k)}(a),$$

et donc, puisque U est connexe, le principe du prolongement analytique entraîne que $\tilde{f} = f$. Donc en particulier, $f_{\tilde{\phi}(n)}$ converge uniformément vers f sur K, ce qui contredit $\sup_K |f - f_{\psi(n)}| \geq \epsilon_0$. *CQFD.*

6 Intégration et prolongement d'une fonction holomorphe

6.1 Comment intégrer une fonction holomorphe

Le problème est le suivant: étant donné un ouvert U de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$, peut-on fabriquer une primitive de f, c'est à dire une fonction $F \in \mathcal{H}(U)$ telle que $\frac{dF}{dz} = f$?

i) **Solution locale** Envisageons tout d'abord le problème localement. Soit $a \in U$ et $r > 0$ tels que $B(a,r) \subset U$. Alors f est analytique sur U et

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n \text{ sur } B(a,r).$$

Ainsi

$$F(z) = c + \sum_{n\geq 1} a_{n-1} \frac{(z-a)^n}{n}$$

convient, quel que soit le choix de la constante $c \in \mathbb{C}$. Donc le problème a toujours une solution localement, unique modulo le choix d'une constante d'intégration. Nous noterons $\mathcal{P}_{B(a,r)}(f) := \{F \in \mathcal{H}(B(a,r))/F' = f\}$ l'ensemble des primitives de f sur $B(a,r)$, qui a la structure d'une droite affine complexe.

ii) **Obstructions globales** Supposons que l'on sache construire une primitive F de f sur U et soit Γ un chemin orienté dans U, allant de z_0 à z_1. Autrement dit Γ est l'image du plongement orienté $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ de classe $\mathcal{C}^1$, tel que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. Alors

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)dz &= \int_\Gamma \frac{dF}{dz}dz + \frac{dF}{d\overline{z}}d\overline{z} \\ &= \int_\Gamma \frac{dF}{dz}dz \\ &= F(z_1) - F(z_0). \end{aligned}$$

En particulier, étudions l'exemple suivant: $U = \mathbb{C}^\star$ et $f(z) = z^{-1}$, alors pour $\gamma(t) = e^{i2\pi t}$, on calcule que

$$\int_\Gamma f(z)dz = i2\pi.$$

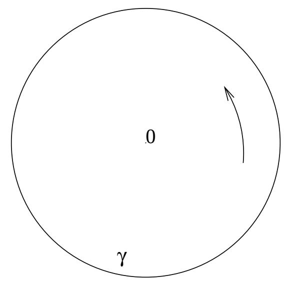

Figure 6: intégrer $1/z$

Or si f admettait une primitive F, on aurait aussi

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) = F(1) - F(0) = 0,$$

une contradiction. Il n'est pas donc pas possible de produire une primitive de f, car il y a des obstructions liées à la topologie du domaine U.

Primitive le long d'un chemin

Considérons un chemin issu d'un point $z_0 \in U$ et tâchons de construire une primitive d'une fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ le long de ce chemin. Nous choisirons de fixer à 0 la valeur initiale de la primitive en z_0.

Définition 17 *Dans un espace topologique X, on appelle* chemin basé en *un point $m_0 \in X$ toute application $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], X)$ telle que $\gamma(0) = m_0$. On appelle* lacet basé en *m_0 tout chemin qui revient à son point de départ, id est $\gamma(0) = \gamma(1) = m_0$.*

Revenons à un chemin $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], U)$ allant de z_0 à z. Comme l'image de ce chemin est compact, nous pouvons le recouvrir par des boules $B(\gamma(t_j), \epsilon_j) \subset U$, où $j = 1, ..., N$ et $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = 1$. Alors, comme f est holomorphe sur U, f admet un développement en série entière sur chacune des boules $B(\gamma(t_j), \epsilon_j)$, donc en particulier il existe une famille de primitives $\mathcal{P}_{B(\gamma(t_j),\epsilon_j)}(f) := \{F_j \in \mathcal{H}(B(\gamma(t_j), \epsilon_j))/F_j' = f \text{ sur } B(\gamma(t_j), \epsilon_j)\}$.

Choisissons $F_0 \in \mathcal{P}_{B(\gamma(t_0),\epsilon_0)}(f)$ tel que $F_0(z_0) = 0$. Puis nous choisissons l'unique application $F_1 \in \mathcal{P}_{B(\gamma(t_1),\epsilon_1)}(f)$ telle que $F_0 = F_1$ sur $B(\gamma(t_0), \epsilon_0) \cap B(\gamma(t_1), \epsilon_1)$. Ensuite nous choisissons F_2 de même, qui coïncide avec F_1 sur $B(\gamma(t_1), \epsilon_1) \cap B(\gamma(t_2), \epsilon_2)$, etc...

Définition 18 *Nous obtenons ainsi une famille de fonctions holomorphes $(F_j)_j$ définie sur toutes les boules $B(\gamma(t_j), \epsilon_j)$ que l'on appelle la* primitive de f le long de γ s'annulant en z_0.

Il faut noter que le chemin γ peut repasser plusieurs fois au même point et la primitive peut être différente à chaque passage (exercice: étudier ce qui se passe avec z^{-1} sur $\mathbb{C}^\star$).

