

# Systèmes différentiels extérieurs

Frédéric HÉLEIN \*

29 mars 2016

## 1 Les bases du calcul différentiel extérieur

Ce chapitre est essentiellement consacré à des rappels de notions fondamentales pour la suite.

### 1.1 L'algèbre extérieure

#### 1.1.1 Définition

Dans la suite  $V$  désigne un espace vectoriel et on note  $V^*$  son dual, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $V$ .

**Définition 1.1 (forme  $p$ -multilinéaire alternée)** Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie  $m$ . Une **forme  $p$ -multilinéaire alternée**  $\alpha$  **sur**  $V$  ou, de façon abrégée, une  **$p$ -forme**  $\alpha$  **sur**  $V$  est une application  $\alpha : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $V \times \cdots \times V = V^p$ ) qui est

- multilinéaire, i.e.  $\forall i \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq i \leq p$ , pour tous  $v_1, \dots, v_i, \dots, v_p, w_i \in V$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu w_i, \dots, v_p) = \lambda \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_p) + \mu \alpha(v_1, \dots, w_i, \dots, v_p);$$

- alternée, i.e.  $\forall i, j \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq i, j \leq p$ ,

$$\alpha(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \alpha(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) = 0.$$

L'ensemble des  $p$ -formes sur  $V$  forme un espace vectoriel, que l'on note  $\Lambda^p V^*$ . Nous conviendrons que  $\Lambda^p V^* = \mathbb{R}$ , autrement dit une 0-forme sur  $V$  est un nombre réel.

Nous remarquons que  $\Lambda^1 V^*$  s'identifie à  $V^*$  et que  $\Lambda^p V^* = \{0\}$  si  $p > m$ .

---

\*Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR CNRS 7586 Université Denis Diderot — Paris 7, UFR de Mathématiques, Case 7012, Bâtiment Chevaleret 75205 Paris Cedex 13, France, [helein@math.jussieu.fr](mailto:helein@math.jussieu.fr)

**Définition 1.2 (produit extérieur)** Pour  $p, q \in \mathbb{N}$ , on définit le produit extérieur

$$\begin{aligned} \Lambda^p V^* \times \Lambda^q V^* &\longrightarrow \Lambda^{p+q} V^* \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

par

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}). \quad (1)$$

Cette opération est clairement bilinéaire. De plus, elle satisfait les propriétés suivantes.

**Proposition 1.1** *Le produit extérieur est **associatif** :*

$$\forall \alpha \in \Lambda^p V^*, \forall \beta \in \Lambda^q V^*, \forall \gamma \in \Lambda^r V^*, \quad (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma). \quad (2)$$

On peut donc noter  $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$  ce produit extérieur.

*Démonstration* — Soit  $\alpha \in \Lambda^p V^*$ ,  $\beta \in \Lambda^q V^*$  et  $\gamma \in \Lambda^r V^*$ , soit  $v_1, \dots, v_{p+q+r} \in V$ . Il vient de la définition du produit extérieur

$$\begin{aligned} &(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(v_1, \dots, v_{p+q+r}) \\ &= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q+r)} (-1)^{|\sigma|} \alpha \wedge \beta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \gamma(v_{\sigma(p+q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q+r)}) \\ &= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q+r)} (-1)^{|\sigma|} \frac{1}{p!q!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(p+q)} (-1)^{|\tau|} \\ &\quad \alpha(v_{\sigma \circ \tau(1)}, \dots, v_{\sigma \circ \tau(p)}) \beta(v_{\sigma \circ \tau(p+1)}, \dots, v_{\sigma \circ \tau(p+q)}) \gamma(v_{\sigma(p+q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q+r)}). \end{aligned}$$

L'application<sup>1</sup>  $\mathfrak{S}(p+q+r) \times \mathfrak{S}(p+q) \ni (\sigma, \tau) \longmapsto \sigma \circ \tau \in \mathfrak{S}(p+q+r)$  est surjective et l'image inverse de chaque permutation dans  $\mathfrak{S}(p+q+r)$  par cette application est de cardinal  $(p+q)!$ . On peut donc réécrire que  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma(v_1, \dots, v_{p+q+r})$  est égal à :

$$\frac{1}{p!q!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q+r)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \gamma(v_{\sigma(p+q+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q+r)}).$$

Un calcul similaire en partant de  $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_{p+q+r})$  nous mènerait au même résultat. On en déduit (2).  $\square$

Comme nous le verrons au fur et à mesure, l'associativité du produit extérieur est une propriété merveilleuse, qui a le pouvoir de transformer des calculs compliqués en des identités toutes simples ! Le produit extérieur n'est *pas* commutatif mais...

