S'ouvrir aux mathématiques

Frédéric Hélein [*]

21 mars 2016

1 De la magie aux nombres

Les hommes savent compter depuis la nuit des temps. Mais cela ne signifie pas pour autant que les nombres, objets mathématiques aient existé depuis toujours dans l'esprit des hommes. Il est à peu près sûr que, dès les débuts de l'agriculture et de l'élevage, il y a près de 10 000 ans, les hommes eurent besoin de compter ou dénombrer toutes sortes de choses : les hommes (soldats ou esclaves !), les animaux, les pierres ou les briques, les quantités de grains de blé en volume, la longueur des terrains, leurs surfaces. Un long chemin fut nécessaire pour que les nombres, entités abstraites, apparaissent. Peut-être le premier pas fut de montrer les nombres avec les doigts ou avec des cailloux ou des brins d'herbe. Le pas suivant fut certainement celui de nommer oralement un nombre. Une étape cruciale fut l'apparition de l'écriture.

1.1 Sumer

Les plus anciennes traces d'écriture connues aujourd'hui datent de 3 000 ans avant notre ère. Il s'agit de *pictogrammes*, suites de petits figures dessinées, qui ont été découvertes dans la région appelée Mésopotamie, située un peu au nord du delta où le Tigre et l'Euphrate mêlent leurs eaux avant de finir dans le golfe persique. Dans cette région se succédèrent durant les trois millénaires avant JC des civilisations brillantes : les sumériens, puis Babylone, même si une bonne partie du temps cette cité fut sous le joug des assyriens, puis des perses. On a aussi découvert plus au sud, dans l'Indus, une région située dans l'actuel Pakistan, des traces d'écriture similaires un peu plus tardives. Mais nous ne sommes malheureusement pas capables de déchiffrer cette écriture, en partie parce que nous n'avons pas retrouvé suffisamment de textes écrits. Notre connaissance de cette civilisation raffinée, qui disparut durant le dernier millénaire avant notre ère sans qu'on sache pourquoi et comment, est donc malheureusement limitée.

*Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR CNRS 7586 Université Denis Diderot — Paris 7, UFR de Mathématiques, Case 7012, Bâtiment Chevaleret 75205 Paris Cedex 13, France, helein@math.jussieu.fr

Un peu plus tard apparurent d'autres écritures, dont on a retrouvé suffisamment de textes, pour être capables de les déchiffrer : l'écriture cunéiforme en Mésopotamie et les hiéroglyphes en Egypte.

L'apparition de l'écriture fut une révolution qui permit non seulement aux premières sociétés urbanisées de se développer et à la pensée littéraire d'éclore, mais aussi de réaliser des calculs de plus en plus complexes. Les sumériens avaient inventé un système pour noter les nombres extrêmement performant et étonnamment moderne. Ce système utilisait la base 60.

Pour l'expliquer commençons par quelques mots sur le système dit arabe que nous utilisons pour noter les nombres. Nous disposons d'un alphabet de dix caractères qui sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 (et 0, mais celui-ci est à part), que nous appelons des *chiffres*. A partir de cet alphabet nous composons des mots, qui sont des suites de chiffres, et qui chacun représente un nombre que nous savons ainsi identifier. Il en a été ainsi dans la plupart des grandes civilisations, mais avec des règles différentes. Au lieu d'utiliser un « alphabet » de neuf ou dix chiffres, les babyloniens utilisaient 60 caractères, ou plutôt 59, puisque le zéro n'existait pas. Cela paraît une source de complication, nécessitant de mémoriser un grand nombre de symboles, mais, en réalité, ils n'étaient pas trop difficiles à retenir, mais juste sans doute un peu fastidieux à écrire. En effet ces caractères étaient eux-mêmes composés de deux sortes des signes : l'un en forme de clou (d'où le nom d'écriture *cunéiforme*), l'autre en forme de chevron. Chaque clou « valait » une unité,

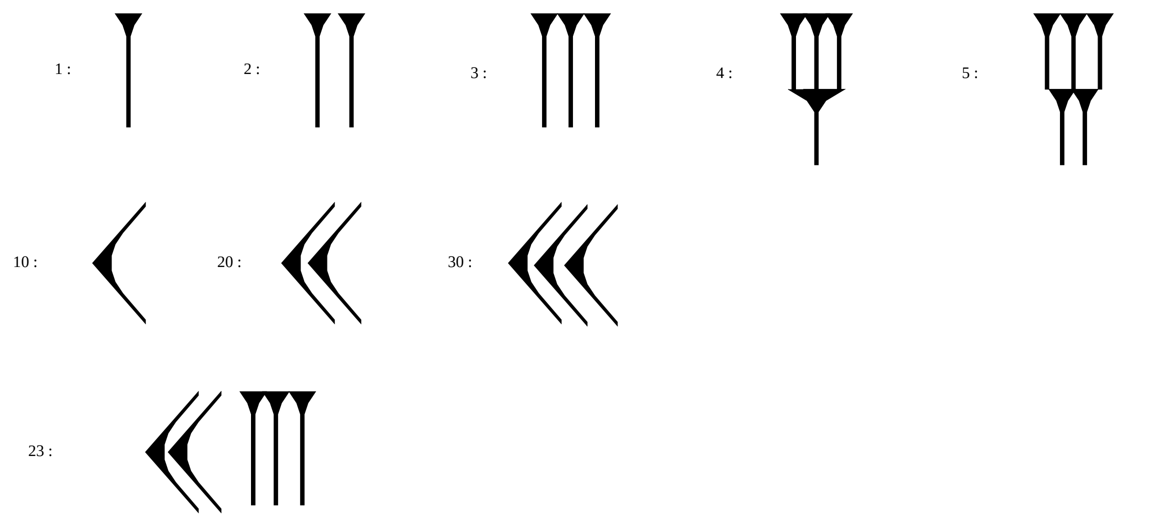


FIGURE 1 – Quelques exemple de notation cunéiforme des chiffres utilisée par les sumériens

chaque chevron « valait » une dizaine. Ainsi 6 clous représentaient 6, 3 chevrons et 5 clous représentaient 35. Une fois que l'on dispose de ces 59 chiffres, il ne reste plus qu'à les utiliser pour tenter de noter n'importe quel nombre. Pour plus de commodité, dans la suite nous représenterons chacun de ces chiffres par leur traduction dans notre système : « 1 », « 2 », ..., « 58 », « 59 ».

Choisissons un nombre entier naturel non nul (c'est à dire un nombre tel que 1, 2, 3 ou 347 ou encore 7 342 986... dans notre système actuel). Si ce nombre est compris entre 1 et 59, par exemple 45, il n'y a pas de problème, on le note par son chiffre que nous notons ici par « 45 ». Si ce chiffre est compris entre 60 et 3 599, par exemple 388, on compte combien de fois on peut retrancher 60 au nombre 388 tout en ayant un reste positif ou nul. Cette opération s'appelle la *division euclidienne* de 388 par 60 :

$$388 = 6 \times 60 + 28.$$

Dans cette division euclidienne, 6 est le quotient de 388 par 60, 28 est le reste. On peut alors traduire la façon dont les babyloniens notaient 388 de façon abrégée :

$$388 = \text{« } 6 : 28 \text{ » en base } 60.$$

Le principe dans cette écriture est de ranger des « chiffres » entre « 1 » et « 59 » de droite à gauche. Ici, pour éviter toute confusion, nous les avons séparé par des « : ». La position de chaque chiffre en partant de la droite est de la plus haute importance : elle indique que l'on doit multiplier le chiffre tout à fait à droite (ici 28) 0 fois par 60, c'est à dire le garder tel quel, puis le chiffre à sa gauche (ici 6) une fois par 60, etc., avant de sommer le résultat.

