Université Paris Diderot, Master 2 de Mathématiques Année 2016-2017

Examen du lundi 9 janvier 2017

Durée : 3 heures. Les notes de cours sont autorisées.

1 Usage de multiplicateurs de Lagrange

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\mathcal{M}$ une variété de dimension n. On notera $T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M}$ le fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}$ dont la fibre en le point $x \in \mathcal{M}$ est $T_x\mathcal{M} \oplus T_x^*\mathcal{M}$. Un point sur $T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M}$ est donc un triplet (x, v, p), où $x \in \mathcal{M}$, $v \in T_x\mathcal{M}$ et $p \in T_x^*\mathcal{M}$. Soit

$$L: \begin{array}{ccc} I \times T\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x, v) & \longmapsto & L(t, x, v) \end{array}$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. À L est associée la fonctionnelle $\mathcal{L}$ définie sur $\mathcal{C}^\infty(I, \mathcal{M})$ par $\mathcal{L}[\gamma] = \int_I L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$, pour tout $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathcal{M})$. On suppose que la transformée de Legendre $I \times T\mathcal{M} \longrightarrow I \times T^*\mathcal{M}$ qui, à (t, x, v), associe $(t, x, \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, x, v)dx^i)$ est un difféomorphisme (hypothèse de Legendre) et on note $(t, x, p) \longmapsto (t, x, V(t, x, p))$ l'application inverse.

(i) On considère sur $\mathcal{C}^\infty(I, T\mathcal{M})$ la fonctionnelle $\mathcal{L}^T$ définie par $\mathcal{L}^T[\gamma, \zeta] = \int_I L(t, \gamma(t), \zeta(t))dt$, pour tout $(\gamma, \zeta) \in \mathcal{C}^\infty(I, T\mathcal{M})$. Déterminer l'équation d'Euler–Lagrange de cette fonctionnelle. Est-ce vraiment intéressant ?
Réponse — Soit $(x^i, v^i)_{1 \leq i \leq n}$ des coordonnées locales sur $T\mathcal{M}$, et notons $\gamma^i = x^i \circ \gamma$ et $\zeta^i = v^i \circ (\gamma, \zeta)$. Sous l'effet d'une déformation de (γ^i, ζ^i) de la forme $(\gamma^i + \varepsilon\delta\gamma^i, \zeta^i + \varepsilon\delta\zeta^i) + o(\varepsilon)$, où $(\delta\gamma^i, \delta\zeta^i)$ est à support compact dans l'intérieur de I, la variation de $\mathcal{L}^T$ sous cette déformation est :

$$\int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \zeta)\delta\gamma^i + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \zeta)\delta\zeta^i \right] dt.$$

Elle s'annule pour tout $(\delta\gamma, \delta\zeta)$ ssi $\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \zeta) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \zeta) = 0$. Ces deux conditions ne conduisent donc pas à des équations différentielles. Leur intérêt est donc très limité.

(ii) Sur $T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M}$ on considère la fonctionnelle $\mathcal{L}^{TT^*}$ qui, à $(\gamma, \zeta, \pi) \in \mathcal{C}^\infty(I, T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M})$, associe

$$\mathcal{L}^{TT^*}[\gamma, \zeta, \pi] = \int_I \left[L(t, \gamma(t), \zeta(t)) + \pi_i(t)(\dot{\gamma}^i(t) - \zeta^i(t)) \right] dt.$$

Déterminer les équations d'Euler–Lagrange satisfaites par une application (γ, ζ, π) qui est point critique pour des variations $(\delta\gamma, \delta\zeta, \delta\pi)$ (sections de $(\gamma, \zeta, \pi)^*T\mathcal{M} \oplus_{\mathcal{M}} T^*\mathcal{M}$) à support compact.
Réponse — On suit la même démarche qu'à la question précédente. Partant d'une déformation qui s'exprime en coordonnées locales $(\gamma^i + \varepsilon\delta\gamma^i, \zeta^i + \varepsilon\delta\zeta^i, \pi_i + \varepsilon\delta\pi_i) + o(\varepsilon)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(\delta\gamma, \delta\zeta, \delta\pi) \\
&\quad = \int_I \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \zeta)\delta\gamma^i + \pi_i \frac{d(\delta\gamma^i)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \zeta)\delta\zeta^i - \pi_i\delta\zeta^i + \left(\frac{d\gamma^i}{dt} - \zeta^i \right) \delta\pi_i \right] dt \\
&= \int_I \left[\frac{d(\pi_i\delta\gamma^i)}{dt} + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \zeta) - \frac{d\pi_i}{dt} \right) \delta\gamma^i + \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \zeta) - \pi_i \right) \delta\zeta^i + \left(\frac{d\gamma^i}{dt} - \zeta^i \right) \delta\pi_i \right] dt.
\end{aligned}$$