**Proposition 1.2** *Le produit extérieur est **commutatif gradué**, c'est à dire :*

$$\forall \alpha \in \Lambda^p V^*, \forall \beta \in \Lambda^q V^*, \quad \beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta. \quad (3)$$

---

1. où l'on convient que l'on a étendu  $\tau$  en une permutation de  $\{1, \dots, p+q+r\}$  en posant  $\tau(j) = j$  si  $p+q+1 \leq j \leq p+q+r$

*Démonstration* — Une conséquence de la définition d'une forme multilinéaire alternée est que, pour toute forme  $\gamma \in \Lambda^{p+q}V^*$ , on a :  $\forall v_1, \dots, v_{p+q} \in V$ ,

$$\gamma(v_1, \dots, v_{p+q}) = (-1)^{pq} \gamma(v_{q+1}, \dots, v_{q+p}, v_1, \dots, v_q).$$

En remplaçant  $\gamma$  par  $\alpha \wedge \beta$ , où  $\alpha \in \Lambda^p V^*$  et  $\beta \in \Lambda^q V^*$ , et en utilisant (1) de chaque côté de l'identité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \\ &= (-1)^{pq} \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p+q)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(q+1)}, \dots, v_{\sigma(q+p)}) \beta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) \end{aligned}$$

qui nous donne (3). □

*Exemples*

- (i) Si  $\alpha \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$  et si  $\beta \in \Lambda^q V^*$ ,  $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$ , expression dans laquelle le scalaire  $\alpha$  multiplie la  $q$ -forme  $\beta$ .
- (ii) Si  $\alpha, \beta \in \Lambda^1 V^* = V^*$ , alors

$$\forall v, w \in V, \quad \alpha \wedge \beta(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) = \begin{vmatrix} \alpha(v) & \alpha(w) \\ \beta(v) & \beta(w) \end{vmatrix}.$$

Supposons pour simplifier encore que  $\dim V = 2$  et soit  $(\theta^1, \theta^2)$  une base de  $V^*$ . Notons  $v^1 = \theta^1(v)$ ,  $v^2 = \theta^2(v)$ ,  $w^1 = \theta^1(w)$  et  $w^2 = \theta^2(w)$ . Décomposons également  $\alpha = a_1\theta^1 + a_2\theta^2$  et  $\beta = b_1\theta^1 + b_2\theta^2$ . Alors

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(v, w) &= (a_1v^1 + a_2v^2)(b_1w^1 + b_2w^2) - (a_1w^1 + a_2w^2)(b_1v^1 + b_2v^2) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)(v^1w^2 - v^2w^1). \end{aligned}$$

En particulier  $\theta^1 \wedge \theta^2(v, w) = v^1w^2 - v^2w^1$ . Nous voyons ainsi que

$$\alpha \wedge \beta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \theta^1 \wedge \theta^2 \quad \text{et} \quad \alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha.$$

- (iii) Plus généralement, si  $\alpha^1, \dots, \alpha^p \in V^*$  et si  $v_1, \dots, v_p \in V$ ,

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^p(v_1, \dots, v_p) = \begin{vmatrix} \alpha^1(v_1) & \dots & \alpha^1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^p(v_1) & \dots & \alpha^p(v_p) \end{vmatrix}.$$

- (iv) Si  $\alpha \in V^*$  et  $\beta \in \Lambda^2 V^*$ ,  $\forall u, v, w \in V$ ,

$$\alpha \wedge \beta(u, v, w) = \alpha(u)\beta(v, w) + \alpha(v)\beta(w, u) + \alpha(w)\beta(u, v).$$

Le produit extérieur n'est pas une loi de composition interne. Pour y remédier il suffit de rassembler tous les  $\Lambda^p V^*$ .

**Définition 1.3 (algèbre extérieure)** *On note*

$$\Lambda^\bullet V^* := \bigoplus_{p=0}^m \Lambda^p V^*.$$

Alors le produit extérieur s'étend par linéarité en une loi de composition interne dans  $\Lambda^\bullet V^*$ . On obtient l'**algèbre extérieure**  $(\Lambda^\bullet V^*, +, \wedge)$ .

Cette algèbre est *associative et commutative graduée*.