Prenons un nombre plus grand encore, compris entre 3 600 et 215 999, par exemple 37 325. Pour le traduire dans le système babylonien, nous en faisons à nouveau la division euclidienne par 60 :

$$37\ 325 = 622 \times 60 + 5.$$

Il se trouve que le quotient, 622, est plus grand que 60 (ce n'est pas une surprise, 37 325 est supérieur à $60 \times 60 = 3\ 600$). Nous effectuons donc à nouveau la division euclidienne du quotient 622 par 60 :

$$622 = 10 \times 60 + 22.$$

Cette fois le quotient, 10, est bien plus petit que 60. Nous pouvons donc conclure en emboîtant les deux divisions euclidiennes :

$$\begin{aligned} 37\ 325 &= 622 \times 60 + 5 \\ &= (10 \times 60 + 22) \times 60 + 5 \\ &= 10 \times (60 \times 60) + 22 \times 60 + 5. \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs représenter

cette décomposition par un arbre :

$$
\begin{tikzcd}
 & & 37\,325 \arrow[d, equal] & \\
 & 37\,320 \arrow[r, dotted, dash] & + \arrow[r, dotted, dash] & 5 \\
 & 622 \arrow[u, bend left, "\times 60"'] \arrow[d, equal] & & \\
600 \arrow[r, dotted, dash] & + \arrow[r, dotted, dash] & 22 & \\
10 \arrow[u, bend left, "\times 60"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

Autrement dit, si l'on note $60 \times 60 = 60^2$ (le carré de 60), $37\ 325 = 10 \times 60^2 + 22 \times 60 + 5$. Une notation abrégée pour cette décomposition est :

$$37\ 325 = \text{« } 10 : 22 : 5 \text{ » en base } 60.$$

Le principe pour comprendre le sens de cette notation abrégée est toujours le même : nous rangeons des « chiffres » entre « 1 » et « 59 » de droite à gauche, le chiffre tout à fait à droite (ici 5) doit être multiplié par $60^0 = 1$, puis le chiffre à sa gauche (ici 22) par $60^1 = 60$, le chiffre encore à sa gauche (ici 10) par $60^2 = 3\,600$ etc. (La notation 60^a représente un nombre obtenu comme suit : je pars de 1, je le multiplie a fois par 60 ; par exemple, 60^0 est 1 multiplié 0 fois par 60, etc.).

Même si cela ne nous semble pas évident dans notre traduction maladroite, l'écriture de droite, qui suit le principe d'écriture en base 60 des babyloniens, est très économique : c'est un nombre à trois chiffres (« 10 », « 22 » et « 5 »), alors que l'écriture de gauche nécessite cinq chiffres (3, 7, 3, 2 et 5) !

L'écriture babylonienne des nombres nous paraît étrange, à cause de cette base 60 qui nous semble si exotique. Et pourtant cette écriture est étonnament proche de la nôtre, du point de vue logique. En effet, dans notre système, lorsque nous écrivons 37 325, il s'agit d'une façon abrégée d'indiquer la décomposition :

$$\begin{aligned} 37\ 325 &= 3 \times 10\ 000 + 7 \times 1\ 000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 \\ &= 3 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0. \end{aligned} \tag{1}$$

Si on effectuait sur 37 325 l'algorithme utilisant des divisions euclidiennes du même type que précédemment, mais en remplaçant 60 par 10, on obtiendrait :

$$\begin{aligned} 37\ 325 &= 3\ 732 \times 10 + 5 \\ &= \{373 \times 10 + 2\} \times 10 + 5 \\ &= \{[37 \times 10 + 3] \times 10 + 2\} \times 10 + 5 \\ &= \{[(3 \times 10 + 7) \times 10 + 3] \times 10 + 2\} \times 10 + 5 \end{aligned}$$

Algorithme que nous pouvons représenter

sous la forme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & & 37\,325 & \\
 & & & 37\,320 \arrow[r, dash, dotted] & + \arrow[u, equal] \arrow[r, dash, dotted] & 5 \\
 & & & 3\,732 \arrow[u, bend left, "\times 10"'] & & \\
 & & 3\,730 \arrow[r, dash, dotted] & + \arrow[u, equal] \arrow[r, dash, dotted] & 2 & \\
 & & 373 \arrow[u, bend left, "\times 10"'] & & & \\
 & 370 \arrow[r, dash, dotted] & + \arrow[u, equal] \arrow[r, dash, dotted] & 3 & & \\
 & 37 \arrow[u, bend left, "\times 10"'] & & & & \\
30 \arrow[r, dash, dotted] & + \arrow[u, equal] \arrow[r, dash, dotted] & 7 & & & \\
3 \arrow[u, bend left, "\times 10"'] & & & & &
\end{tikzcd}$$

et on retombe ainsi sur la même décomposition que (1). C'est pourquoi en définitive la différence essentielle entre le système babylonien et le nôtre est la base utilisée, c'est à dire le nombre B, égal à 60 ou 10, qui sert à « casser » par des divisions euclidiennes successives un nombre en blocs qui sont des puissances de B. Dans les deux systèmes, lorsqu'on écrit un nombre, chaque chiffre doit être multiplié une puissance de B qui est déterminée par la position de ce chiffre et croît de droite à gauche. Le système babylonien est donc paradoxalement plus proche du nôtre que, par exemple, celui des romains (lequel suit le même principe que celui des grecs et des hébreux), dans lequel 37 325 s'écrit :

MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMCCCXXV.

Ce dernier système est, on le voit, assez laborieux, il conduit à des écritures illisibles et rend impossible des calculs avec des grands chiffres (essayez de calculer le produit de ce nombre par CXCI (191) avec la notation romaine !). Les savants de Babylone devaient bien rigoler en voyant comment les hébreux et les grecs comptaient.

Précisons tout de fois une différence essentielle entre le système inventé à Sumer et le nôtre : les babyloniens ne disposaient pas du zéro, ce qui rend très ambiguës certaines écritures. Par exemple « 13 : 55 » pourrait être compris comme étant égal à $13 \times 60 + 55$ ou, par exemple, $13 \times 60^2 + 55 = 13 \times 3\,600 + 55$. Pour pallier cette difficulté, on a vu apparaître chez les babyloniens l'usage d'espaces pour indiquer que l'on doit sauter une puissance, par exemple dans le deuxième cas, un espace entre le chiffre « 13 » et le chiffre « 55 » pour indiquer que, de droite à gauche, on doit passer de 60^0 à 60^2, ce qui donnerait « 13 : : 55 ». Durant les derniers siècles avant notre ère, cet espace fut indiqué par un point afin d'éviter encore certaines ambiguïtés et une notation similaire est apparue à peu près à la même époque chez les chinois. Cet espace préfigure le zéro. Mais ce n'est pas encore zéro, il ne s'agissait à l'époque que d'une notation destinée à rendre la notation d'un nombre plus précise tout comme une voyelle ou un accent rend l'orthographe plus claire. En effet le *zéro* en tant que *nombre* fut introduit plus tard, en Inde.

Terminons sur un autre point commun, quelque chose d'autre que nous avons hérité des babyloniens et qui nous rend très proches d'eux : nous utilisons toujours leur système. Quelle heure-t-il à la seconde près ? Il est 23 heures, 59 minutes et 59 secondes, Docteur Schweitzer. Combien cela fait en secondes ? Pour connaître la réponse dans notre système décimal, nous devons faire un calcul et trouver $23 \times 3\,600 + 59 \times 60 + 59 = 86\,399$ secondes. Dans le système babylonien, cela fait simplement « 23 : 59 : 59 » secondes, il n'y a aucun calcul à faire, le résultat est déjà dans les notations.

1.2 Pourquoi avoir choisi la base 60 ?

Nous ne pouvons bien sûr rien faire de plus qu'émettre des hypothèses. Mais le ciel et l'arithmétique nous fournissent des pistes pour répondre. Les babyloniens étaient en effet obnibulés par les phénomènes célestes et les mages en tiraient des prédictions que les rois prenaient très au sérieux. Ils avaient mesuré que l'année dure 365 jours et ils connaissaient les périodes de la lune. Celles-ci durent approximativement 28 jours et se répètent donc approximativement 12 fois par an. Le chiffre 12, diviseur de 60, règne ainsi sur l'univers en rythmant l'année. Le nombre de jours dans un mois, 28, est malaisé à manipuler (ses seuls diviseurs sont 2, 4, 7 et 14), mais il est tout proche de 30, autre diviseur de 60. En divisant l'année en 12 périodes de 30 jours, on parvient à $360 = 60 \times 6$ jours, il ne manque que 5 jours pour compléter l'année. Le nombre de jour dans l'année devient simple à appréhender dans le système hexagésimal, il s'écrit « 6 : 5 ».