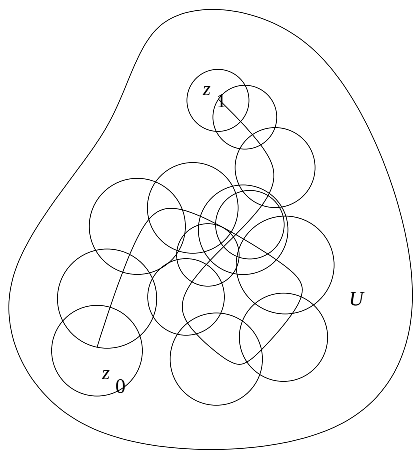

Figure 7: la primitive le long dun chemin

La difficulté présente dans l'exemple précédent (sur $\mathbb{C}^\star$) est qu'il existe plusieurs chemins possibles pour aller d'un point à un autre et que l'on ne peut pas toujours déformer continument un chemin vers un autre chemin.

Définition 19 *Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux chemins dans un espace topologique X. Une* homotopie reliant γ *à* $\tilde{\gamma}$ *est une application continue*

$$\begin{array}{rccc} H: & [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & X \\ & (t,u) & \longmapsto & H(t,u), \end{array}$$

telle que $H(t,0)=\gamma(t)$, $\forall t\in[0,1]$ et $H(t,1)=\tilde{\gamma}(t)$, $\forall t\in[0,1]$.

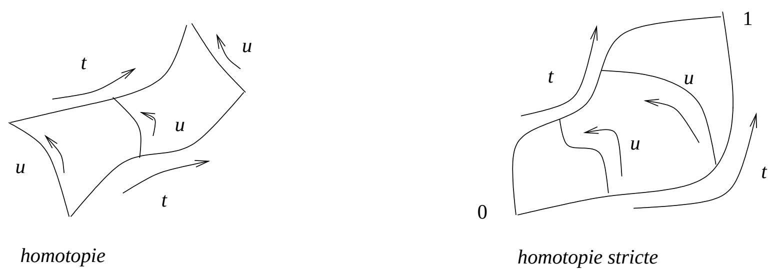

Figure 8: homotopie et homotopie stricte

Définition 20 *Une* homotopie stricte *est une homotopie qui laisse les deux extrémités invariantes, id est $\gamma(0)=H(0,u)=\tilde{\gamma}(0)$ et $\gamma(1)=H(1,u)=\tilde{\gamma}(1)$, $\forall u\in[0,1]$.*

Définition 21 *On dit que γ est* homotope *(respectivement* strictement homotope*) à $\tilde{\gamma}$ s'il existe une* homotopie *(respectivement* homotopie stricte*) entre γ et $\tilde{\gamma}$. Les relations "*γ est homotope à $\tilde{\gamma}$*" et "*γ est strictement homotope à $\tilde{\gamma}$*" sont des relations d'équivalence.*

Théorème 12 *Soient γ et $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}^0([0,1],U)$ deux chemins allant de z_0 à z strictement homotopes dans U et soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors les primitives de f s'annulant en z_0 définies le long de γ et de $\tilde{\gamma}$ coïncident en z.*

Preuve Soit $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$ une homotopie stricte entre γ et $\tilde{\gamma}$. Soit $r \in \mathbb{R}$ égal à la distance de $H([0,1]\times[0,1])$ au bord de U, c'est à dire égal à l'infimum de $\{|v - H(t,u)|/v \in \partial U, (t,u) \in [0,1]\times[0,1]\}$. Notons que comme $H([0,1]\times[0,1])$ est compact, cet infimum est atteint et donc $r > 0$. Nous choisissons $N \in \mathbb{N}$ suffisament grand pour que

$$\sup(|t-t'|, |u-u'|)) \leq \frac{1}{N} \Longrightarrow |H(t,u) - H(t',u')| < r. \tag{2}$$

Alors, nous notons, pour tout entiers $0 \leq i,j \leq N$, $a_{i,j} := H\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right)$. Et une conséquence de (2) est que $\forall 1 \leq i,j \leq N$,

$$B(a_{i,j},r) \cap B(a_{i-1,j},r) \cap B(a_{i,j-1},r) \cap B(a_{i-1,j-1},r) \neq \emptyset. \tag{3}$$

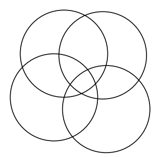

Figure 9: la condition (3)

Pour chaque $0 \leq i,j \leq N$, nous choisissons une primitive $F_{i,j} \in \mathcal{P}_{B(a_{i,j},r)}(f)$. Nous noterons $\Delta_t(i,j) \in \mathbb{C}$ et $\Delta_u(i,j) \in \mathbb{C}$ les constantes telles que

- $F_{i,j} - F_{i-1,j} = \Delta_t(i,j)$ sur $B(a_{i,j},r) \cap B(a_{i-1,j},r)$ pour tout $1 \leq i \leq N$ et tout $0 \leq j \leq N$
- $F_{i,j} - F_{i,j-1} = \Delta_u(i,j)$ sur $B(a_{i,j},r) \cap B(a_{i,j-1},r)$ pour tout $0 \leq i \leq N$ et tout $1 \leq j \leq N$.

