Corrigé de l'examen du lundi 10 octobre 2005

I

L'espace $\mathbb{R}^{2n}$ est muni des coordonnées $(x,p) = (x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n) = (x^i, p_i)_i$ et on note

$$\omega := dp_1 \wedge dx^1 + \cdots + dp_n \wedge dx^n = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i.$$

1) Montrer que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ il existe un unique champ de vecteur ξ su $\mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$\xi \lrcorner\, \omega + dh = 0.$$

Expliciter ce champ de vecteur.
Réponse — *On pose* $\xi = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ *et on substitue dans la relation. On obtient*

$$\left(b_i + \frac{\partial h}{\partial x^i} \right) dx^i + \left(-a_i + \frac{\partial h}{\partial p_i} \right) dp_i = 0,$$

donc

$$\xi_h = \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Dans la suite on notera ξ_h ce champ de vecteur.
2) Montrer que si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est solution de :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \xi_h(\gamma)$$

alors

$$\frac{d(h \circ \gamma)}{dt} = 0.$$

Réponse — *On a*

$$\frac{d(h \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial p_i} = 0.$$

3) Pour toute paire de fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on note :

$$\{f, g\} := \omega(\xi_f, \xi_g)$$

(crochet de Poisson). Montrer que si $\frac{d\gamma}{dt} = \xi_h(\gamma)$ alors

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \{h, f\} \circ \gamma$$

et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
Réponse — *On a*

$$\{h, f\} = \omega(\xi_h, \xi_f) = -\omega(\xi_f, \xi_h) = -\left(\xi_f \lrcorner\, \omega\right)(\xi_h) = df(\xi_h).$$

et donc

$$\{h, f\} \circ \gamma = df_\gamma(\xi_h(\gamma)) = df_\gamma\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}.$$

4) Expliciter $\{f,g\}$.
Réponse —*Un calcul donne :*

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

On retrouve ainsi le résultat de la question 2) grâce à celui de la question 3), car $\{h,h\} = 0$.
5) Montrer que

$$L_{\xi_f}\omega = 0.$$

Réponse — *On utilise la formule de Cartan :*

$$L_{\xi_f}\omega = \xi_f \lrcorner (d\omega) + d(\xi_f \lrcorner \Omega) = 0 - ddf = 0.$$

6) (Question plus difficile) On admet la relation suivante : $\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0$ (identité de Jacobi). Montrer que :

$$\xi_{\{f,g\}} = [\xi_f, \xi_g].$$

Réponse — *Nous utilisons la relation* $L_{\xi_g} f = df(\xi_g) = \{g,f\}$ *déjà rencontrée à la question 3) pour transformer l'expression suivante :*

$$\begin{array}{rcl} L_{\xi_h}L_{\xi_g}f - L_{\xi_g}L_{\xi_h}f & = & L_{\xi_h}\{g,f\} - L_{\xi_g}\{h,f\} \\ & = & \{h,\{g,f\}\} - \{g,\{h,f\}\} \\ & = & \{f,\{g,h\}\} \\ & = & \{\{h,g\},f\} \\ & = & L_{\xi_{\{h,g\}}}f. \end{array}$$

Mais comme, par définition de $[\xi_f,\xi_g]$, *on a aussi :*

$$L_{\xi_h}L_{\xi_g}f - L_{\xi_g}L_{\xi_h}f = L_{[\xi_h,\xi_g]}f,$$

on en déduit que $L_{\xi_{\{h,g\}}}f = L_{[\xi_h,\xi_g]}f$, $\forall f$, *d'où le résultat.*

II

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. On notera $z = x + iy$ la variable dans Ω et $f = f^1 + if^2$. On note également $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.
1) Exprimer la partie réelle I^1 et la partie imaginaire I^2 de

$$I^1 + iI^2 := \int_{\partial\Omega} f dz$$

sous la forme de deux intégrales sur $\partial\Omega$.
Réponse — *On a* $f dz = (f^1 dx - f^2 dy) + i(f^1 dy + f^2 dx)$ *donc*

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \int_{\partial\Omega}(f^1 dx - f^2 dy) + i\int_{\partial\Omega}(f^1 dy + f^2 dx) = I^1 + iI^2.$$

2) En déduire des expressions de respectivement I^1 et I^2 sous la forme d'une intégrale sur Ω.
Réponse — *On utilise la formule de Stokes :*

$$I^1 + iI^2 = \int_{\partial\Omega} f dz = \int_\Omega -\left(\frac{\partial f^2}{\partial x} + \frac{\partial f^1}{\partial y}\right) dx\wedge dy + i\int_\Omega \left(\frac{\partial f^1}{\partial x} - \frac{\partial f^2}{\partial y}\right) dx\wedge dy.$$

3) En déduire une expression de $I^1 + iI^2$ sous la forme d'une intégrale sur Ω.
Réponse —*Comme* $d\overline{z}\wedge dz = 2i dx\wedge dy$, *on a*

$$I^1 + iI^2 = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} 2i dx\wedge dy = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}\wedge dz.$$

4) Montrer que si f est holomorphe alors

$$\int_{\partial\Omega} f dz = 0.$$

(formule de Cauchy).
Réponse — *C'est une conséquence immédiate de la formule précédente.*

Soit $\mathcal{M}$ une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension n. On suppose qu'il existe un repère mobile $(e_1, \cdots, e_n)$ sur cette variété (c'est à dire n champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ $e_1, \cdots, e_n$ sur $\mathcal{M}$ tels que $\forall M \in \mathcal{M}$, $(e_1(M), \cdots, e_n(M))$ est une base de $T_M\mathcal{M}$). On note $(\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$ la base duale.

1) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ donner la décomposition de df dans $(\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$.