La base 60 a aussi la vertu de simplifier beaucoup de calculs. La raison est que 60 admet un très grand nombre de diviseurs : 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30. En comparaison, 10 n'est divisible que par 2 et 5. En quoi cela change quelque chose ? Considérons par exemple la fraction $2/3$. Dans le système décimal, on essaie d'écrire ce nombre 0,6666..., mais en fait on ne parvient pas réellement à l'écrire car il faudrait aligner indéfiniment des 6 après la virgule pour obtenir une valeur exactement égale à $2/3$. Si l'on s'arrête à un certain rang, on obtiendra un nombre qui sera aussi proche que l'on veut de $2/3$, mais qui ne sera jamais égal à $2/3$. En comparaison, dans un système hexagésimal inspiré de celui des babyloniens (et dans lequel on aurait ajouté le zéro), $2/3$ est exactement égal à « 0 ;40 », car $\frac{2}{3} = \frac{40}{60}$. Cela est dû au fait que 3 est un diviseur de 60 : $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ et donc $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{20}{60} = \frac{40}{60}$.

Enfin, comme nous l'avons vu, la base 60 permet de manipuler des grands chiffres de façon relativement compacte. Les savants babyloniens étaient des experts en calcul et ils étaient capables de manipuler des nombres gigantesques, en rapport avec ce que les grecs et aussi probablement les égyptiens pouvaient faire. Cela permit aux mésopotamiens de développer des connaissances très approfondies en astronomie. Ce savoir servait notamment à effectuer des prédictions des phénomènes astronomiques comme, par exemple, prévoir les éclipses, événements particulièrement redoutés. Plus tard, les grands astronomes grecs comme Ptolémée ont vraisemblablement beaucoup bénéficié des données astronomiques relevées scrupuleusement par les savants babyloniens pendant des siècles à des fins religieuses. Quant à nous autres, nous avons hérité de ces savants, premiers astrologues, le découpage de l'année en 12 mois, du ciel en 12 décans et les 12 signes astraux.

Une autre survivance du système hexagésimal est aussi le fait que nous mesurons les angles en divisant un tour complet en 360 degrés, c'est à dire 6×60 degrés.

Bien sûr la base 60 n'est pas la seule possible et un autre peuple, tout aussi fasciné par le ciel que les babyloniens, a adopté la base 20 : il s'agit des Mayas, qui étaient également de fabuleux astronomes et qui, au moment où Christophe Colomb abordait l'Amérique, connaissaient la durée de l'année avec une précision meilleure que celle les européens. Il est probable que certains peuples gaulois utilisaient aussi la base 20 : cela expliquerait pourquoi les français disent « soixante-dix » au lieu de « septante », « quatre-vingt» au lieu d'« octante » ou « huitante » et « quatre-vingt dix » au lieu de « nonante ». De même il est probable que certains peuples anglo-saxons aient compté en base 12 et cela pourrait expliquer pourquoi les anglais disent « eleven » au lieu de « oneteen » et « twelve » au lieu de « twoteen » (de même les allemands disent « elf » au lieu de « einszehn » et « zwölf » au lieu de « zweizehn »). Dans tous les cas, que la base soit 10, 12, 20 ou 60, les hommes ont privilégié les nombres comportant le plus de diviseurs possibles (on ne connaît pas de civilisation comptant en base 7, 13 ou 14), tout en étant proche de nombres présents dans le ciel ou ... dans nos mains.

1.3 La plus petite base possible

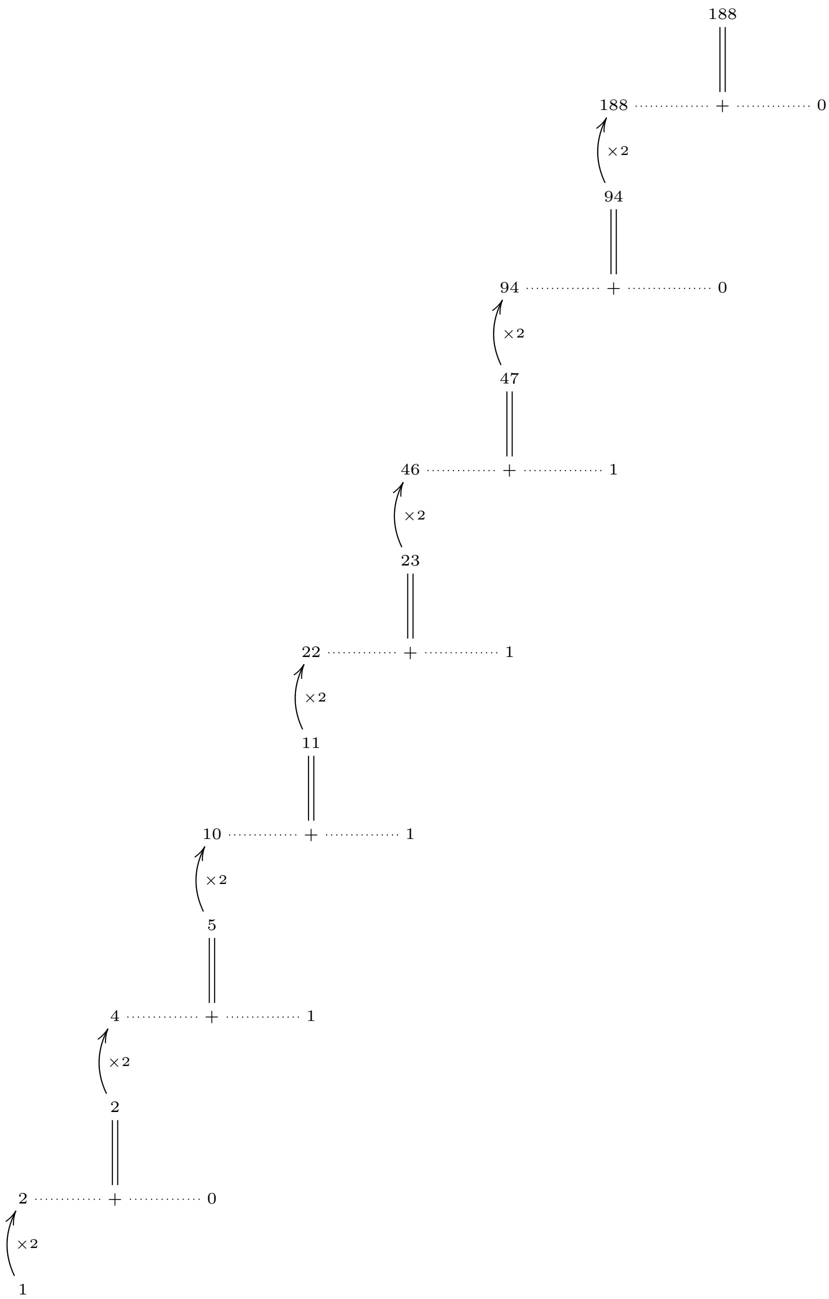
Doit-on regretter le système hexagésimal des babyloniens, si efficace pour noter des grands chiffres de façon concise ? Personnellement, je ne pense pas, car le prix de cette concision est le très grand nombre de chiffres à utiliser. Cela nous poserait problème en particulier quand il s'agirait d'apprendre les tables d'addition et de multiplication. En effet, avant d'apprendre à additionner, soustraire, multiplier et diviser à l'école, nous devons d'abord assimiler les tables d'addition et de multiplication des entiers de 1 à 10. Cela représente près de 100 nombres à mémoriser pour chaque table (en réalité, un peu plus de la moitié, plus précisément 55, puisque l'addition et la multiplication sont commutatives, c'est à dire satisfont les règles $a + b = b + a$ et $a \times b = b \times a$). Si nous comptions en base 60, nous devrions apprendre par cœur 1 830 nombres pour chacune des tables !

Si nous souhaiterions alléger l'effort des écoliers qui doivent apprendre leurs tables d'addition et de multiplication, nous devrions choisir la base la plus petite possible. Celle-ci existe, c'est la base 2 et elle a été proposée en 1703 par Gotfried Wilhelm von Leibniz, esprit universel du début du XVIIIème siècle. Ce dernier avait inventé ce système binaire et il l'utilisait lui-même pour calculer. Le hasard fit qu'il eut connaissance d'un texte chinois très ancien, le *Yi Jing*, datant de près de mille ans avant Jésus Christ, un livre philosophique sur la nature empli de sens « magiques ». Aujourd'hui comme à l'époque de Leibniz, il est très difficile de comprendre ce texte, tant pour la plupart des chinois qui en ont oublié le sens que pour les européens. Leibniz crut reconnaître dans ce texte une justification philosophique du système binaire qu'il avait inventé.