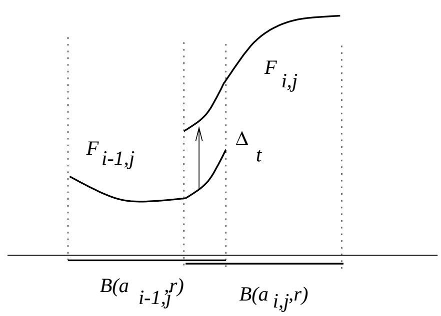

Figure 10: les définitions de $\Delta_t(i,j)$ et $\Delta_u(i,j)$

Nous choisissons les primitives $F_{i,j}$ de façon à ce que

- $F_{0,0}(z_0) = F_{0,N}(z_0) = 0$
- $\forall 1 \leq i \leq N$, $\Delta_t(i,0) = 0$, c'est à dire $(F_{i,0})_{i=0,\dots N}$ est la primitive de f le long de γ s'annulant en z_0
- $\forall 1 \leq i \leq N$, $\Delta_t(i,N) = 0$, c'est à dire $(F_{i,N})_{i=0,\dots,N}$ est la primitive de f le long de $\tilde{\gamma}$ s'annulant en z_0
- $F_{0,j} = F_{0,0} = F_{0,N}$, $\forall 0 \leq j \leq N$

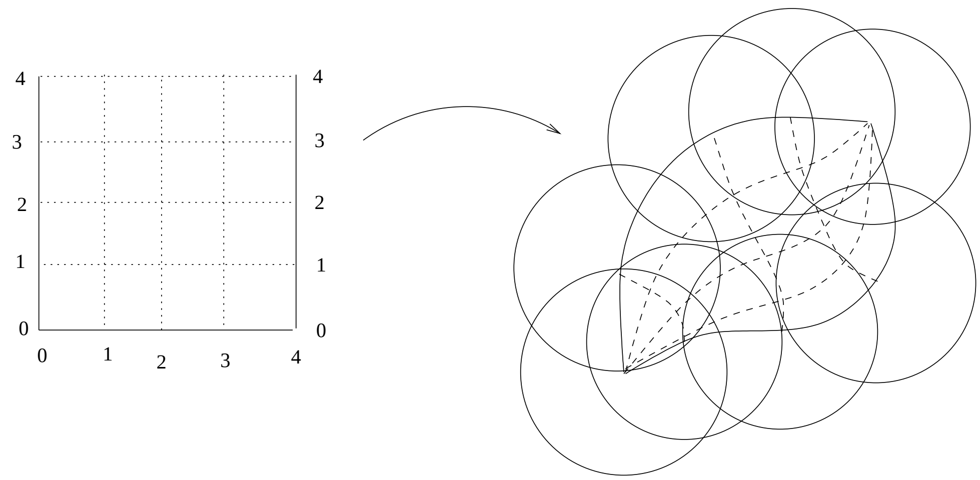

Figure 11: hypothèses sur les primitives $F_{i,j}$

La dernière condition [1] entraîne en particulier que $\forall 1 \leq j \leq N$, $\Delta_u(0,j) = 0$. Remarquer qu'aucune condition n'a été prescrite sur les $F_{i,j}$ "intermédiaires", pour $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq j \leq N-1$.

Nous utiliserons le Lemme suivant

Lemme 5 $\forall 1 \leq i,j \leq N$,

$$\Delta_t(i,j-1) + \Delta_u(i,j) - \Delta_t(i,j) - \Delta_u(i-1,j) = 0. \tag{4}$$

Preuve du Lemme Il s'agit d'un simple calcul, tous les termes s'annulent deux à deux:

$$(F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}) + (F_{i,j} - F_{i,j-1}) - (F_{i,j} - F_{i-1,j}) - (F_{i-1,j} - F_{i-1,j-1}) = 0,$$

sur $B(a_{i,j},r) \cap B(a_{i-1,j},r) \cap B(a_{i,j-1},r) \cap B(a_{i-1,j-1},r)$.

Concluons: nous calculons de deux manières différentes la quantité

$$S = \sum_{i,j=1}^{N} \Delta_t(i,j-1) + \Delta_u(i,j) - \Delta_t(i,j) - \Delta_u(i-1,j).$$

[1] qui n'est pas réellement nécessaire pour conclure

D'une part $S = 0$ en vertu du Lemme précédent et d'autre part, en utilisant le "théorème de Fubini",

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\Delta_t(i,j-1)-\Delta_t(i,j)\right)+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_u(i,j)-\Delta_u(i-1,j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\Delta_t(i,0)-\sum_{i=1}^{N}\Delta_t(i,N)+\sum_{j=1}^{N}\Delta_u(N,j)-\sum_{j=1}^{N}\Delta_u(0,j), \end{aligned} \tag{5}$$

d'où l'on obtient

$$\sum_{j=1}^{N}\Delta_u(N,j)=\sum_{j=1}^{N}\Delta_u(0,j)-\sum_{i=1}^{N}\Delta_t(i,0)+\sum_{i=1}^{N}\Delta_t(i,N)=0,$$

en vertu des hypothèses. Cette dernière identité signifie que

$$F_{N,N}-F_{N,0}=\sum_{j=1}^{N}\Delta_u(N,j)=0,$$

donc les primitives le long des deux chemins coïncident en z. *CQFD.*

Remarque 2 *Nous invitons le lecteur à comparer cette preuve avec la formule de Stokes. En particulier, $F_{i,j}$ est l'analogue discret d'une fonction de deux variable α, $(\Delta_t(i,j),\Delta_u(i,j))$ est l'analogue de sa différentielle $d\alpha$, (4) correspond à $dd\alpha = 0$, S est une intégrale discrète et (5) est une version discrète de la formule de Stokes.*

Ainsi la définition d'une primitive dépend de la possibilité de démontrer que deux chemins ayant mêmes extrémités dans U sont strictement homotopes ou non.