Réponse — *Soit $(\ell_1, \cdots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $df = \ell_1\alpha^1 + \cdots + \ell_n\alpha^n$. En évaluant les deux membres de cette identité sur les vecteurs de la base $(e_1, \cdots, e_n)$, on obtient $df(e_a) = \ell_a$. Donc*

$$df = df(e_1)\alpha^1 + \cdots + df(e_n)\alpha^n.$$

2) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
- $\forall a, b$, $[e_a, e_b] = 0$
- $\forall c$, $d\alpha^c = 0$.

Réponse — *Nous partons de la formule de Cartan :*

$$d\alpha^c(e_a, e_b) = L_{e_a}\alpha^c(e_b) - L_{e_b}\alpha^c(e_a) - \alpha^c([e_a, e_b]).$$

Mais comme chaque $\alpha^c(e_a) = \delta^c_a$ est constant on a $L_{e_a}\alpha^c(e_b) = L_{e_b}\alpha^c(e_a) = 0$. Ainsi $d\alpha^c(e_a, e_b) = \alpha^c([e_a, e_b])$. Cela entraîne immédiatement le résultat.

3) On se donne maintenant une métrique g sur $\mathcal{M}$ telle que $g(e_a, e_b) = e^{2f}\delta_{ab}$, $\forall a, b$, où $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. On note ∇ la connexion de Levi-Civita associée à g et ω^a_b les 1-formes de connection (c'est à dire $\nabla_X e_a = e_b\omega^b_a(X)$). Montrer que

$$\omega^b_a + \omega^a_b = 2df\delta_{ab}.$$

Réponse — *Pour tout champ de vecteur X, nous appliquons à la relation $g(e_a, e_b) = e^{2f}\delta_{ab}$ l'opérateur L_X :*

$$\begin{aligned} 2\,(L_X f)\, e^{2f}\delta_{ab} &= L_X\,(g(e_a, e_b)) \\ &= g\,(\nabla_X e_a, e_b) + g\,(e_a, \nabla_X e_b) \\ &= e^{2f}\omega^b_a(X) + e^{2f}\omega^a_b(X), \end{aligned}$$

d'où nous tirons que $2df(X)\delta_{ab} = \omega^b_a(X) + \omega^a_b(X)$.

4) On rappelle que la condition de torsion nulle peut s'écrire $d\alpha^a + \omega^a_b \wedge \alpha^b = 0$. On suppose dorénavant que $n = 2$ et que

$$[e_1, e_2] = 0.$$

Calculer les 1-formes ω^a_b en fonction de f et de e_1, e_2. (Indication : on pourra poser $\omega^1_2 = a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2$ et chercher a_1 et a_2.)

Réponse — *Premièrement nous déduisons du résultat de la question 3) que*

$$\omega^1_1 = \omega^2_2 = df$$

et $\omega^2_1 = -\omega^1_2$. Il nous reste donc à calculer $\omega^1_2 = a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2$. Les relations de torsion nulle sont :

$$\begin{cases} d\alpha^1 + \omega^1_1 \wedge \alpha^1 + \omega^1_2 \wedge \alpha^2 &= 0 \\ d\alpha^2 + \omega^2_1 \wedge \alpha^1 + \omega^2_2 \wedge \alpha^2 &= 0. \end{cases}$$

Mais l'hypothèse $[e_1, e_2] = 0$ entraîne grâce à la question 2) que $d\alpha^1 = d\alpha^2 = 0$. Nous pouvons donc transformer les relations de torsion nulle en :

$$\begin{cases} 0 + (df(e_1)\alpha^1 + df(e_2)\alpha^2) \wedge \alpha^1 + (a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2) \wedge \alpha^2 = 0 \\ 0 + (-a_1\alpha^1 - a_2\alpha^2) \wedge \alpha^1 + (df(e_1)\alpha^1 + df(e_2)\alpha^2) \wedge \alpha^2 = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} -df(e_2) + a_1 &= 0 \\ a_2 + df(e_1) &= 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$\omega^1_2 = df(e_2)\alpha^1 - df(e_1)\alpha^2.$$

5) Supposons maintenant que $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$, que $e_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ pour $a = 1, 2$ et que $\mathbb{R}^{2n}$ est muni de la métrique $e^{2f}\delta_{ab}$. Calculer les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita. (On pourra se contenter de calculer Γ^1_{11}, Γ^1_{12}, Γ^1_{21} et Γ^1_{22}.)

Réponse — *Une conséquence immédiate du fait que* $e_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ *est que* $[e_1, e_2] = 0$. *Nous pouvons donc appliquer la question précédente et en déduire (en utilisant les notations* $e_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ *et* $\alpha^a = dx^a$*) que*

$$\begin{cases} \omega^1_1 &= df \\ \omega^1_2 &= \dfrac{\partial f}{\partial x^2} dx^1 - \dfrac{\partial f}{\partial x^1} dx^2 \\ \\ \omega^2_1 &= -\dfrac{\partial f}{\partial x^2} dx^1 + \dfrac{\partial f}{\partial x^1} dx^2 \\ \omega^2_2 &= df \end{cases}$$

Mais par ailleurs $\omega^a_b = \Gamma^a_{cb}\alpha^c$ *entraîne que* $\Gamma^a_{cb} = \omega^a_b(e_c)$. *Donc*

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11} = \omega^1_1(e_1) = \dfrac{\partial f}{\partial x^1} \quad ; \quad \Gamma^1_{21} = \omega^1_1(e_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x^2} \\ \\ \Gamma^1_{12} = \omega^1_2(e_1) = \dfrac{\partial f}{\partial x^2} \quad ; \quad \Gamma^1_{22} = \omega^1_2(e_2) = -\dfrac{\partial f}{\partial x^1} \end{cases}$$

etc.