Expliquons rapidement le principe : il est tout à fait analogue à celui des babyloniens ou au nôtre, sauf que l'on doit remplacer 60 ou 10 par 2. Prenons un nombre comme 388, écrit en base 10 : pour éviter toute ambiguïté, nous l'écrirons 188_{10}. Comme précédemment nous effectuons la division euclidienne de 188_{10} par 2, et nous réitérons l'opération en notant à chaque étape le reste et en recommençant avec le quotient.

$$\begin{aligned}
188 &= 94 \times 2 \\
&= (47 \times 2) \times 2 \\
&= ((23 \times 2 + 1) \times 2) \times 2 \\
&= (((11 \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2) \times 2 \\
&= ((((5 \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2) \times 2 \\
&= (((((2 \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2) \times 2 \\
&= 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2.
\end{aligned}$$

La représentation sous forme d'un arbre de cet algorithme est :



Nous écrirons ainsi 188 en base 2 sous la forme (notant $\cdot$ le produit, pour plus de concision)

$188 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$ « 10 111 100 » en base 2.

Nous voyons que l'écriture en base 2 donne des nombres plus longs qu'en base 10. Mais la simplification est que nous n'utilisons que des 0 et des 1 ! Grâce aux divisions euclidiennes successives nous décomposons n'importe quel nombre entier en la somme de puissances de 2 et nous notons de façon abrégée cette somme par une suite de 0 et de 1 : 0 signifiant que nous ne faisons pas figurer la puissance repérée par la position de ce chiffre en partant de la gauche et 1 signifiant au contraire que nous la faisons figurer. L'avantage est que les tables d'addition et de multiplication deviennent particulièrement simples à retenir :

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Vous pouvez vous amuser à calculer en base 2, vous constaterez que c'est extrêmement simple, Leibniz avait raison ! Durant l'Antiquité, les égyptiens, autres grands maîtres des mathématiques (mais d'une façon différente de celle des babyloniens) utilisaient des algorithmes binaires (et donc qu'on pourrait écrire facilement en base 2) dans leurs calculs, bien qu'ils utilisaient la base 10 pour noter les nombres.

Aujourd'hui la base 2 a triomphé et est de loin la plus utilisée : c'est ainsi que tous les ordinateurs fonctionnent.

1.4 L'émancipation des nombres

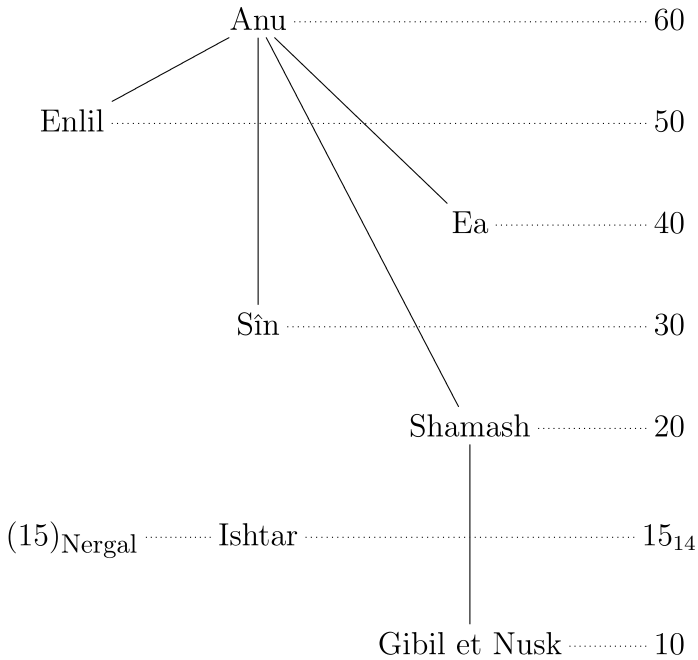
Jusqu'à présent nous n'avons présenté les nombres et les chiffres que comme des systèmes de notation pour décompter et pour effectuer des calculs, grâce à des algorithmes qui nous sont maintenant familiers (additionner, multiplier, etc.) et dont l'efficacité dépend justement du système de notation utilisé. Mais le simple fait de les nommer et de les noter fut aussi un premier pas pour qu'ils deviennent des entités abstraites. Mon sentiment est que ce premier pas fut simultanément accompagné d'une autre forme d'émancipation de leur première fonction utilitaire : celle d'acquérir un sens magique, mythologique ou métaphysique.

Les sumériens avaient, tous comme les égyptiens et bien avant les grecs, tout un panthéon de Dieux qui règnaient sur l'univers et la destinée du monde. Tout en haut du panthéon figurait *Anu*, secondé par *Enlil*, dieu irascible et destructeur, règnant sur la terre et les vents, et *Ea*, dieu civilisateur, ingénieux, patron des arts et des techniques et règnant sur les eaux souterraines. Les sumériens concevaient l'univers comme une immense sphère séparée en deux grandes régions en forme d'hémisphères : l'hémisphère supérieure était remplie par le ciel où règnait Anu, l'hémisphère inférieure était remplie par les enfers souterrains. Entre les deux s'étendait un océan plat avec, flottant en son centre, la terre, plate, elle aussi. Au-dessus de cette terre soufflait les vents et siégeait Enlil, en dessous se trouvait Enlil et les eaux souterraines. Toute cette sphère flottait dans une sorte d'océan cosmique.

Les hommes avaient tout à redouter d'Enlil, qui avait déclenché le déluge, juste parce qu'il trouvait que les hommes faisaient trop de bruit (et avant que le Dieu de l'ancien testament ait la même idée !). Mais ils pouvaient compter sur Ea pour trouver des solutions pour échapper aux colères d'Enlil, comme par exemple aider le plus sage des hommes, le *supersage*, à construire une Arche pour accueillir les animaux pour échapper au déluge, tout comme un certain Noé [1].

D'autres dieux présidaient aux puissances de l'univers : *Sîn*, dieu de la lune, *Shamash*, dieu du soleil, garant de l'ordre du monde, de la lumière, de la chaleur et de la justice, *Ishtar*, déesse de la séduction, qui entraînait les hommes et les dieux à leur perte et qui préfigure Vénus. Enfin il y avait *Nergal*, dieu de la guerre, de la destruction, dont le descendant moderne est Satan.

Si nous nous attardons sur ce panthéon, c'est parce qu'à chaque dieu était attribué un nombre : 60 pour Anu, 50 pour Enlil, 40 pour Ea, etc. (plusieurs dieux pouvaient partager le même nombre, cf. [2]). Essayons d'en présenter quelques-uns sous forme d'un arbre généalogique (en respectant la hierarchie dictée par les nombres) :



Nous constatons qu'au chef du panthéon revient le chiffre 60, plus grand chiffre de l'écriture sumérienne. Aux plus bienveillants des dieux (Ea, Shamash) sont attribués des chiffres dont le rapport avec 60 est un multiple entier de 1/3 ($40/60 = 2/3$, $20/60 = 1/3$). A Sîn, dieu de la lune et qui, par conséquent, divise l'année en 12 mois durant approximativement 30 jours revient le chiffre 30, moitié de 60. A Ishtar est attribué le chiffre 15, le quart de 60. Aux dieux moins bienveillants comme Enlil correspond le chiffre 50, dont le rapport avec 60 est plus complexe ($50/60 = 5/6$). Enfin, au plus terrible, Nergal, correspond le nombre 14 ($14/60 = 7/30$). La numérologie nous fait ici apparaître Nergal comme une version dégénérée d'Ishtar. Gibil et Nusk sont les deux fils de Shamash, ils se sont partagé l'héritage.

Ce que l'on pourrait en retenir du point de vue de l'histoire des nombres est que, en étant associés à des dieux et à des puissances de la nature, les chiffres, initialement destinés à la notation et au calcul, ont acquit une identité indépendante de leur fonction utilitaire. Les nombres ne sont pas encore des entités abstraites, mais ils en prennent le chemin.

1.5 Pythagore

Il y eu certainement d'autres évolutions parallèles, pour associer l'ordre du monde des chiffres à celui de notre univers, comme dans le Yi Jing, dans lequel on pourrait reconnaître une correspondance entre le système binaire et la dualité entre le *yin* et le *yang*, ou comme dans la Cabbale au sein du judaïsme. Durant le sixième siècle avant notre ère, un homme poursuivit cette voie à l'extrême au point de conférer aux nombres entiers une importance plus grande que celle des dieux. Il s'agit de Pythagore.