Construire une base de  $\Lambda^p V^*$  n'est pas très compliqué : soit  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$  une base de  $V$  et soit  $(\theta^1, \dots, \theta^m)$  la base de  $V^*$  qui est duale de  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ , alors :

**Proposition 1.3** *Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la famille*

$$(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m}$$

*est une base de  $\Lambda^p V^*$ . Par conséquent  $\dim \Lambda^p V^* = \frac{m!}{(m-p)!p!}$ .*

*Démonstration* — Nous confions au lecteur le soin de vérifier que, pour toute forme  $\alpha \in \Lambda^p V^*$ , alors

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p},$$

où  $\alpha_{i_1 \dots i_p} = \alpha(\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_p})$ . Pour cela il suffit de calculer  $\alpha(v_1, \dots, v_p)$  pour une collection quelconque de  $p$  vecteurs  $v_1, \dots, v_p \in V$  en ayant décomposé chacun de ces vecteurs dans la base  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ .  $\square$

On en déduit aussi que

$$\dim \Lambda^\bullet V^* = \sum_{p=0}^m \dim \Lambda^p V^* = \sum_{p=0}^m \frac{m!}{(m-p)!p!} = 2^m.$$

**Remarque (multi-indices)** — Il est commode d'introduire des notations plus compactes en notant  $I = (i_1, \dots, i_p)$  un multi-indice (pour  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ ) et en écrivant  $\alpha_I := \alpha_{i_1 \dots i_p}$  et  $\theta^I := d\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge d\theta^{i_p}$ , ce qui donne

$$\alpha = \sum_I \alpha_I \theta^I. \tag{4}$$

### 1.1.2 Le produit intérieur

**Définition 1.4** Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Pour toute  $p$ -forme  $\alpha \in \Lambda^p V^*$  et pour tout vecteur  $\xi \in V$ , on définit le **produit intérieur** de  $\alpha$  par  $\xi$  comme étant la  $(p-1)$ -forme notée  $\iota_\xi \alpha$  ou  $\xi \lrcorner \alpha \in \Lambda^{p-1} V^*$  définie par

$$\forall v_2, \dots, v_p \in V, \quad \iota_\xi \alpha(v_2, \dots, v_p) = \alpha(\xi, v_2, \dots, v_p).$$

Si  $p = 0$  et si  $\alpha \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ , on convient de poser  $\iota_\xi \alpha = 0$ .

Alors l'application

$$\begin{aligned} V \times \Lambda^p V^* &\longrightarrow \Lambda^{p-1} V^* \\ (\xi, \alpha) &\longmapsto \iota_\xi \alpha \end{aligned}$$

est bilinéaire. On peut d'ailleurs l'étendre de façon unique en une application bilinéaire de  $V \times \Lambda^* V^*$  vers  $\Lambda^* V^*$ . Le produit intérieur satisfait en outre les propriétés suivantes.

**Proposition 1.4**  $\forall \xi, \eta \in V, \forall \alpha \in \Lambda^p V^*$ ,

$$\iota_\xi \iota_\eta \alpha + \iota_\eta \iota_\xi \alpha = 0 \quad (5)$$

donc en particulier  $\iota_\xi \iota_\xi \alpha = 0$ .

*Démonstration* — immédiate. □

**Lemme 1.1** Le produit intérieur satisfait la règle de Leibniz graduée :  $\forall \xi \in V, \forall \alpha \in \Lambda^p V^*, \forall \beta \in \Lambda^q V^*$

$$\iota_\xi (\alpha \wedge \beta) = (\iota_\xi \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (\iota_\xi \beta). \quad (6)$$

L'appellation « **règle de Leibniz graduée** » vient de l'analogie de (6) avec la règle de Leibniz pour la dérivation du produit de deux fonctions. Il s'avère qu'il est extrêmement utile de toujours garder cette analogie en tête et nous verrons au prochain paragraphe que, pour Elie Cartan, le produit intérieur n'était pas autre chose qu'une dérivation (graduée).

*Démonstration* — Nous commençons par montrer cette identité dans le cas où  $p = 1$ . Soit  $v_1, \dots, v_{q+1} \in V$ , nous remarquons que l'identité

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{q+1}) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q+1)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}) \beta(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(q+1)})$$

peut, en rangeant  $\sigma(2), \dots, \sigma(q+1)$  dans l'ordre croissant, se simplifier sous la forme

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{q+1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q+1); \sigma(2) < \dots < \sigma(q+1)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}) \beta(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(q+1)}) \quad (7)$$

Il y a  $q+1$  permutations de  $\{1, \dots, q+1\}$  de ce type<sup>2</sup>, qui sont, chacune, déterminées par  $\sigma(1) = i$ . On peut ainsi expliciter la dernière expression sous la forme

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{q+1}) = \alpha(v_1) \beta(v_2, \dots, v_{q+1}) + \sum_{i=2}^{q+1} (-1)^{i-1} \alpha(v_i) \beta(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{q+1})$$

---

2. appelées *battages* ou, en anglais, *shuffles*; en effet lorsqu'on joue aux cartes, une façon de battre les cartes consiste à couper le paquet en deux et à intercaler l'un des deux paquets ainsi obtenus dans l'autre, ici on coupe en prenant la carte sur le dessus du paquet