Ainsi l'équation d'Euler–Lagrange est le système

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \gamma, \zeta) = \frac{d\pi_i}{dt}, \quad \frac{\partial L}{\partial v^i}(t, \gamma, \zeta) = \pi_i \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma^i}{dt} = \zeta^i.$$

Pour toute variation $(\delta\gamma, \delta\zeta, \delta\pi)$, on pose $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(\delta\gamma, \delta\zeta, \delta\pi) = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\mathcal{L}^{TT^*}(\gamma_\varepsilon, \zeta_\varepsilon, \pi_\varepsilon) \right) |_{\varepsilon=0}$, où $\frac{d(\gamma_\varepsilon, \zeta_\varepsilon, \pi_\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = (\delta\gamma, \delta\zeta, \delta\pi)$.

(iii) Montrer que les solutions des équations obtenues à la question précédente correspondent aux points critiques de $\mathcal{L}$.
Réponse — En remplaçant la ζ^i par la valeur donnée par la dernière équation dans les deux premières équations, on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma) = \frac{d\pi_i}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma) = \pi_i.$$

En remplaçant la valeur π_i par celle donnée par la dernière équation dans la première, on obtient alors : $\frac{\partial L}{\partial x^i}(t,\gamma,\dot\gamma) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\dot\gamma)\right)$, qui est précisément l'équation d'Euler–Lagrange satisfaite par les points critiques de $\mathcal{L}$.

(iv) Déterminer les applications (γ,ζ,π) qui sont solutions de $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,0,\delta\pi) = 0$, $\forall\delta\pi$. Donner une expression simple de la valeur de $\mathcal{L}^{TT^*}(\gamma,\zeta,\pi)$ pour une telle solution.
Réponse — Au vu du calcul de la question (ii), il s'agit des applications telles que l'équation $\frac{d\gamma^i}{dt} = \zeta^i$ est satisfaite. On obtient donc $(\gamma,\zeta,\pi) = (\gamma,\dot\gamma,\pi)$. On a alors

$$\mathcal{L}^{TT^*}[\gamma,\dot\gamma,\pi] = \int_I \left[L(t,\gamma,\zeta) + \pi_i(\dot\gamma^i - \dot\gamma^i)\right]dt = \int_I L(t,\gamma,\zeta)dt = \mathcal{L}[\gamma].$$

(v) Déterminer les applications (γ,ζ,π) qui sont solutions de $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,\delta\zeta,0) = 0$, $\forall\delta\zeta$. Donner une expression simple de la valeur de $\mathcal{L}^{TT^*}(\gamma,\zeta,\pi)$ pour une telle solution.
Réponse — Au vu du calcul de la question (ii), il s'agit des applications (γ,ζ,π) telles que $\frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\zeta) = \pi_i$ et donc telles que ζ et π sont liés par la transformée de Legendre. On a alors

$$\mathcal{L}^{TT^*}[\gamma,\dot\gamma,\pi] = \int_I \left[\pi_i\dot\gamma^i - \pi_i\zeta^i + L(t,\gamma,\zeta)\right]dt = \int_I \left[\pi_i\dot\gamma^i - \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma,\zeta)\zeta^i + L(t,\gamma,\zeta)\right]dt.$$

On reconnaît l'hamiltonien H, défini implicitement par $H(t,x,p) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)v^i - L(t,x,v)$, si $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)$. Ainsi

$$\mathcal{L}^{TT^*}[\gamma,\dot\gamma,\pi] = \int_I \left[\pi_i\dot\gamma^i - H(t,\gamma,\pi)\right]dt = \int_{(t,\gamma,\pi)(I)} p_i dx^i - H(t,x,p)dt$$

et on retrouve l'action de Poincaré.