Son influence sur la pensée et notamment sur les mathématiques semble avoir été immense, et pourtant, on ne sait pratiquement rien de lui et il n'a laissé aucun écrit. Né aux alentours de 600 avant Jésus Christ à Samos, île au large de l'Ionie (région qui correspond aujourd'hui à la côté ouest de la Turquie), on perd sa trace durant ses années de jeunesse : a-t-il été initié au savoir des égyptiens dans la vallée du Nil, ou bien a-t-il appris auprès des mages chaldéens en Syrie ? Différentes hypothèses contradictoires avaient déjà été formulées il y a deux mille ans. On le retrouve vers 535 avant JC à Crotone, autre colonie grecque, aujourd'hui au sud de l'Italie. Il se fait passer pour un descendant du dieu Hermès et il a fondé la première école philosophique, à moins que cela ne soit une secte.

A Crotone, il est entouré de nombreux adeptes, qui doivent consentir à une longue initiation pour parvenir à la sagesse. Cette initiation n'est pas seulement un apprentissage théorique, mais nécessite de respecter toute une pratique, dont notamment le fait de suivre un régime végétarien. La récompense était peut-être la *métempsycose*, réincarnation de leur âme. Mais il leur est interdit de divulguer l'enseignement du maître et c'est une bonne raison, en plus des siècles qui nous séparent de lui, pour expliquer le flou qui entoure son savoir.

Mais les penseurs et les mathématiciens des générations suivantes (dont Platon et Aristote, Théétète d'Athènes, Eudoxe de Cnide...) parleront de lui comme l'inventeur de la philosophie et le père de nombreux concepts mathématiques. Voici donc ce que l'on rapporte de ses idées, avec probablement de grandes déformations apportées notamment par Platon, fasciné par la beauté du monde mathématique. Il se peut bien aussi qu'on lui ait attribué de nombreuses idées qui avaient été découvertes avant lui.

Le monde est gouverné par les nombres 1, 2, 3, ..., que l'on appelle aujourd'hui *entiers naturels (strictement) positifs*. Ces entités sont ce qu'il y a de plus fondamental dans l'univers et sont à l'origine de l'harmonie. Celle-ci se révèle non seulement dans les rapports entre nombres entiers, mais aussi dans la musique. C'est à Pythagore que l'on attribue la découverte de la gamme musicale : en pinçant la corde d'une harpe, on entend un note, dite *fondamentale*, en divisant la longueur de la partie vibrante de la corde par deux, on entend une note « en harmonie » avec la note fondamentale, qui sonne une octave au-dessus de la note fondamentale. Si l'on réduit la longueur de la partie vibrante de la corde d'un facteur $3/4$, on entend la note à la quarte et, pour un facteur $2/3$, on entend la note à la quinte.

Cette expérience très simple est à la fois une expérience de physique, une expérience de mathématique (ou plutôt de physique mathématique) et une expérience esthétique. Elle montre que l'on peut « entendre » les rapports entre les nombres entiers tout en percevant la beauté : elle nous révèle les nombres en nous mettant en « communication » avec eux et sert parfaitement le dessein de Pythagore. Elle établit également un lien entre Vérité et Beauté, deux valeurs que les grecs ont cultivé au plus haut point et qui n'ont cessé de

FIGURE 2 – Les cordes vibrantes dont les longueurs ont des rapports rationnels entre elles sont en harmonie

guider des générations de mathématiciens depuis lors.

Ce fut là déjà une contribution psychologique de Pythagore et de ses disciples : donner au nombre un statut quasiment sacré, dont il restera ultérieurement un objet abstrait.

1.6 Le « théorème de Pythagore »

Il s'agit d'un des résultats les plus connus en mathématiques : dans un triangle rectangle, le carré de la longueur du plus long côté (que l'on appelle l'*hypoténuse*) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

On dit que Pythagore en aurait donné le premier une preuve générale. Mais nous ne la connaissons pas. Peut-être est-ce l'une des démonstrations décrites par Euclide dans son livre, *Les éléments*, à moins que ce soit une des centaines de démonstrations que l'on connaît aujourd'hui, ou encore une autre... Ou peut-être, tout simplement, l'avait-il juste énoncé sans en donner de preuve. La première démonstration serait alors due à Euclide ou l'un de ses prédecesseurs, comme le pensait Proclus, un philosophe du 5ème siècle après JC. En fait ce résultat fut aussi énoncé en Inde entre le 8ème et le 4ème siècle avant JC dans l'*Apastamba* et en Chine dans le *Zhoubli suanjng* au 3ème siècle avant JC, c'est à dire à peu près en même temps qu'Euclide écrivit les eléments. Une preuve, très différente de celle d'Euclide, apparaît dans *Jiuzhang suanshu* (*Les neuf chapitres sur l'art mathématique*), écrit en Chine il y a 2 000 ans.

De plus, bien avant qu'un grec, un chinois ou un indien ait énoncé et, a fortiori, montré ce résultat, les babyloniens l'avaient pressenti et ils avaient remarqué qu'il était vrai pour certains triangles dont les côtés ont des longueurs entières, c'est à dire égales à des multipes entiers d'une unité de longueur. Le plus simple est le triangle dont les longueurs des côtés sont 3, 4 et 5. Ces longueurs satisfont bien la relation de Pythagore :

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

et le triangle ainsi formé est bien rectangle. Les triplets d'entier (a, b, c) tels que $a^2 + b^2 = c^2$ sont appelé *triplets de Pythagore*. Chacun de ces triplets permettent de construire un triangle rectangle. Les mésopotamiens en avaient découvert plus de mille ans avant Pythagore. Bien plus tard, à l'époque d'Euclide, les babyloniens connaissaient des triplets de

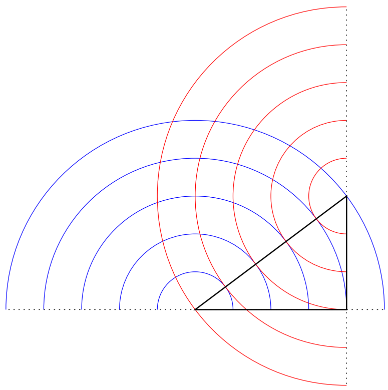


FIGURE 3 – Un cas particulier du théorème de Pythagore : le triangle dont les côtés ont pour longueur 3, 4 et 5.

Pythagore assez gigantesques, comme par exemple $(12\,709, 13\,500, 18\,541)$. Cela signifient qu'ils avaient remarqué que : $12\,709^2 + 13\,500^2 = 18\,541^2$, ce qui n'est pas totalement immédiat.

Tout cela pour dire qu'on ne sait pas très bien à qui attribuer le « théorème de Pythagore ». Mais le plus important est que, durant les derniers siècles avant JC, en Grèce, en Chine, en Inde et peut-être en Mésopotamie, les hommes élaborent probablement les preuves de résultats mathématiques généraux, ce qui nécessite une certaine abstraction.

1.7 Nombres triangulaires, nombres carrés et démonstration par récurrence

Les grecs avaient un point faible que nous avons déjà relevé : leur système de notation des nombres était beaucoup moins efficace que celui des babyloniens. Ils apprirent à contourner ce handicap grâce à l'un de leurs points forts, la géométrie, discipline qu'ils ont développée de façon extraordinaire. La maîtrise de la géométrie par les grecs date d'avant Pythagore et remonte au moins à Thalès de Milet. Celui-ci est l'auteur des théorèmes de géométrie les plus anciens que nous connaissions. L'un d'eux est le suivant :

Si un triangle est inscrit dans un cercle et si l'un de ses côtés coïncide avec un diamètre du cercle, alors le triangle est rectangle en le sommet opposé au côté qui est le diamètre. Thalès avait séjourné en Egypte et il avait très probablement appris la géométrie auprès des savants égyptiens, dont les connaissances en géométrie étaient certainement considérables : deux mille ans avant Thalès, les égyptiens avaient construit leurs célèbres pyramides, dont la précision architecturale est stupéfiante.

Ainsi les pythagoriciens firent appel à la géométrie pour représenter les nombres entiers, clefs de l'harmonie du monde en les dessinant sous la forme de figures composées de points :

1	2	3
$\cdot$	$\cdot\cdot$	$\therefore$

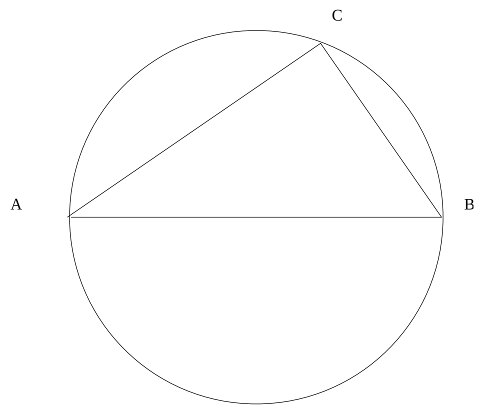


FIGURE 4 – Le théorème de Thalès : si le triangle ABC est inscrit dans un cercle et le côté AB est un diamètre du cercle, alors le triangle est rectangle en C.

