Examen du 28 juin 2006

Durée : 3 heures

Barème indicatif : I = 3,5 ; II = 4 ; III = 4 ; IV = 4 ; V = 4,5

L'utilisation de calculatrices, téléphones portables et documents est interdite.

I

Donner la nature des séries suivantes (en justifiant votre réponse)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{3n} - 5e^{2n} + e^n - 1}{e^{4n} + 2e^{2n} + 1}$.

II

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x^2}{n(x+n)}$.

a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On notera alors $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, pour tout $x \in [0, +\infty[$. Dire si cette série converge normalement sur $[0, +\infty[$ ou non et justifier votre réponse.

b) Pour tout $A \in]0, +\infty[$, montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est normalement convergente sur $[0, A]$. En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.

c) Pour tout $A \in]0, +\infty[$, montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ est normalement convergente sur $[0, A]$. *[Indication : on pourra pour cela établir et utiliser l'identité $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(x+n)^2} = \int_n^{x+n} \frac{2dt}{t^3}$ et l'inégalité $\int_n^{x+n} \frac{dt}{t^3} \leq \frac{x}{n^3}$, si $x > 0$.]*

d) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

III

On considère l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}. \tag{1}$$

a) On recherche les solutions de cette équation qui sont développables en série entière sur un voisinage de 0. On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients c_n pour que y soit une solution de (1).

b) Démontrer qu'il existe une unique solution f développable en série entière sur un voisinage de 0 telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série.

c) Démontrer qu'il existe une unique solution g (développable en série entière sur un voisinage de 0) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. Déterminer le rayon de convergence de la série.

IV

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 12 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs propres de f. Est-il possible d'en déduire que f est diagonalisable ?
b) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
c) Diagonaliser la matrice A.

V

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = f(x(t), y(t)), \tag{2}$$

où f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 15\alpha & 9\alpha \\ -25\alpha & 15\alpha + 2 \end{pmatrix}.$$

et où $(x, y) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui satisfait les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \text{où } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ est donné.} \tag{3}$$

a) Montrer qu'il existe un vecteur v_1 de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(v_1) = 2v_1$, pour toute valeur de α. On précisera bien entendu les coordonnées de v_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer qu'il existe un vecteur v_2 de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(v_2) = 2v_2 + \alpha v_1$, pour toute valeur de α. On précisera bien entendu les coordonnées de v_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
c) Décrire de façon explicite la solution du système (2) avec les conditions initiales (3).