Définition 22 *Soit X un espace topologique. On dit que X est* simplement connexe*, si toute paire de points dans X peut être connectée par un chemin (connexité par arc) et si deux chemins ayant mêmes extrémités sont strictement homotopes dans X.*

Corollaire 8 *Si U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ et pour tout z_0, il existe une unique primitive de f sur U qui s'annule en z_0.*

Groupe d'homotopie

L'espace des lacets (chemins fermés) peut être muni d'une loi de composition interne. A deux lacets γ et $\tilde{\gamma}$, basés en m_0, on associe le lacet $\gamma.\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow X$ tel que $\gamma.\tilde{\gamma}(t) = \gamma(2t)$, si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\gamma.\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(2t-1)$, si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

On démontre que cette loi de composition donne, lorsqu'on quotiente par la relation d'équivalence "est strictement homotope à", une loi de composition qui fait de l'ensemble quotient un groupe. On note $\pi_1(X)$ ce groupe, qui est appelé *groupe d'homotopie* ou *groupe de Poincaré* de X. Un espace X est simplement connexe si et seulement si son groupe d'homotopie est trivial: $\pi_1(X) \simeq \{0\}$.

Un exemple d'espace non simplement connexe est $U = \mathbb{C}^\star$, son groupe d'homotopie est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Intégrale le long d'un chemin continu

Si γ est un chemin continu dans $U \subset \mathbb{C}$ et si $f \in \mathcal{H}(U)$, alors on peut donner un sens à $\int_\gamma f(z)dz$. Il suffit de construire une primitive F de f le long de γ et on note alors

$$\int_\gamma f(z)dz := F(z_1) - F(z_0),$$

où z_0 et z_1 sont le points de départ et d'arrivée de γ. En effet, dans le cas où γ est $\mathcal{C}^1$, cette définition coïncide avec celle que nous avons déja vue. (Exercice: montrer que, plus généralement, on peut "intégrer" toute 1-forme le long d'un chemin seulement continu, à partir du moment où cette 1-forme est fermée).

6.2 Prolongement d'une fonction holomorphe

Soient $U \subset \mathbb{C}$, $B(z_0, \rho) \subset U$ et une fonction $f_0 \in \mathcal{H}(B(z_0, \rho))$. Une question naturelle est de chercher à prolonger f_0 sur un ensemble plus grand et même éventuellement U en une fonction qui reste holomorphe. Des difficultés apparaissent.

En considérant l'exemple d'une fonction f_0 qui est la primitive sur $B(z_0, \rho)$ d'une certaine fonction $g \in \mathcal{H}(U)$, on comprend que cela revient à construire une primitive de g le long d'un chemin. Cela dépendra donc aussi du groupe d'homotopie $\pi_1(U)$.

Mais il y a d'autres difficultés: même si on se contente de prolonger le long d'un chemin, il se peut le chemin rencontre un "obstacle". Par exemple, si $z_0 \neq 0$, et si $f(z) = \frac{1}{z}$, il n'est pas possible de prolonger f le long d'un chemin partant de z_0 et passant par 0.

Définition 23 *Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ un chemin continu, avec $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. Soient $r > 0$ et $f_0 \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$. Un prolongement de f_0 le long de γ est la donnée d'une famille de boules $(B_t)_{t\in[0,1]}$ et d'une famille de fonctions holomorphes $(f_t)_{t\in[0,1]}$, où chaque B_t est une boule ouverte dans U de centre $\gamma(t)$ et chaque f_t appartient à $\mathcal{H}(B_t)$, telles que $\forall s \in [0,1]$, $\exists \epsilon(s) > 0$, $\forall t \in [0,1]$, si $|t - s| < \epsilon(s)$, alors $\gamma(t) \in B_s$ et $\forall z \in B_s \cap B_t$, $f_s(z) = f_t(z)$.*

Lemme 6 *Soit une fonction holomorphe $f_0 \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$. Si le long d'un chemin γ issu de z_0, un prolongement de f_0 $(B_t, f_t)_{t\in[0,1]}$ existe, il induit de façon unique un moyen de définir la valeur de la fonction holomorphe en tout point $\gamma(t)$.*

Preuve Recouvrons $[0,1]$ par des intervalles de type $]s - \epsilon(s), s + \epsilon(s)[$. Par compacité, il est possible d'en extraire un sous-recouvrement fini $[0,1] \subset \cup_{i=1}^N]t_i - \epsilon_i, t_i + \epsilon_i[$, tels que $\forall t \in]t_i - \epsilon_i, t_i + \epsilon_i[$, $\gamma(t) \in B_{t_i}$. Nécessairement, pour deux valeurs consécutives t_i et t_{i+1}, si l'on choisit $t \in]t_i - \epsilon_i, t_i + \epsilon_i[\cap]t_{i+1} - \epsilon_{i+1}, t_{i+1} + \epsilon_{i+1}[$, alors $f_{t_i}(z) = f_t(z)$, $\forall z \in B_{t_i} \cap B_t$ et $f_{t_{i+1}}(z) = f_t(z)$, $\forall z \in B_{t_{i+1}} \cap B_t$, c'est à dire f_{t_i} et $f_{t_{i+1}}$ coïncident sur l'ouvert non vide $B_{t_i} \cap B_t \cap B_{i+1}$. Donc, par le principe du prolongement analytique, $f_{t_i}(z) = f_{t_{i+1}}(z)$, $\forall z \in B_{t_i} \cap B_{t_{i+1}}$. Nous montrons ainsi qu'il est possible de donner un sens à $f(\gamma(t))$ pour tout t. Comme cette construction marche quel que soit le recouvrement fini utilisé, cette valeur de $f(\gamma(t))$ est unique (prendre l'intersection de deux recouvrements finis et comparer...).