(vi) Justifier le fait que les conditions $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,0,\delta\pi) = 0$, $\forall\delta\pi$ ou $\delta\mathcal{L}^{TT^*}_{(\gamma,\zeta,\pi)}(0,\delta\zeta,0) = 0$, $\forall\delta\zeta$ ont bien un sens (en particulier indépendant de tout système de coordonnées).
Réponse — Définissons les projections $\pi_1 : T\mathcal{M}\oplus_{\mathcal{M}}T^*\mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ et $\pi_2 : T\mathcal{M}\oplus_{\mathcal{M}}T^*\mathcal{M} \longrightarrow T^*\mathcal{M}$ par : $\pi_1(x,v,p) = (x,v)$ et $\pi_2(x,v,p) = (x,p)$. Ces applications sont bien définies, indépendamment de tout système de coordonnées. Nous remarquons que les variations $(0,0,\delta\pi)$ sont des variations $\delta = (\delta\gamma,\delta\zeta,\delta\pi)$ telles que $(\pi_1)_*\delta = 0$. De même les variations $(0,\delta\zeta,0)$ sont des variations δ telles que $(\pi_2)_*\delta = 0$.

2 Assemblée d'oscillateurs harmoniques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $L : T\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $L(x,v) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (v^j)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (x^j)^2$. Il sera commode d'identifier $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et d'identifier x et v avec les matrices colonnes $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$, de sorte que $L(x,v) = \frac{1}{2}({}^t vv - {}^t xx)$. Sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, on définit l'action $\mathcal{L}[\gamma] := \int_{\mathbb{R}} L(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$.

(i) Déterminer les équations d'Euler–Lagrange satisfaites par les points critiques de cette action. Déterminer l'ensemble des solutions de ces équations, que l'on notera $\mathcal{E}$.
Réponse — On peut aussi écrire $\mathcal{L}[\gamma] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\left(|\dot\gamma|^2 - |\gamma|^2\right) dt$. La variation première de cette action est :

$$\delta\mathcal{L}_\gamma(\delta\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \left(\langle\dot\gamma, \dot{\delta\gamma}\rangle - \langle\gamma, \delta\gamma\rangle\right) dt = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{d\langle\dot\gamma, \delta\gamma\rangle}{dt} - \langle\ddot\gamma + \gamma, \delta\gamma\rangle\right] dt.$$

L'équation d'Euler–Lagrange est donc $\ddot\gamma + \gamma = 0$. Ses solutions sont de la forme

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}\left(Ze^{it} + \overline{Z}e^{-it}\right) = \mathrm{Re}(Ze^{it}), \quad \text{où } Z \in \mathbb{C}^n.$$

(ii) Calculer la transformée de Legendre de cette action et l'hamiltonien $H \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ correspondant. On pourra identifier un élément $p \in (\mathbb{R}^n)^*$ avec une matrice ligne $p = (p_1 \cdots p_n)$. Ecrire le système des équations de Hamilton. On notera $\omega = dp_i \wedge dx^i$ la forme symplectique sur $T^*\mathbb{R}^n$.
Réponse — On a $\frac{\partial L}{\partial v^i} = v^i$ et donc $p_i = v_i$. Donc

$$H(x,p) = p_i v^i - \frac{1}{2}\left(|v|^2 - |x|^2\right) = \frac{1}{2}\left(|p|^2 + |x|^2\right) = \frac{1}{2}\left(p\,{}^t\!p + {}^t\!xx\right).$$

Les équations de Hamilton sont $\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x,p) = p_i$ et $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(x,p) = -x^i$.

(iii) On note $\mathfrak{u}(n) := \{u = A + iB / \, A, B \in M(n,\mathbb{R}),\ {}^t\!A + A = 0,\ {}^t\!B = B\}$ [1]. On écrira :

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & \cdots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \cdots & A^n_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B^{11} & \cdots & B^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B^{n1} & \cdots & B^{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

ainsi que $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) := \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial p}\right) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial p_n} \end{pmatrix}$. À toute matrice $u = A + iB \in \mathfrak{u}(n)$, on associe le champ de vecteur

$$\xi_u := (A^i_j x^j + B^{ij}p_j)\frac{\partial}{\partial x^i} - (A^j_i p_j + B_{ij}x^j)\frac{\partial}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(Ax + B\,{}^t\!p) - (pA + {}^t\!xB)\left(\frac{\partial}{\partial p}\right).$$

