Ensembles et applications

Exercice 1.

Soit $A = \{2, 3, 4\}$. Traduire les énoncés suivants en français. Décider s'ils sont vrais ou faux.

1.a) $\forall x \in \mathbb{N}\ (x \in A)$

1.b) $\exists x \in \mathbb{N}\ (x \in A)$

1.c) $\forall x\ ((x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \in A))$

1.d) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y \geq x$

1.e) $\exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad y \geq x$

1.f) $\exists\, x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad y \geq x$

Exercice 2.

Soit $A = \{2, 3, 4\}$. À partir des énoncés $x \in A$, $x \in \mathbb{N}$, $x = 2z + 1$, $x \geq 4$ en former d'autres qui expriment que

2.a) A contient un entier naturel impair ;

2.b) A contient un entier naturel impair supérieur à quatre (c'est-à-dire ≥ 4).

Les énoncés précédents sont-ils vrais ?

Exercice 3.

Soit E un ensemble de nombres. On considère les énoncés :

$(\mathcal{E}) \quad \exists x \in E \quad \forall y \in E \quad (x + y = y), \qquad (\mathcal{E}') \quad \forall x \in E \quad \exists y \in E \quad (x + y = 0).$

3.a) L'énoncé $(\mathcal{E})$ est-il vrai quand E est l'ensemble des entiers pairs ?
Quand E est l'ensemble des entiers impairs ?

3.b) L'énoncé $(\mathcal{E}')$ est-il vrai quand $E = \mathbb{N}$? Quand $E = \mathbb{Z}$?

Exercice 4.

Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ dans chacun des cas suivants : $\quad E = \emptyset, \quad E = \{0\}, \quad E = \{0, 1, 2\}$.

Exercice 5.

5.a) Soient E un ensemble et A, B des parties de E.
Simplifier chacune des deux expressions suivantes : $\quad A \cup (A \cap B), \quad A \cup (A \cup B)$.

5.b) Trouver un ensemble E et trois parties A, B, C de E tels que : $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$.

Exercice 6.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$.

6.a) Décrire $A \cap B$ quand A est l'ensemble des diviseurs de 45 et B l'ensemble des diviseurs de 55.

6.b) Décrire $A \cup B$ quand A est l'ensemble des multiples de 2 et B l'ensemble des multiples de 4.

Exercice 7.

Représenter dans le plan complexe l'intersection et la réunion des deux parties suivantes de $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 3\} \qquad \text{et} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2\mathrm{i}| < 2\}.$$

Exercice 8.

On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$: $\quad I = [1, 3]$ et $J = [2, 4]$.
Trouver un élément de $(I \cup J) \times (I \cup J)$ qui n'appartient pas à $(I \times I) \cup (J \times J)$.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

9.a) Calculer $f([0, \pi])$ et $f\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right)$

9.b) Calculer $f^{-1}([-2, 1])$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 10.

Trouver 4 couples (I, J) d'intervalles de $\mathbb{R}$, tels que les applications $s : I \to J$ déterminées par $s(x) = \sin(x)$, $x \in I$, soient définies et correspondent à chacune des situations suivantes :

10.a) s non injective et non surjective.

10.b) s injective et non surjective.

10.c) s non injective et surjective.

10.d) s bijective.

Exercice 11.

On considère les correspondances suivantes, où X désigne l'ensemble de départ, Y l'ensemble d'arrivée et R le graphe. Lesquelles sont des graphes de fonctions ? Les fonctions ainsi définies sont-elles injectives ? surjectives ?

11.a) $X = [0, +\infty[$, $Y = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \mid x^2 = y^2\}$

11.b) $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, +\infty[$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \mid x^2 = y^2\}$

11.c) $X = [-1, 1]$, $Y = [0, +\infty[$, $R = \{(x, y) \in X \times Y \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Exercice 12.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Comparer les ensembles :

12.a) $[0, 1]$ et $f^{-1}(f([0, 1]))$ **12.b)** $[-1, 1]$ et $f\left(f^{-1}([-1, 1])\right)$ **12.c)** $f([0, 1] \cap [-1, 0[)$ et $f([0, 1]) \cap f([-1, 0[)$.

Exercice 13.

Soit $f : E \to F$ une application.

13.a) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a : $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

13.b) On suppose maintenant que f est injective. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

13.c) Donner un exemple pour lequel l'inclusion du **13.a)** est stricte.

Exercice 14.

14.a) Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x + 1$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y=0 \\ y-1 & \text{sinon} \end{cases}$.

14.b) Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 15.

On considère l'application $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

15.a) Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.

15.b) Déterminer des intervalles $I \subset]0, +\infty[$ et $J \subset \mathbb{R}^+$ tels que la restriction de f soit une bijection de I sur J.

Exercice 16.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x - y, -2x + 2y)$.

16.a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $2a + b = 0$.

16.b) L'application f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 17.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x - y^2$.

17.a) L'application f est-elle injective ?

17.b) Montrer que l'application f est surjective.

17.c) Trouver une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

17.d) Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (x + y^2, y)$. Montrer que h est une bijection. Calculer $f \circ h(x, y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 18.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \sum_{j=1}^{n} j(j+1) = 1.2 + 2.3 + \ldots + n(n+1)$. Montrer, par récurrence sur n, l'égalité : $u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n \geq 1$.

Exercice 19.

Montrer par récurrence la propriété $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.