Exemples *a)* Si $f \in \mathcal{H}(U)$, le prolongement de $f_{|B(z_0,\epsilon)}$ le long de n'importe quel chemin issu de z_0 existe et est juste f.

b) Si $f \in \mathcal{H}(U)$ et si F_0 est une primitive de f sur $B(z_0, \epsilon)$, le prolongement de F_0 le long d'un chemin issu de z_0 est la primitive de f le long de ce chemin, coïncidant avec F_0 à l'origine.

c) Prenons $z_0 = 1$, $B_0 = B(1, \eta)$, pour $\eta < 1$ et

$$f_0(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n},$$

(fonction logarithme). Le prolongement de f_0 en 1 le long du chemin $\gamma : t \longmapsto e^{2\pi t}$ est

$$2\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}.$$

(En effet, il s'agit juste de la primitive de $\frac{1}{z}$ le long de γ.)
d) Si $z_0 = 1$, $B_0 = B(1, \eta)$, pour $\eta < 1$ et $f_0 : B_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ est la détermination de $\sqrt{z}$ donnée par $\forall \theta \in]-\pi, \pi[$, $\forall \rho \in]0, \infty[$ tels que $\rho e^{i\theta} \in B_0$, $f_0(\rho e^{i\theta}) = \sqrt{\rho} e^{\frac{i\theta}{2}}$. Alors si $\gamma : t \longmapsto e^{i2\pi t}$, $f_1(z) = -f_0(z)$, $\forall z \in B_0 = B_1$.

Théorème 13 *Soit $f_0 \in \mathcal{H}(B(z_0, \epsilon))$. On suppose que le long de tout lacet γ issu de z_0, il existe un prolongement analytique de f_0 le long de γ. Alors si γ et $\tilde{\gamma}$ sont deux chemins allant de z_0 à z_1 strictement homotopes dans U, le prolongement f_t de f_0 le long de γ en $t = 1$ coïncide avec le prolongement $\tilde{f}_t$ de f_0 le long de $\tilde{\gamma}$ en $t = 1$.*

Preuve L'idée de la preuve est analogue à celle utilisée pour démontrer que les primitives d'une fonction holomorphe le long de deux chemins strictement homotopes coïncident à l'arrivée (Théorème 12). Nous considérons une homotopie stricte $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$, entre γ et $\tilde{\gamma}$. Pour tout $u \in [0,1]$ fixé, il existe un prolongement f_t^u de f_0 le long du chemin $t \longmapsto H(t, u)$. Comme dans la preuve du théorème 12, nous choisissons $r > 0$ et N tels que, notant $a_{i,j} := H\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right)$, pour $0 \leq i, j \leq N$, les conditions (2) et (3) soient satisfaites. Nous définissons sur chaque boule $B(a_{i,j}, r)$ la fonction $f_{i,j} \in \mathcal{H}(B(a_{i,j}, r))$ obtenue en prolongeant f_0 le long de $f_t^{\frac{j}{N}}$. Il s'ensuit que, pour tout $i, j = 0, 1, ..., N$, la fonction définie sur $B(a_{i-1,j}, r) \cap B(a_{i,j}, r)$ par

$$\Delta_t(i,j) := f_{i,j} - f_{i-1,j}$$

est identiquement nulle. Nous considérons aussi les fonctions holomorphes défines sur $B(a_{i,j-1}, r) \cap B(a_{i,j}, r)$ par

$$\Delta_u(i,j) := f_{i,j} - f_{i,j-1}.$$

Par hypothèse, nous savons que $\Delta_u(0, j) = 0$, $\forall j = 0, 1, ..., N$. En utilisant le fait que $\Delta_t(i, j) = 0$, on en déduit par récurrence sur i que $\forall i, j = 0, 1, ..., N$, $\Delta_u(i, j) = 0$, ce qui prouve en particulier que toutes les fonctions $f_{N,j}$ coïncident.

Corollaire 9 *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $B(z_0, r) \subset U$ et $f \in \mathcal{H}(B(z_0, r))$. Alors, si il existe un prolongement de f le long de tout chemin issu de z_0, il existe un prolongement de f sur tout U.*

6.3 Indice d'un lacet par rapport à un point

Définition 24 *Soit U un ouvert simplemenent connexe de $\mathbb{C}$ et $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ un lacet. Supposons que γ ne rencontre pas le point a de U, alors l'indice de γ par rapport à a est l'entier*

$$Ind(\gamma, a) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}. \tag{6}$$

Une définition équivalente est la suivante.