Montrer qu'il existe une unique fonction $f_u \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ telle que $\xi_u \lrcorner\, \omega + df_u = 0$ et $f_u(0,0) = 0$.
Réponse — On peut encore écrire $\xi_u = (Ax + B\,{}^t\!p)^i \frac{\partial}{\partial x^i} - (pA + {}^t\!xB)_i \frac{\partial}{\partial p_i}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \xi_u \lrcorner\, \omega &= (Ax + B\,{}^t\!p)^i(-dp_i) - (pA + {}^t\!xB)_i dx^i = -dp(Ax + B\,{}^t\!p) - (pA + {}^t\!xB)dx \\ &= -dpAx - pAdx - dpB\,{}^t\!p - {}^t\!xBdx = -d\left(pAx + \tfrac{1}{2}pB\,{}^t\!p + \tfrac{1}{2}\,{}^t\!xBx\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que B est symétrique. Ainsi nous obtenons le résultat avec

$$f_u(x,p) = pAx + \frac{1}{2}pB\,{}^t\!p + \frac{1}{2}\,{}^t\!xBx.$$

Attention ! Il était possible de montrer l'existence de f_u sans calculer son expression, à condition de **vérifier** que $d(\xi_u \lrcorner\, \omega) = 0$!

(iv) Calculer le crochet de Poisson $\{H, f_u\}$.
Réponse — On a

$$\begin{aligned} \{H, f_u\} &= \omega(\xi_H, \xi_u) = (\xi_H \lrcorner\, \omega)(\xi_u) = -dH(\xi_u) = -\sum_{i=1}^n \left(x^i(Ax + B\,{}^t\!p)^i - p_i(pA + {}^t\!xB)_i\right) \\ &= -\,{}^t\!x(Ax + B\,{}^t\!p) + (pA + {}^t\!xB)\,{}^t\!p = -\,{}^t\!xAx + pA\,{}^t\!p - {}^t\!xB\,{}^t\!p + {}^t\!xB\,{}^t\!p = 0. \end{aligned}$$

Donc f_u est une quantité conservée le long des trajectoires des solutions des équations de Hamilton.

1. autrement dit u est antihermitienne : $u^\dagger + u = 0$

(v) Préciser (en justifiant) si la fonction f_u correspond à une quantité conservée telle que celles qui sont prévues par la version vue en cours du théorème de Noether pour un lagrangien. On pourra discuter en fonction des valeurs de A et B.

Réponse — La fonction f_u est en général un polynôme de degré 2 en la variable p, sauf si $B = 0$. Or les quantités conservées qui correspondent à celles données par la version du théorème de Noether vue en cours via la transformée de Legendre sont de la forme $\theta(X)$, où $\theta = p_i dx^i$ et X est un champ de vecteur de la forme $X = T(t,x)\frac{\partial}{\partial t} + X^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, s'il s'agit d'une symétrie exacte. Dans le cas où il s'agit d'une symétrie satisfaite module un terme exact, la quantité conservée sera de la forme $\theta(X) - f$, où f est une fonction de (t,x). Dans tous les cas, il s'agit d'un polynôme de degré 1 en p. Donc f_u ne correspond pas à ces cas, sauf si $B = 0$.

(vi) Calculer[2] le crochet de Poisson $\{f_u, f_{\tilde{u}}\}$, pour deux éléments $u = A + iB, \tilde{u} = \tilde{A} + i\tilde{B} \in \mathfrak{u}(n)$ en fonction du crochet $[u, \tilde{u}]$.

Réponse — On a

$$\begin{aligned} \{f_u, f_{\tilde{u}}\} &= \frac{\partial f_u}{\partial p_i}\frac{\partial f_{\tilde{u}}}{\partial x^i} - \frac{\partial f_u}{\partial x^i}\frac{\partial f_{\tilde{u}}}{\partial p_i} = \frac{\partial f_{\tilde{u}}}{\partial x}\frac{\partial f_u}{\partial p} - \frac{\partial f_u}{\partial x}\frac{\partial f_{\tilde{u}}}{\partial p} \\ &= (p\tilde{A} + {}^t x\tilde{B})(Ax + B\,{}^t p) - (pA + {}^t xB)(\tilde{A}x + \tilde{B}\,{}^t p) \\ &= p[\tilde{A}, A]x + {}^t x[\tilde{B}, B]\,{}^t p + p(\tilde{A}B - A\tilde{B})\,{}^t p + {}^t x(\tilde{B}A - B\tilde{A})x \end{aligned}$$