Dans cette recherche, Pythagore et ses disciples privilégiaient les nombres *figurés*, c'est à dire ceux qui admettent des représentations visuelles particulièrement remarquables. Par exemple, les *nombres triangulaires*, correspondant aux figures en forme de triangle : Ces

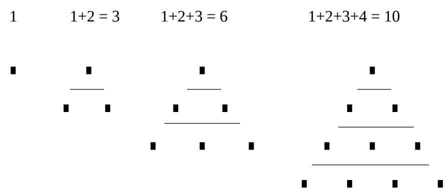


FIGURE 5 – Suite de nombres triangulaires

nombres peuvent être rangés selon une suite croissante de nombres obtenue en posant un caillou, en ajoutant une rangée de deux cailloux en dessous, puis une rangée de trois cailloux en dessous, etc. On obtient ainsi les valeurs $1, 3, 6, 10, 15, 21, \cdots$. On peut les calculer par un algorithme simple qui nous dit comment passer d'une valeur de la suite à la suivante : il suffit d'ajouter à chaque étape un entier, qui est augmenté lui-même d'une unité à chaque étape (puisque cet entier correspond au nombre de cailloux qui sont dans la rangée que l'on ajoute en bas d'un triangle pour l'agrandir. Un tel algorithme est un exemple de procédé par *récurrence*. Appelons $T(n)$ le nombre de cailloux qui composent le n-ième triangle : $T(1) = 1$, $T(2) = 3$, $T(3) = 6$, etc.

D'après ce qui précède, $T(n)$ est la somme des n premiers nombres entiers, c'est à dire : $T(n) = 1 + 2 + \cdots + n$. On connaît une formule pour calculer $T(n)$:

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vous pouvez vérifier vous-même que cette formule marche en la testant sur les premières valeurs de n. On aimerait alors savoir comment se convaincre ou convaincre son interlocuteur que cette formule est vraie pour toutes les valeurs de n. Le vérifier pour chaque valeur ? C'est impossible car il y en a une infinité !

Les grecs, habitués à discuter librement et âprement entre eux sur les places publiques, ou lors de banquets bien arrosés, furent sans doute parmi les premiers à pratiquer l'art du défi intellectuel : par exemple, convainc-moi que la somme des n premiers nombres entiers est $\frac{n(n+1)}{2}$. Une bonne réponse nécessite une démonstration logique. Cela est possible en exploitant la construction par récurrence des nombres triangulaires : si je suis capable de montrer que :

(i) $T(1) = 1$ et que

(ii) si tu es convaincu que $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, alors j'arriverai aussi à te montrer que la même propriété a lieu si je remplace n par $n+1$, c'est à dire que $T(n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$,

alors tu devras reconnaître que j'ai raison.

Ce raisonnement s'appelle justement une *démonstration par récurrence*. Il invite implicitement à exécuter un algorithme automatique sans fin, certes, mais qui est en principe capable de venir à bout de n'importe quel défi : si mon interlocuteur me demande de montrer que la propriété est vraie pour $n = 1\,000\,000$, alors, à défaut d'exécuter un million d'étapes de l'algorithme, mon interlocuteur devra bien admettre que rien ne m'empêche de le faire en théorie. Une fois qu'on a admis le principe de cet algorithme, il est très simple à mettre en œuvre : le fait que $T(1) = 1$ est immmédiat ; quant à la deuxième propriété, elle se vérifie par un calcul simple : si $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, alors

$$T(n+1) = T(n) + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

et nous obtenons bien ainsi ce que nous cherchions.

A vrai dire la représentation géométrique des pythagoriciens permet une autre preuve, plus directe et plus évidente « visuellement ». Nous pouvons en effet réarranger les cailloux

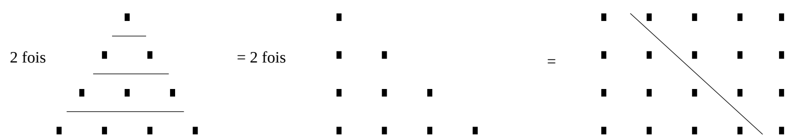


FIGURE 6 – Comment retrouver qu'un triangle « équilatéral » dont chaque côté est composé de 4 cailloux compte a $4 \times (4+1)/2 = 10$ cailloux.

dans un triangle de manière à former un triangle rectangle, ce qui ne change pas le nombre de cailloux dans le triangle [1]. Puis nous dupliquons ce triangle et posons le double ainsi produit à côté du premier triangle en l'ayant tourné d'un demi-tour, de sorte à former un

1. Cela est l'analogue discret du fait que l'aire d'un triangle est la moitié du produit de la longueur de l'un de ses côtés par la hauteur perpendiculaire à ce côté, ainsi, lorsqu'on déforme le triangle en conservant une longueur et la hauteur qui lui est perpendiculaire, on ne change pas son aire

rectangle. Les deux triangles assemblés forment un rectangle qui compte deux fois plus de cailloux que chacun des deux triangles qui le composent. Or il est facile de calculer le nombre de cailloux de ce rectangle : si le triangle de départ avait n cailloux sur chacun de ses côtés, alors le rectangle obtenu a un côté de n cailloux et un autre de $n + 1$ cailloux. Le nombre total de cailloux dans le rectangle est donc $n(n + 1)$ et, en divisant par deux, nous retrouvons le résultat précédent. Cette méthode fut (re)découverte par le jeune mathématicien Gauss alors qu'il était écolier.

Une autre famille de nombres que les pythagoriciens affectionnaient particulièrement étaient les nombres carrés, c'est à dire le nombre de cailloux qu'il faut pour constituer un carré. A nouveau, ils s'intéressaient à la façon de produire tous les carrés par récurrence, c'est à dire en partant de la figure la plus simple : un seul caillou, puis en ajoutant des couches successives pour passer à un carré de deux cailloux sur deux, puis trois sur trois, etc. La suite de nombre (de cailloux) ainsi obtenue est tout naturellement appelée suite de

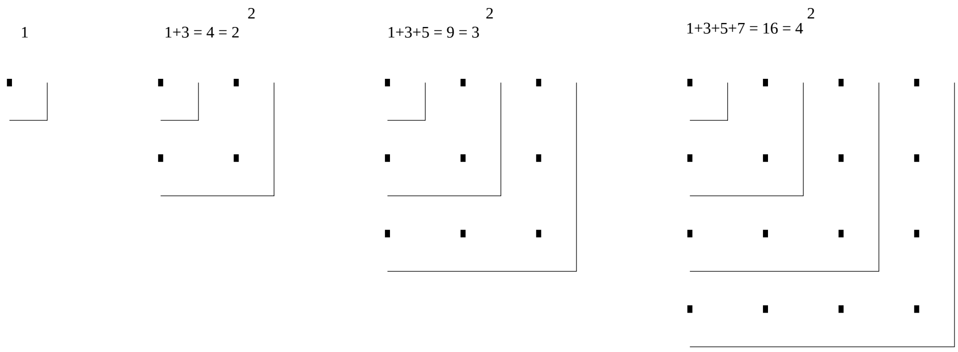


FIGURE 7 – Suite de nombres carrés

carrés. D'ailleurs aujourd'hui encore, lorsque nous parlons de nombres entiers qui sont des carrés, nous désignons les nombres qui peuvent être représentés de cette façon. La figure que l'on ajoute a chaque étape a la forme d'une équerre. Les grecs l'appelaient *gnomon*, du nom d'un instrument composé d'une simple tige plantée verticalement dans le sol ou sur une surface horizontale et qui servait à déterminer la hauteur du soleil, en observant l'ombre projetée par le gnomon. On observe que, dans la suite de nombres carrés, on passe

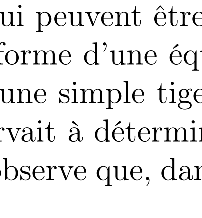


FIGURE 8 – Un gnomon

d'un nombre à un suivant en ajoutant le nombre de cailloux qu'il faut mettre dans un gnomon : d'abord trois, puis cinq, puis, sept, etc. A chaque étape, comme le côté du carré s'est agrandi d'une unité, le nombre de cailloux nécessaires pour constituer le gnomon augmente de deux unités. Il est donc égal à $2n + 1$ à l'étape n. Si on note $n \times n = n^2$ le nombre carré correspondant au carré numéro n, on passe donc de n^2 à $(n + 1)^2$ en lui ajoutant le nombre $2n + 1$:

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Cette formule est un cas particulier d'une formule bien connue depuis très longtemps.