Définition 25 *$Ind(\gamma, a)$ est le nombre algébrique de tours que fait γ autour de a.*

Vérifions que ces deux définitions coïncident. Tout lacet γ qui ne rencontre pas a peut s'écrire $\gamma(t) = a + \rho(t)e^{i\theta(t)}$, où ρ et θ sont des fonctions continues telles que ρ soit toujours strictement positif. Ainsi

$$\frac{d\gamma}{2i\pi(\gamma - a)} = \frac{d\rho e^{i\theta} + i\rho e^{i\theta} d\theta}{2i\pi\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{2i\pi}\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Et comme $\int_\gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$, on obtient que, selon la définition donnée par (6),

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \int_\gamma \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Proposition 3 *Soient γ et $\tilde{\gamma}$ deux lacets strictement homotopes dans $U \setminus \{a\}$, alors Ind$(\gamma, a) =$ Ind$(\tilde{\gamma}, a)$.*

Preuve Soit z_0 le point de départ et d'arrivée des deux lacets. Il suffit de remarquer que $\mathrm{Ind}(\gamma, a)$ est égal à $F_N(z_0) - F_0(z_0)$, où $(F_j)_{j=1,\dots,N}$ est une primitive de $\frac{1}{2i\pi(z-a)}$ le long de γ (et de même pour $\mathrm{Ind}(\tilde{\gamma}, a)$) et d'appliquer le théorème 12.

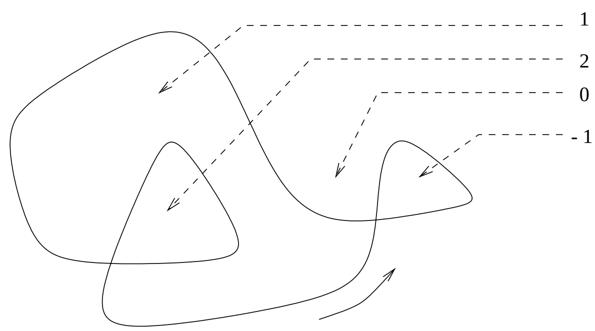

Figure 12: indices d'un lacet

A quoi sert l'indice ? Soit $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$ une fonction méromorphe en a et γ un lacet dans $U \setminus \{a\}$. Alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \mathrm{Ind}(\gamma, a)\mathrm{Rés}_a f,$$

où $\mathrm{Rés}_a f = \int_{\partial B(a,\epsilon)} f(z)dz$.

Preuve Construire une homotopie entre γ et $a + \epsilon e^{i2\pi k\theta}$, où $k = \mathrm{Ind}(\gamma, a)$.

Plus généralement, si $f \in \mathcal{M}(U)$ et si le lacet γ évite les pôles a_1,...,a_k de f, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Ind}(\gamma, a_j)\mathrm{Rés}_{a_j} f.$$

7 Transformations conformes

Définition 26 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ (supposés être orientés). On appelle* transformation conforme *tout difféomorphisme $\phi : U \longrightarrow V$ qui préserve les angles et l'orientation.*

- Le fait que ϕ préserve l'orientation est contenu dans la condition

$$\det(d\phi_x) > 0 \quad \text{partout.}$$

- le fait que ϕ soit conforme signifie que $\forall v, v' \in \mathbb{R}^n$,

$$\text{Angle}(v, v') = \text{Angle}(d\phi_x(v), d\phi_x(v')),$$

  ou bien que $d\phi_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ soit une application linéaire conforme.

Lemme 7 *Toute application linéaire $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ inversible et conforme est de la forme $A(V) = \lambda R.V$, où $\lambda \in]0, +\infty[$ et $R \in O(n)$. Si de plus, A est directe, alors $R \in SO(n)$.*

Preuve: exercice.
Une conséquence de ce Lemme est que, pour toute transformation conforme $\phi : U \longrightarrow V$ et pour tout $x \in U$, $\exists R_x \in SO(n)$, $\exists \lambda_x \in]0, \infty[$ tels que

$$d\phi_x = \lambda_x R_x.$$

En particulier, si $n = 2$, cette condition est équivalente à dire que $d\phi$ est inversible partout et satisfait le système d'équations de Cauchy-Riemann. Donc les transformations conformes en dimension deux s'identifient aux difféomorphismes holomorphes. [2]

Exemple A toute matrice $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$, on associe la *transformation homographique* ou *homographie*

$$T_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

$T_A : \mathbb{C} \backslash \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C} \backslash \{\frac{a}{c}\}$ est un alors un difféomorphisme. En effet, son inverse est simplement $T_{A^{-1}}$. On peut prolonger T_A sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en posant $T_A(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $T_A(\infty) = \frac{a}{c}$. On démontre alors la propriété suivante: $\forall A, B \in GL(2, \mathbb{C})$,

$$T_A \circ T_B = T_{AB}.$$

En fait, il s'en déduit aisément que l'ensemble des transformations homographiques de $\mathbb{C}$ est isomorphe au quotient de groupe

$$SL(2, \mathbb{C})/\{1, -1\} =: PSL(2, \mathbb{C}).$$

Interprétation Notons $P\mathbb{C}$ l'ensemble des droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^2$. Toute application $A \in GL(2, \mathbb{C})$ agit sur $P\mathbb{C}$:

---

[2] on montre qu'en dimension n supérieure ou égale à trois, l'ensemble des transformations conformes forme un groupe de dimension finie (au contraire de la dimension deux). Ce groupe est isomorphe au groupe de Lorentz $SO(n + 1, 1)$. C'est un résultat dû à Liouville.

$$
\begin{array}{rccc}
PA: & P\mathbb{C} & \longrightarrow & P\mathbb{C} \\
 & \mathbb{C}(u,v) & \longmapsto & \mathbb{C}A(u,v)
\end{array}
$$

Et si on définit le difféomorphisme

$$
\begin{array}{rccc}
\pi: & \mathbb{C}\cup\{\infty\} & \longrightarrow & P\mathbb{C} \\
 & z & \longmapsto & \mathbb{C}(z,1),
\end{array}
$$

alors $\pi^{-1}\circ PA\circ\pi = T_A$.