Noter qu'ici $[\tilde{A}, A]$ et $[\tilde{B}, B]$ sont antisymétriques, car A et $\tilde{A}$ sont toutes les deux antisymétriques et B et $\tilde{B}$ sont toutes les deux symétriques. De plus, nous pouvons remplacer $\tilde{A}B - A\tilde{B}$ par sa version symétrisée :

$$\frac{1}{2}\left[(\tilde{A}B - A\tilde{B}) + {}^t(\tilde{A}B - A\tilde{B})\right] = \frac{1}{2}\left([\tilde{A}, B] + [\tilde{B}, A]\right)$$

et de même pour $\tilde{B}A - B\tilde{A}$:

$$\frac{1}{2}\left[(\tilde{B}A - B\tilde{A}) + {}^t(\tilde{B}A - B\tilde{A})\right] = \frac{1}{2}\left([\tilde{B}, A] + [\tilde{A}, B]\right).$$

Ainsi

$$\{f_u, f_{\tilde{u}}\} = p[\tilde{A}, A]x + {}^t x[\tilde{B}, B]\,{}^t p + \frac{1}{2}p\left([\tilde{A}, B] + [\tilde{B}, A]\right){}^t p + \frac{1}{2}{}^t x\left([\tilde{B}, A] + [\tilde{A}, B]\right)x.$$

On peut enfin remarquer que ${}^t x[\tilde{B}, B]\,{}^t p = {}^t\left({}^t x[\tilde{B}, B]\,{}^t p\right) = -p[\tilde{B}, B]x$, car $[\tilde{B}, B]$ est antisymétrique. Finalement

$$-\{f_u, f_{\tilde{u}}\} = p\left([A, \tilde{A}] - [B, \tilde{B}]\right)x + \frac{1}{2}p\left([A, \tilde{B}] + [B, \tilde{A}]\right){}^t p + \frac{1}{2}{}^t x\left([A, \tilde{B}] + [B, \tilde{A}]\right)x.$$

En comparant avec $[u, \tilde{u}] = [A + iB, \tilde{A} + i\tilde{B}] = [A, \tilde{A}] - [B, \tilde{B}] + i\left([A, \tilde{B}] + [B, \tilde{A}]\right)$, on conclut que $\{f_u, f_{\tilde{u}}\} = -f_{[u,\tilde{u}]}$.

(vii) On revient au point de vue lagrangien. À $u = A + iB \in \mathfrak{u}(n)$, on associe l'opérateur linéaire $T_u : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ défini par $T_u\gamma = A\gamma + B\frac{d\gamma}{dt}$. Calculer $\delta\mathcal{L}_\gamma[T_u\gamma] = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\mathcal{L}[\gamma + \varepsilon T_u\gamma)\right|_{\varepsilon=0}$ et montrer que cette quantité est égale l' intégrale d'une dérivée totale. Qu'en déduit-on ?

Réponse — En développant $\mathcal{L}[\gamma + \varepsilon T_u\gamma]$, on obtient

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_\gamma[T_u\gamma] &= \int_{\mathbb{R}}\left({}^t\dot{\gamma}\frac{dT_u\gamma}{dt} - {}^t\gamma T_u\gamma\right)dt = \int_{\mathbb{R}}\left({}^t\dot{\gamma}(A\dot{\gamma} + B\ddot{\gamma}) - {}^t\gamma(A\gamma + B\dot{\gamma})\right)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left({}^t\dot{\gamma}A\dot{\gamma} + {}^t\dot{\gamma}B\ddot{\gamma} - {}^t\gamma A\gamma - {}^t\gamma B\dot{\gamma}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dt}\left({}^t\dot{\gamma}B\dot{\gamma} - {}^t\gamma B\gamma\right)dt, \end{aligned}$$

2. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$, on aura avantage à introduire la matrice ligne $\frac{\partial f}{\partial x} = (\frac{\partial f}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x^n})$ et la matrice colonne $\frac{\partial f}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial p_n} \end{pmatrix}$.

où l'on a utilisé le fait que ${}^t\dot\gamma A\dot\gamma = {}^t\gamma A\gamma = 0$ car A est antisymétrique. On en déduit que $T_u\gamma$ ressemble à une symétrie modulo une forme exacte, sauf que $T_u\gamma$ et le terme supplémentaire dépendent de γ et aussi de $\dot\gamma$.