2 Deux graves crises

Les pythagoriciens semblent avoir conçu le projet d'expliquer le monde et son harmonie à partir des nombres entiers et de leurs *rapports*, que l'on appelle aujourd'hui *nombres ratinonels*. Ce rêve s'est heurté à une réalité beaucoup plus complexe et plus riche qu'ils ne l'avaient probablement imaginée, à savoir qu'il existe plein de nombres qui ne sont pas rationnels et ceux-ci sont même pratiquement partout. Un exemple très simple est $\sqrt{2}$, le nombre dont le carré vaut 2.

Une autre déconvenue est la découverte que les outils de raisonnement logique que les grecs avaient découverts à l'époque avaient des limites que l'on atteignaient très facilement. Par exemple le raisonnement par récurrence permet l'exploit de montrer en une seule fois qu'une propriété est vraie une infinité de fois. Mais il échoue à décrire le continu partout présent dans le monde physique et, en particulier, à décrire le mouvement d'une façon logique, comme l'a montré Zénon d'Elée dans ses paradoxes.

2.1 Des grandeurs qui ne sont ni entières, ni rationnelles

Le nombre noté $\sqrt{2}$ et appelé *racine carrée de 2*, est le nombre dont le carré vaut 2. Il peut apparaître de multiples façons. L'une d'elles est la suivante : on dessine un carré et on cherche à dessiner un autre carré dont l'aire est le double de celle du premier carré. Sachant que lorsqu'on multiplie les longueurs d'un carré par un nombre α, son aire est multiplié est $\alpha^2 = \alpha \times \alpha$, on comprend alors que le problème consiste à tracer un carré dont les dimensions sont multipliées par un nombre α tel que $\alpha^2 = 2$, autrement dit, $\alpha = \sqrt{2}$. C'est à travers ce problème que $\sqrt{2}$ intervient dans un texte dû à Platon, le *dialogue de Ménon*.

Dans ce dialogue, Platon met en scène son propre maître, Socrate, discutant avec Ménon. Tous deux cherchent à comprendre ce qu'est la vertu. Le dialogue les amène à discuter de la *réminiscence* de choses dont nous aurions eu connaissance dans une vie antérieure et dont l'existence viendrait corroborer l'immortalité de l'âme. Socrate montre que cette réminiscence est accessible à tout homme, même dépourvu d'instruction, pourvu qu'on l'amène à s'interroger lui-même et l'aider ainsi à retrouver ces connaissances oubliées. Pour les besoins de sa démonstration il fait appeller un jeune esclave qu'il interroge.

Socrate trace un carré dont les côtés ont une longueur de 2 unités de longueur (par exemple, de nos jours, on choisirait le mètre comme unité de longueur). Son aire vaut

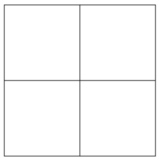


FIGURE 9 – Le carré tracé par Socrate : son aire est égale à 4, comment construire un carré dont l'aire en est le double ?

donc 4 unités d'aire (on convient qu'un carré dont les côtés sont longs chacun d'une unité de longueur a une aire qui vaut une unité d'aire). Socrate demande à l'esclave s'il peut tracer un carré dont l'aire serait le double du premier carré, autrement dit, de 8 unités d'aire. La première réponse qui vient à l'esprit de l'esclave est de tracer un carré dont les côtés sont deux fois plus longs que ceux du premier carré, c'est à dire longs de 4 unités.

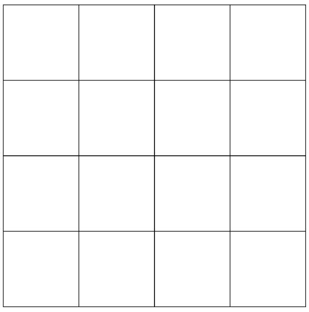


FIGURE 10 – La première réponse de l'esclave : l'aire de ce carré n'est pas le double de 4 mais 16, c'est à dire quatre fois celle du premier carré.

Socrate trace un tel carré et l'esclave constate alors que cela ne marche pas, puisque l'aire de ce nouveau carré est de 16 unités (car $4 \times 4 = 16$), c'est à dire le double de ce que demandait Socrate.

L'esclave réfléchit et propose de tracer un carré dont les longueurs seraient plus courtes, à savoir un carré dont les côtés font 3 unités de longueur. Mais cela ne marche pas non plus, car l'aire de ce nouveau carré vaut 9 unités, ce qui est différent de 8. L'esclave est alors bien embarassé.

Socrate demande alors à l'esclave de tracer les diagonales du carré. L'esclave finit alors par découvrir alors la solution : celle-ci consiste à tracer un carré dont les côtés ont même longueur que celles des diagonales du carré initial. Pour Platon, qui raconte cette histoire, l'esclave n'était pas capable de trouver la solution seul, ne serait-ce que parce qu'il ne se posait pas la question et, qu'en plus, il n'avait pas conscience qu'il pouvait y arriver. Guidé par Socrate, il retrouve quelque chose dont son âme avait gardé une trace. Les mathématiques sont donc un exercice privilégié pour éveiller en nous ces réminiscences.

Notons que la solution donnée par Socrate nous fournit une preuve du théorème de Pythagore dans le cas d'un triangle rectangle isocèle (les deux côtés opposés à l'hypothénuse

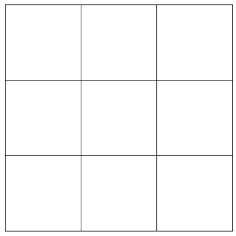


Figure 11 – La deuxième réponse de l'esclave : l'aire de ce carré est 9 au lieu de 8.

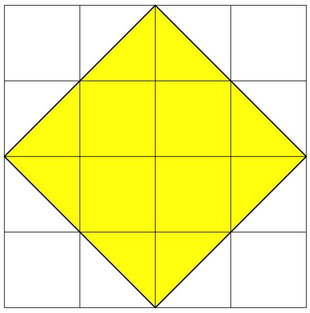


Figure 12 – La solution de Socrate : l'aire du carré central inscrit dans le grand carré est la moitié de celle du grand carré, c'est à dire 8, la valeur que nous cherchions. En effet le grand carré peut être découpé en 4 carrés, qui font chacun 2 unités de longueur sur 2. Chacun de ces carrés 2 sur 2 est divisé par une diagonale en deux triangles rectangles de même aire. Or le carré central inscrit est exactement constitué par la réunion de 4 de ces triangles rectangles, chacun étant pris dans un carré de 2 sur 2. Son aire est donc la moitié de celle du grand carré.

ont même longueur).

En conclusion, d'un côté, ce dialogue nous enseigne que le projet pythagoricien de représenter le monde avec des nombres entiers ou des nombres rationnels échoue sur des questions très simples, puisqu'un simple esclave, certes guidé par Socrate lui-même, est capable de s'en rendre compte.

D'un autre côté, nous pouvons substituer aux nombres entiers ou rationnels les grandeurs géométriques comme par exemple celle de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, qui nous révèlent des grandeurs inaccessibles dans le monde des nombres de Pythagore. C'est exactement ce que Socrate dit à l'esclave embarassé : « *si tu aimes mieux ne pas faire de calculs, montre la nous* ».

On ignore qui, parmi les penseurs inspirés par Pythagore, fit cette découverte. On sait que Théodore de Cyrène (originaire d'une ville située aujourd'hui sur la côté lybienne en Afrique), précepteur de Socrate et de Platon, et Théétète d'Athènes, disciple de Théodore, y contribuèrent.

Evidemment les tentatives de l'esclave n'ont pas épuisé toutes les possibilités, mais simplement montré que :

— passer d'un carré de 2 unités sur 2 à un carré de 4 unités sur 4 revient à multiplier les proportions par 2 et à multiplier l'aire par 4, qui est trop grand ;

— passer d'un carré de 2 unités sur 2 à un carré de 3 unités sur revient à multiplier les proportions par 3/2 et à multiplier l'aire par 9/4, qui est encore trop grand.

Donc, $\sqrt{2}$ ne peut pas être égal à 1, 3/2 ou 2 et, bien entendu à tout nombre inférieur à 1 ou supérieur à 2. Cela ne prouve pour autant qu'il n'existe pas un nombre rationnel, c'est à dire de la forme p/q, où p et q sont des entiers. Nous montrons ce fait un peu plus loin, nous devrons pour cela faire preuve de plus d'ingéniosité.