Exercice Montrer que $\forall a\in D^2$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$,

$$z \longmapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{\overline{a}z-1}$$

est un difféomorphisme du disque D^2 dans lui-même.

Exercice Quelle est l'image de D^2 par $T(z)=i\frac{z+1}{z-1}$?

Transformation conforme du demi-plan $\overline{\mathbb{C}^+}$ vers un polygone

Nous notons $\mathbb{C}^+ := \{z\in\mathbb{C}/\mathrm{Im}z>0\}$. Soit $\overline{\mathbb{C}^+} := \mathbb{C}^+\cup\mathbb{R}$. On considère N points réels distincts a_1,..., a_N et N réels α_1,..., $\alpha_N\in]0,1[$ tels que

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_j = 2.$$

Soit enfin la fonction

$$f(z) := \prod_{j=1}^{N}(z-a_j)^{-\alpha_j}.$$

Levons une ambiguïté: pour chaque j et pour tout $z\in\mathbb{C}^+$, $\exists!\rho_j>0$, $\exists!\theta_j\in]0,\pi[$ tels que

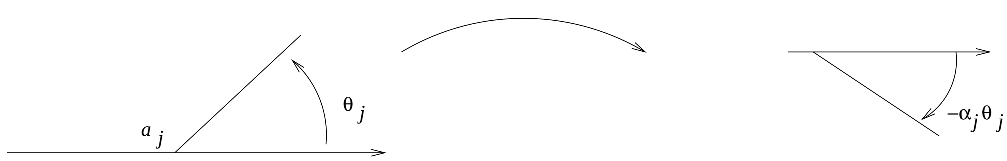

Figure 13: détermination de θ_j et f_j

$$z = a_j+\rho_j e^{i\theta_j},$$

et on convient de poser

$$f_j(z) = (z-a_j)^{-\alpha_j} := \rho^{-\alpha_j}e^{-i\alpha_j\theta_j}.$$

Chacun des facteurs f_j se prolonge sur $\overline{\mathbb{C}^+}\setminus\{a_j\}$ et en particulier,

- si $z \in]-\infty, a_j[$, $f_j(z) = \rho^{-\alpha_j} e^{-i\alpha_j \pi}$
- si $z \in]a_j, \infty[$, $f_j(z) = \rho^{-\alpha_j}$.

Enfin f est égal au produit des f_j.

Nous supposons pour simplifier que $a_1 < a_2 < ... < a_N$. Alors

- sur $]-\infty, a_1[$, $f(z) = |f| e^{-i(\alpha_1 + ... + \alpha_N)\pi} = |f|$
- sur $]a_1, a_2[$, $f(z) = |f| e^{-i(\alpha_2 + ... + \alpha_N)\pi} = |f| e^{i\alpha_1 \pi}$
- sur $]a_2, a_3[$, $f(z) = |f| e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)\pi}$, etc...
- sur $]a_N, \infty[$, $f(z) = |f|$

Nous en concluons que nous pouvons étendre f à $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{a_1, ..., a_N\}$ et que l'image de chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}[$ est contenue dans $\{r e^{i(\alpha_1 + ... + \alpha_j)\pi} / r \in]0, \infty[\}$.

A présent, soit

$$T(z) := \int_{z_0}^{z} f(v) dv,$$

où l'on intègre le long d'un chemin allant de z_0 à z dans $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{a_1, ..., a_N\}$.

Lemme 8 *L'image de $\mathbb{R} \setminus \{a_1, ..., a_N\}$ par T est un polygone borné Γ d'angles au sommet consécutifs $\alpha_1\pi$,..., $\alpha_N\pi$. De plus, on peux étendre T sur $\overline{\mathbb{C}^+}$ de façon continue en prenant $T(a_j)$ égal au j-ème sommet du polygone Γ et T est alors un homéomorphisme.*

Preuve du lemme Pour tout j, on a $0 < \alpha_j < 1$, donc l'intégrale $\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(v) dv$ est convergente et d'après ce qui précède, l'image du segment $]a_j, a_{j+1}[$ est un segment de droite borné orienté faisant un angle $(\alpha_1 + ... + \alpha_j)\pi$ avec l'axe des réels. On pose alors que $T(a_j)$ égal une extrémité de ce segment [3]. Il ne reste à vérifier que l'image de $[-\infty, a_1[\cup]a_N, \infty]$ est un segment borné. Il est clair que T envoie chacun des deux segments orientés sur des segments de droites parallèles et ayant même orientation que l'axe réel. Il suffit donc de montrer que ces deux segments sont bornés et qu'ils se raccordent bien, c'est à dire $\lim_{x \to -\infty} T(x) = \lim_{x \to \infty} T(x) \in \mathbb{C}$.

