Examen du 28 juin 2006

*Durée : 3 heures*

*Barème indicatif : I = 3.5 ; II = 4 ; III = 4 ; IV = 4 ; V = 4,5*

*L'utilisation de calculatrices, téléphones portables et documents est interdite.*

## I

Donner la nature des séries suivantes (en justifiant votre réponse)

**a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

**Réponse :** on a $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, lorsque $n \to +\infty$, donc la série a la même nature que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, qui est **divergente**.

**b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$

**Réponse :** la suite $\left(\sin \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive (car $n \geq 1$ entraîne $\frac{1}{n} \leq 1 \leq \pi$, qui entraîne $\sin \frac{1}{n} \geq 0$), tend vers 0 (car sin est continue et s'annule en 0) et est décroissante (car $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ et sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$). Donc la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ **converge**.

**c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{3n} - 5e^{2n} + e^n - 1}{e^{4n} + 2e^{2n} + 1}.$

**Réponse :** le terme général de cette série est positif à partir d'un certain rang et est équivalent à $\frac{e^{3n}}{e^{4n}} = e^{-n}$ lorsque $n \to +\infty$. Or la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$ converge puisque $\frac{1}{e} < 1$. Donc la série est **convergente**.

## II

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x^2}{n(x+n)}$.

**a)** Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On notera alors $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in [0, +\infty[$. Dire si cette série converge normalement sur $[0, +\infty[$ ou non et justifier votre réponse.

**Réponse :** pour tout $x \in [0, +\infty[$ fixé, on a $|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n^2}$. Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est absolument convergente, puisque la série de Riemann $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ l'est. Donc la série est simplement convergente sur $[0, +\infty[$. En revanche cette série **n'est pas normalement convergente** sur $[0, +\infty[$. En effet, si tel était le cas, il existerait une série onvergente, de terme général $a_n \in [0, +\infty[$, telle que $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall x \in [0, +\infty[$. Mais comme, $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = +\infty$, cela est impossible.

**b)** Pour tout $A \in ]0, +\infty[$, montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est normalement convergente sur $[0, A]$. En déduire que $f$ est continue sur $[0, +\infty[$.

**Réponse :** on a $\forall x \in [0, A]$, $|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{A^2}{n^2}$ et la série de terme général $\frac{A^2}{n^2}$ est convergente, donc $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est absolument convergente sur $[0, A]$. Comme chaque fonction $f_n$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc en particulier sur $[0, A]$, un théorème du cours nous garantit alors que $f$ est continue sur $[0, A]$. Nous avons donc établi la continuité de $f$ sur $[0, A]$, pour toute valeur de $A \in ]0, +\infty[$. Comme $A$ est arbitraire, cela entraîne que $f$ est continue sur $[0,+\infty[$.

**c)** Pour tout $A \in ]0,+\infty[$, montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ est normalement convergente sur $[0,A]$. *[Indication : on pourra pour cela établir et utiliser l'identité $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(x+n)^2} = \int_n^{x+n} \frac{2dt}{t^3}$ et l'inégalité $\int_n^{x+n} \frac{dt}{t^3} \leq \frac{x}{n^3}$, si $x > 0$.]*

**Réponse :** d'abord on remarque que $f_n$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\forall x \in [0,+\infty[$,

$$f_n'(x) = n\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(x+n)^2}\right).$$

Par ailleurs, en posant $P(t) := \frac{1}{t^2}$, on a :

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(x+n)^2} = P(n) - P(n+x) = -\int_n^{n+x} P'(t)dt = \int_n^{n+x} \frac{2dt}{t^3}.$$

Mais, puisque $\frac{1}{t^3} \leq \frac{1}{n^3}$, $\forall t \in [n, n+x]$,

$$\int_n^{n+x} \frac{2dt}{t^3} \leq \int_n^{n+x} \frac{2dt}{n^3} = \frac{2x}{n^3}.$$

Donc $|f_n'(x)| \leq n\frac{2x}{n^3} \leq \frac{2A}{n^2}$, $\forall x \in [0,A]$. On en déduit que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ est normalement convergente sur $[0,A]$.

**d)** Montrer que $f$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $[0,+\infty[$.

**Réponse :** Un théorème du cours nous permet de déduire de la question précédente que $f$ est dérivable sur $[0,A]$ et que $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ sur $[0,A]$. Comme $A$ est arbitraire, un raisonnement analogue à celui de la question **b)** nous permet d'en déduire que $f$ est dérivable sur tout $[0,+\infty[$.

## III

On considère l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{1}$$

**a)** On recherche les solutions de cette équation qui sont développables en série entière sur un voisinage de 0. On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients $c_n$ pour que $y$ soit une solution de (1).