2.2 Les paradoxes de Zénon d'Elée

Le fait qu'on puisse dessiner et « montrer » des grandeurs sur une ligne et que l'on ne puisse pas les calculer, comme Socrate le dit à l'esclave, montre qu'une ligne continue contient des points que notre intelligence ne peut pas concevoir *si nous raisonnons uniquement avec des nombres entiers et leurs rapports*. Cela est la manifestation d'une propriété encore plus déconcertante du « continu » : par exemple, il est évident que, d'une part, une ligne continue contient des points en quantité infinie, mais d'autre part, il n'est pas pour autant évident que l'on peut en déduire qu'une ligne est constituée d'une infinité de points, même si cela est parfois ce que l'on apprend à l'école...

Ces questions sont d'autant plus importantes qu'elles concernent non seulement le domaine de la géométrie, mais aussi celui de la physique. En effet notre espace, le temps, ont toutes les apparences d'une structure continue. Par conséquent, il en est aussi de même du mouvement, qui fait intervenir l'espace et le temps.

Zénon d'Elée (né vers 490 et mort vers 430 av. J.-C.) exprima ces difficultés (ainsi que d'autres), à travers des paradoxes, qui ont suscité bien des réflexions.

La dichotomie

Considérons un segment de droite limité par les points A et C. Considéron le point B, situé au milieu du segment, puis le point B_1, situé au milieu de B et C, puis le point B_2, situé au milieu de B_1 et C, etc. Un mobile se déplace sur la droite et doit aller de A à C. Il doit pour cela passer par le point B, puis par le point B_1, puis par le point B_2, etc.

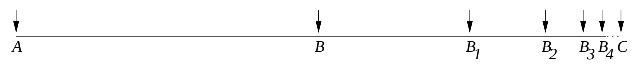


FIGURE 13 – Paradoxe de la dichotomie

Continuant ainsi nous constatons que le mobile ne parviendra jamais au point C, car il lui faudra un nombre infini d'étapes, ce qui est impossible en un « temps » fini !

Achille et la tortue

Achille et la tortue font une course. Achille étant plus rapide, on permet à la tortue de partir plus en avance qu'Achille. Ainsi Achille part du point O, tandis que la tortue part du point A. Les deux athlètes partent au même instant. Au bout d'un certain temps, Achille a atteint le point A. Mais pendant le temps qu'il a fallu à Achille pour franchir la distance qui sépare A de O, la tortue a avancée et elle est arrivée en un point A'. Pour rattraper la tortue, Achille doit maintenant atteindre le point A'. Mais pendant le temps qu'il faut à Achille pour arriver en A', la tortue est arrivée en un point A''. Achille doit donc atteindre le point A'', etc.

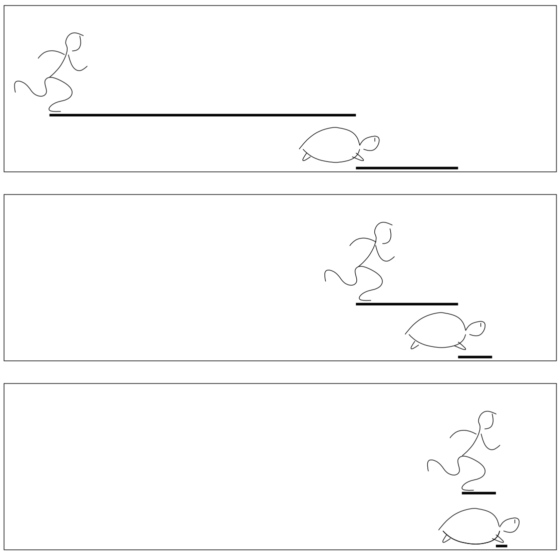


FIGURE 14 – Achille et la tortue.

En ainsi suivant cette course étape par étape, nous réalisons qu'Achille n'arrivera jamais à rattraper la tortue.

La flèche

Une flèche lancée est immobile dans sa course !

En effet, à chaque instant, elle se occupe la portion d'espace égale à elle-même. Dit autrement, si on décompose le temps en une suite d'instants, à chaque instant, il est impossible de concevoir que la flèche bouge, car un instant n'a aucune durée.

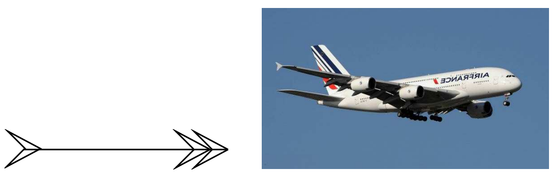


FIGURE 15 – La flèche — Sa version moderne : un avion (si vous êtes à une certaine distance d'un aéroport et si vous observez un avion en train d'atterrir, vous aurez l'illusion que l'avion ne bouge pas).

Le stade

Trois trains, imaginons par exemple des rangées de soldats, sont dans un stade, disposés de façon parallèle. L'un des trains est immobile, les deux autres se déplacent à la même vitesse, mais dans des sens opposés. Si nous sommes dans un train en mouvement, nous croisons les rangées du train qui avance en sens inverse deux fois plus rapidement que les rangées du train immobile : si dans un intervalle de temps, nous passons d'une rangée du train immobile à une autre, alors, durant le même temps, nous croissons deux rangées du train venant en sens inverse.

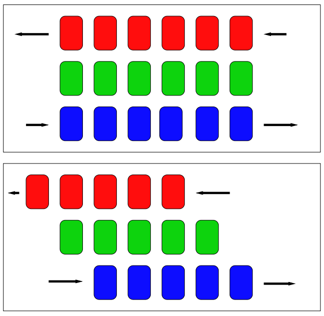


FIGURE 16 – Le stade

On pourrait réfuter ces paradoxes comme Diogène le cynique qui répondait qu'il suffisait de marcher pour montrer que le paradoxe d'Achille ou de la dichotomie n'existait pas. En vérité les paradoxes de la dichotomie et d'Achille illustrent le fait qu'il est impossible de concevoir par la pensée et logiquement un segment ou une course comme une suite infinie de séquences, même si on a envie de protester, comme Diogène, et de dire que ça doit être possible !

Ces paradoxes ont été présentés et analysés en détails par Aristote dans sa *Physique*. Ainsi, à propos de la *dichotomie*, Aristote écrit dans sa *Physique*, livre III, chapitre 6 : « car là où l'on voit une grandeur divisée indéfiniment, du même coup il apparaîtra que par addition on tende vers la grandeur déterminée. En effet, dans la grandeur finie, si, en prenant une grandeur déterminée, on prend ensuite une autre grandeur selon le même rapport, mais sans prendre une grandeur qui soit la même que le tout, on n'arrivera pas au bout de la grandeur finie. Mais si on augmente ce rapport à ce que toujours la grandeur comprise dans la grandeur finie initiale soit la même, on y arrivera, parce que toute grandeur finie est épuisée par n'importe quelle grandeur déterminée. Donc il n'est pas possible que l'infini existe autrement qu'en puissance et par réduction... ». C'est un peu dur à suivre (il faut penser au mérite qu'ont les traducteurs qui déchiffrent ces textes en grec ancien...). Nous verrons plus loin que l'idée exprimée ici est celle du principe d'*exhaustion*.

Ces réflexions amènent Aristote à réfléchir sur ce qu'est le continu. Dans le livre IV, chapitre 1 : « il est impossible que quelque chose de continu soit constitué d'indivisibles, par exemple une ligne de points, si toutefois la ligne est continue et le point indivisible.. »

Pour continuer la difficulté soulevée par le paradoxe de la flèche, Aristote écrit dans le livre VI, chapitre 8 : « Car ni être mû ni d'être en repos n'existent dans le « maintenant », mais il est vrai que dans le « maintenant » le mobile n'est pas mû et est par rapport à quelque chose ; dans le temps, par contre, il n'est pas possible d'être par rapport à ce qui est au repos. En effet, il en découlerait que ce qui est transporté serait au repos. ». La solution proposée par Aristote est de considérer l'état de repos comme l'état de mouvement comme deux états différents. De surcroît, il est impossible de définir ce que sont des deux états durant un instant, cela n'a pas de sens.

Références

[1] J. Bottero, *Au commencement étaient les dieux*, Fayard, 2012.

[2] A. Pichot, *La naissance de la Science*, Gallimard.

Table des matières