Cela découle de la propriété suivante

$$\lim_{z \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{a_1, ..., a_N\}, |z| \to \infty} T(z) \text{ existe et est finie.}$$

En effet, soient deux points z_1 et z_2 dans $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{a_1, ..., a_N\}$, tels que $|z_1|, |z_2| > R$, avec $R \gg |a_j|$. Alors, en choisissant judicieusement un chemin γ allant de z_1 à z_2 , on peut vérifier $|\int_{z_1}^{z_2} f(v) dv| < \frac{C}{R}$. On utilise pour cela le fait que $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 2$, qui entraîne que $|f(z)| \leq C/|z|^2$ si $|z| \geq R$. Cela suffit pour prouver que la limite existe.

Enfin, la restriction de T à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est un difféomorphisme par morceau et envoie $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur une courbe convexe; on peut en déduire par un raisonnement géométrique que c'est un homéomorphisme.

Lemme 9 *T est une transformation conforme de $\overline{\mathbb{C}^+}$ vers la fermeture de l'intérieur du polygone Γ.*

[3] la bonne!

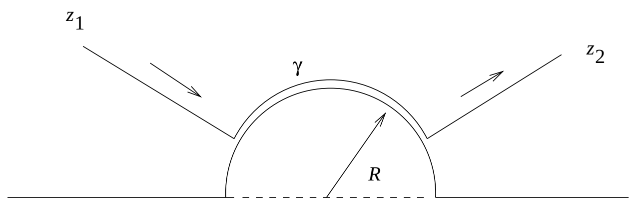

Figure 14: chemin d'inégration utilisé dans la preuve du Lemme 8

Preuve Nous savons que la restriction de T sur le bord est un difféomorphisme et, bien évidemment, que T est holomorphe. Il ne reste donc plus qu'à montrer que T est un difféomorphisme. Premièrement, $T'(z) = f(z)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}^+$ et donc T est une immersion. Montrons que T est une bijection. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et soit $\{z_1, ..., z_k\}$ (avec éventuellement k infini) les images réciproques (si elles existent) de a par T. Notons que tous ces points sont nécessairement isolés à cause du fait que T' ne s'annule pas. Au voisinage de chaque point z_j, on a

$$T(z) = a + T'(z_j)(z - z_j) + O\left((z - z_j)^2\right) \quad \text{et} \quad T'(z) = T'(z_j) + O(z - z_j)$$

donc

$$\frac{T'(z)}{T(z) - a} = \frac{1}{z - z_j}(1 + O(z - z_j)).$$

Ainsi, grâce à la formule des résidus

$$\int_{\partial\mathbb{C}^+} \frac{T'(z)dz}{T(z) - a} = \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial B(z_j, \epsilon_j)} \frac{dz}{z - z_j} = i2\pi k.$$

Or par ailleurs, un changement de variable sur $\partial\mathbb{C}^+$ donne

$$\int_{\partial\mathbb{C}^+} \frac{T'(z)dz}{T(z) - a} = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a} = i2\pi \mathrm{Ind}(\Gamma, a).$$

Donc $k = \mathrm{Ind}(\Gamma, a)$. Et $\mathrm{Ind}(\Gamma, a)$ ne peut valoir que deux valeurs possibles: 1 si a est à l'intérieur de Γ et 0 sinon. Il s'ensuit que k ne peut être égal qu'à ces deux valeurs. Le fait que $k = 0$ si a est à l'extérieur de Γ signifie que l'image de T est bien contenue à l'intérieur de Γ et le fait que $k = 1$ si a est à l'intérieur signifie qu'alors a a un et un seul antécédent.

Exemple: l'intégrale elliptique. Dans ce cas, on a

$$T(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)}}$$

et l'image de $\mathbb{C}^+$ est un rectangle.

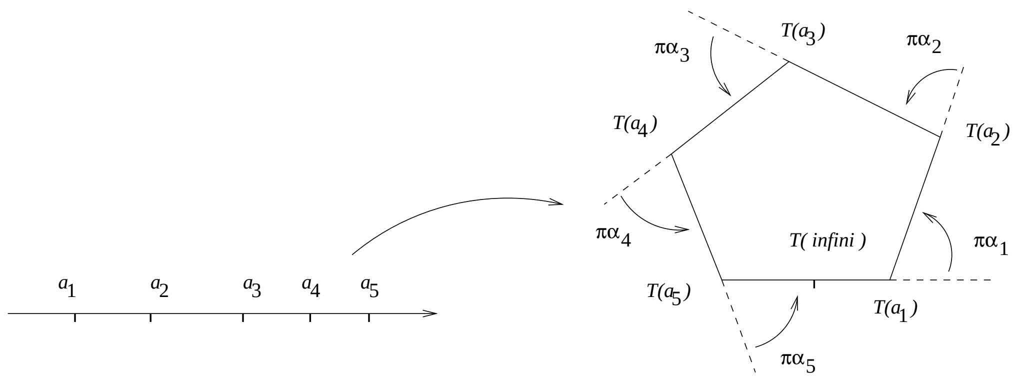

Figure 15: transformation conforme du demi-plan supérieur vers l'intérieur d'un polygone à 5 sommets