Corrigé de l'examen du lundi 10 octobre 2005

I

L'espace $\mathbb{R}^{2n}$ est muni des coordonnées $(x,p) = (x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n) = (x^i, p_i)_i$ et on note

$$\omega := dp_1 \wedge dx^1 + \cdots + dp_n \wedge dx^n = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i.$$

1) Montrer que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ il existe un unique champ de vecteur ξ su $\mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$\xi \lrcorner \omega + dh = 0.$$

Expliciter ce champ de vecteur. Dans la suite on notera ξ_h ce champ de vecteur.
2) Montrer que si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est solution de :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \xi_h(\gamma)$$

alors

$$\frac{d(h \circ \gamma)}{dt} = 0.$$

3) Pour toute paire de fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on note :

$$\{f, g\} := \omega(\xi_f, \xi_g)$$

(crochet de Poisson). Montrer que si $\frac{d\gamma}{dt} = \xi_h(\gamma)$ alors

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \{h, f\} \circ \gamma$$

et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
4) Expliciter $\{f, g\}$.
5) Montrer que

$$L_{\xi_f}\omega = 0.$$

6) (Question plus difficile) On admet la relation suivante : $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ (identité de Jacobi). Montrer que :

$$\xi_{\{f,g\}} = [\xi_f, \xi_g].$$

II

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. On notera $z = x + iy$ la variable dans Ω et $f = f^1 + if^2$. On note également $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.
1) Exprimer la partie réelle I^1 et la partie imaginaire I^2 de

$$I^1 + iI^2 := \int_{\partial\Omega} f dz$$

sous la forme de deux intégrales sur $\partial\Omega$.
2) En déduire des expressions de respectivement I^1 et I^2 sous la forme d'une intégrale sur Ω.
3) En déduire une expression de $I^1 + iI^2$ sous la forme d'une intégrale sur Ω.
4) Montrer que si f est holomorphe alors

$$\int_{\partial\Omega} f dz = 0.$$

(formule de Cauchy).

III

Soit $\mathcal{M}$ une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension n. On suppose qu'il existe un repère mobile $(e_1, \cdots, e_n)$ sur cette variété (c'est à dire n champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ $e_1, \cdots, e_n$ sur $\mathcal{M}$ tels que $\forall M \in \mathcal{M}$, $(e_1(M), \cdots, e_n(M))$ est une base de $T_M\mathcal{M}$). On note $(\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$ la base duale.

1) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ donner la décomposition de df dans $(\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$.

2) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

– $\forall a, b$, $[e_a, e_b] = 0$

– $\forall c$, $d\alpha^c = 0$.

3) On se donne maintenant une métrique g sur $\mathcal{M}$ telle que $g(e_a, e_b) = e^{2f}\delta_{ab}$, $\forall a, b$, où $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. On note ∇ la connexion de Levi-Civita associée à g et ω^a_b les 1-formes de connection (c'est à dire $\nabla_X e_a = e_b\omega^b_a(X)$). Montrer que

$$\omega^b_a + \omega^a_b = 2df\delta_{ab}.$$

4) On rappelle que la condition de torsion nulle peut s'écrire $d\alpha^a + \omega^a_b \wedge \alpha^b = 0$. On suppose dorénavant que $n = 2$ et que

$$[e_1, e_2] = 0.$$

Calculer les 1-formes ω^a_b en fonction de f et de e_1, e_2. (Indication : on pourra poser $\omega^1_2 = a_1\alpha^1 + a_2\alpha^2$ et chercher a_1 et a_2.)

5) Supposons maintenant que $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$, que $e_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ pour $a = 1, 2$ et que $\mathbb{R}^{2n}$ est muni de la métrique $e^{2f}\delta_{ab}$. Calculer les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita. (On pourra se contenter de calculer Γ^1_{11}, Γ^1_{12}, Γ^1_{21} et Γ^1_{22}.)