**Réponse :** on suppose que l'équation (1) admet une solution développable en série entière autour de 0, avec un rayon de convergence égal à $R > 0$. Alors, en remplaçant dans l'équation les expressions $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$, qui sont valables sur l'intervalle $]-R,R[$, on obtient les relations

$$(n^2+n-2)c_n - (n+1)(n+2)c_{n+2} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En simplifiant par $n+2$, on obtient alors la relation de récurrence

$$c_{n+2} = \frac{n-1}{n+1}c_n.$$

Cela est une condition nécessaire. Pour qu'elle soit suffisante, il faut vérifier que le rayon de convergence des séries entières obtenues est non nul. On remarque que la relation de récurrence nous permet en principe de déterminer tous les coefficients de rang pair $c_{2p}$ en fonction de $c_0$ et tous les coefficients de rang impair $c_{2p+1}$ en fonction de $c_1$. Autrement dit, $y = \sum_{p=0}^{\infty} c_{2p}(x^2)^p + x\sum_{p=0}^{\infty} c_{2p+1}(x^2)^p$ s'exprime en fonction de deux séries entières en la variable $x^2$, dont il est facile de calculer le rayon de convergence en utilisant le critère de d'Alembert : soit $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $c_{2q} = 0$ et alors $c_{2p} = 0$, $\forall p \geq q$ (ou de même $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $c_{2q+1} = 0$ et alors $c_{2p+1} = 0$, $\forall p \geq q$), soit $\frac{c_{2(p+1)}}{c_{2p}} = \frac{2p-1}{2p+1}$ tend vers 1, lorsque $p \to +\infty$ (ou de même $\frac{c_{2(p+1)+1}}{c_{2p+1}} = \frac{2p}{2p+2}$ tend vers 1, lorsque $p \to +\infty$) et alors le rayon de convergence de $\sum_{p=0}^{\infty} c_{2p}(x^2)^p$ (ou de $\sum_{p=0}^{\infty} c_{2p+1}(x^2)^p$) est au moins égal à 1 (en la variable $x^2$). Donc le rayon de convergence de la série $y$, en la variable $x$, est au moins égal à $\sqrt{1} = 1$.

**b)** Démontrer qu'il existe une unique solution $f$ développable en série entière sur un voisinage de 0 telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série.

**Réponse :** on applique les résultats de la question précédente et l'on a

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{2p}x^{2p},$$

avec la relation $c_{2(p+1)} = \frac{2p-1}{2p+1}c_{2p}$. Le rayon de convergence est 1.

*Note supplémentaire :* en utilisant cette relation, on trouve facilement que $c_{2p} = \frac{1}{1-2p}$. On peut ainsi en déduire que $f(x) = 1 + \frac{x}{2}\log\frac{1-x}{1+x}$.

**c)** Démontrer qu'il existe une unique solution $g$ (développable en série entière sur un voisinage de 0) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. Déterminer le rayon de convergence de la série.

**Réponse :** on applique le même raisonnement qu'à la question précédente : on a

$$g(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{2p+1}x^{2p+1},$$

avec la relation $c_{2(p+1)+1} = \frac{2p}{2p+2}c_{2p+1}$. Cependant on remarque que cette relation entraîne que $c_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$. Donc $g(x) = x$. Le rayon de convergence est alors bien entendu infini ! On peut vérifier par ailleurs directement le fait que $g$ est solution de (1).

## IV

On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 12 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**a)** Déterminer les valeurs propres de $f$. Est-il possible d'en déduire que $f$ est diagonalisable ?

**Réponse :** on calcule $\det(A - \lambda 1_3) = -\lambda(\lambda-1)^2$, donc on trouve les valeurs propres : $1, 1$ et $0$ (c'est à dire 1 est valeur propre multiple). Comme on ne sait pas si le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 ou 2, on ne peut pas conclure à ce stade si $f$ est diagonalisable ou non.

**b)** Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de $f$.
**Réponse :** on recherche les sous-espaces propres, on trouve, pour 1 :

$$E_1 = \mathbb{R}(2,3,0) \oplus \mathbb{R}(1,2,1),$$

(donc $\dim E_1 = 2$ et $f$ est diagonalisable) et

$$E_0 = \mathbb{R}(2,4,1).$$

**c)** Diagonaliser la matrice $A$.
**Réponse :**

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**V**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = f(x(t), y(t)), \tag{2}$$

où $f$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 15\alpha & 9\alpha \\ -25\alpha & 15\alpha + 2 \end{pmatrix}.$$

et où $(x, y) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui satisfait les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \text{où } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ est donné.} \tag{3}$$

**a)** Montrer qu'il existe un vecteur $v_1$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(v_1) = 2v_1$, pour toute valeur de $\alpha$. On précisera bien entendu les coordonnées de $v_1$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
**Réponse :** on peut prendre $v_1 = (3, 5)$.
**b)** Montrer qu'il existe un vecteur $v_2$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(v_2) = 2v_2 + \alpha v_1$, pour toute valeur de $\alpha$. On précisera bien entendu les coordonnées de $v_2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
**Réponse :** on peut prendre $v_2 = (1, 2)$.
**c)** Décrire de façon explicite la solution du système (2) avec les conditions initiales (3).
**Réponse :** d'après les questions précédentes, on peut trigonaliser la matrice $A$ dans la base $(v_1, v_2)$ (qui est indépendante de $\alpha$). On obtient ainsi $A = PTP^{-1}$, où

$$T = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

On peut donc faire le changement de variable

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = PU(t),$$

qui donne $U'(t) = TU(t)$ et donc

$$U(t) = e^{tT}U(0) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U(0).$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = PU(t) = Pe^{tT}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-15\alpha t & 9\alpha t \\ -25\alpha t & 1+15\alpha t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

(Ce résultat peut également être obtenu en résolvant d'abord la deuxième équation du système $U'(t) = TU(t)$, puis, après avoir reporté la solution de cette équation dans la première équation, en utilisant la méthode de la « variation de la constante »).