(viii) Est-on dans un cas d'application du théorème de Noether vu en cours ? Expliciter le résultat qui serait prévu par ce théorème. On notera Q_u la quantité censée être conservée.
Réponse — Comme vu précédemment, on n'est pas dans le cas d'application du théorème de Noether prévu par le cours. Si on supposait que la conclusion est toujours valable, on aurait alors que, pour toute solution γ des équations d'Euler–Lagrange, la quantité

$$Q_u(t) := \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))(T_u\gamma)^i - \frac{1}{2}\left({}^t\dot\gamma B\dot\gamma - {}^t\gamma B\gamma\right)$$

serait conservée. Un calcul donnne

$$\begin{aligned} Q_u(t) &= \sum_{i=1}^n \dot\gamma^i(A\gamma+B\dot\gamma)^i - \frac{1}{2}{}^t\dot\gamma B\dot\gamma + \frac{1}{2}{}^t\gamma B\gamma = {}^t\dot\gamma A\gamma + {}^t\dot\gamma B\dot\gamma - \frac{1}{2}{}^t\dot\gamma B\dot\gamma + \frac{1}{2}{}^t\gamma B\gamma \\ &= {}^t\dot\gamma A\gamma + \frac{1}{2}\left({}^t\dot\gamma B\dot\gamma + {}^t\gamma B\gamma\right). \end{aligned}$$

(ix) Vérifier que, pour toute solution γ des équations d'Euler–Lagrange, Q_u est conservée. Comparez avec le résultat de la question (iv).
Réponse — On a, pour tout γ, en utilisant le fait que B est symétrique,

$$\frac{dQ_u}{dt} = {}^t\ddot\gamma A\gamma + {}^t\dot\gamma A\dot\gamma + {}^t\ddot\gamma B\dot\gamma + {}^t\gamma B\dot\gamma = {}^t(\ddot\gamma+\gamma)A\gamma - {}^t\gamma A\gamma + {}^t\dot\gamma A\dot\gamma + {}^t(\ddot\gamma+\gamma)B\dot\gamma.$$

Et en utilisant le fait que A est antisymétrique, cela se simplifie en :

$$\frac{dQ_u}{dt} = {}^t(\ddot\gamma+\gamma)(A\gamma+B\dot\gamma) = ({}^t\ddot\gamma+\gamma)T_u\gamma.$$

On en déduit que Q_u est constant si γ est solution des équations d'Euler–Lagrange $\ddot\gamma+\gamma=0$. On remarque que la quantité Q_u correspond à f_u via la transformée de Legendre.

(x) Calculer l'action du commutateur $[T_u, T_{\tilde u}]$ sur une application $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Que devient $[T_u, T_{\tilde u}]\gamma$ dans le cas où $\gamma \in \mathcal{E}$ (cf. question (i)).
Réponse — On a

$$\begin{aligned} [T_u, T_{\tilde u}]\gamma &= A(\tilde A\gamma + \tilde B\dot\gamma) + B\frac{d}{dt}\left(\tilde A\gamma + \tilde B\dot\gamma\right) - \tilde A(A\gamma+B\dot\gamma) - \tilde B\frac{d}{dt}(A\gamma+B\dot\gamma) \\ &= [A,\tilde A]\gamma + (A\tilde B + B\tilde A - \tilde A B - \tilde B A)\dot\gamma + [B,\tilde B]\ddot\gamma \\ &= \left([A,\tilde A] - [B,\tilde B]\right)\gamma + \left([A,\tilde B] + [B,\tilde A]\right)\dot\gamma + [B,\tilde B](\ddot\gamma+\gamma) = T_{[u,\tilde u]}\gamma + [B,\tilde B](\ddot\gamma+\gamma). \end{aligned}$$

On observe que $[T_u, T_{\tilde u}] - T_{[u,\tilde u]}$ s'annule sur $\mathcal{E}$.

(xi) Écrire l'équation de Hamilton–Jacobi associée au problème variationnel étudié dans cet exercice.
Réponse — Il s'agit de :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|x|^2}{2} + \frac{1}{2}|\nabla_x S|^2 = 0,$$

pour une fonction S des variables $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.
Remarque : *A posteriori, le rédacteur du sujet et de son corrigé se rend compte qu'il aurait été mieux de prendre comme définition de ξ_u, et donc de f_u, les quantités opposées. Ainsi, à la question (vi), on aurait obtenu que $[f_u, f_{\tilde u}]$ aurait été égal à $f_{[u,\tilde u]}$.*