La dernière somme dans le terme de droite peut s'écrire d'une façon analogue à (7) (en y notant  $\mathfrak{S}(q)$  les permutations de  $\{2, \dots, q+1\}$ ) comme étant égale à :

$$\sum_{\tau \in \mathfrak{S}(q); \tau(3) < \dots < \tau(q+1)} (-1)^{|\tau|-1} \alpha(v_{\tau(2)})(v_1 \lrcorner \beta)(v_{\tau(3)}, \dots, v_{\tau(q+1)})$$

et, en vertu de (7), est donc égale à :  $-\alpha \wedge (v_1 \lrcorner \beta)(v_2, \dots, v_{q+1})$ . Ainsi nous en concluons que  $\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{q+1}) = (v_1 \lrcorner \alpha)\beta(v_2, \dots, v_{q+1}) - \alpha \wedge (v_1 \lrcorner \beta)(v_2, \dots, v_{q+1})$ . Mais comme par ailleurs  $\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{q+1}) = v_1 \lrcorner (\alpha \wedge \beta)(v_2, \dots, v_{q+1})$ , cela nous donne (6) pour  $p = 1$ .

Ce résultat se généralise au cas où  $\alpha = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^p$ , où  $\alpha^1 \dots \alpha^p \in V^*$  par récurrence sur  $p$ . Pour  $p = 1$ , nous venons de le montrer. Supposons ce résultat valable pour un entier quelconque  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soit alors  $\alpha^1 \dots \alpha^{p+1} \in V^*$  et  $\xi \in V$ , nous avons

$$\begin{aligned} & \xi \lrcorner (\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1} \wedge \beta) \\ &= (\xi \lrcorner \alpha^1) \wedge (\alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1} \wedge \beta) - \alpha^1 \wedge [\xi \lrcorner (\alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1} \wedge \beta)] \\ &= (\xi \lrcorner \alpha^1) \wedge (\alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1} \wedge \beta) \\ &\quad - \alpha^1 \wedge [(\xi \lrcorner (\alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1})) \wedge \beta + (-1)^p (\alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1}) \wedge (\xi \lrcorner \beta)] \\ &= [(\xi \lrcorner \alpha^1) \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1} - \alpha^1 \wedge (\xi \lrcorner (\alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1}))] \wedge \beta \\ &\quad + (-1)^{p+1} (\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1}) \wedge (\xi \lrcorner \beta) \\ &= [\xi \lrcorner (\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1})] \wedge \beta + (-1)^{p+1} (\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1}) \wedge (\xi \lrcorner \beta) \end{aligned}$$

et nous obtenons ainsi (6) pour  $\alpha = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^{p+1}$ . Par linéarité nous en concluons que (6) est valable en général.  $\square$

Le lecteur est invité à titre d'exercice à calculer dans  $V = \mathbb{R}^2$  muni de la base  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  et sa base duale  $(\theta^1, \theta^2)$  le produit intérieur de  $\theta^1 \wedge \theta^2$  par  $\xi = \xi^1 \epsilon_1 + \xi^2 \epsilon_2$ . Puis vous pourrez calculer dans  $\mathbb{R}^3$  avec la base  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  les produits intérieurs de  $\alpha = a^1 \theta^2 \wedge \theta^3 + a^2 \theta^3 \wedge \theta^1 + a^3 \theta^1 \wedge \theta^2$  et de  $\beta = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$  avec un vecteur  $\xi = \xi^1 \epsilon_1 + \xi^2 \epsilon_2 + \xi^3 \epsilon_3$ .

### 1.1.3 Le produit intérieur est une dérivation (Elie Cartan)

Elie Cartan présentait les formes différentielles comme des fonctions en des variables qui anticommulent (suivant en cela une idée due à Grassmann). Le produit intérieur y apparaissait sous la forme de dérivées de ces fonctions par rapport à ces variables anticommutantes.

A titre de préliminaire, considérons  $m$  variables ordinaires  $x^1, \dots, x^m$ , que nous pouvons voir comme des coordonnées sur un espace vectoriel  $W$  de dimension  $m$ . Considérons  $\mathcal{C}^\infty(W)$ , l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $W$ . Nous pouvons alors définir l'action de l'opérateur différentiel  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  sur ces fonctions par les règles algébriques :

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j; \quad (8)$$

(où  $\delta_i^j$  est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 si  $i \neq j$ ) et la règle de Leibniz :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(W), \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} g + f \frac{\partial g}{\partial x^i}. \quad (9)$$

A présent considérons un espace vectoriel  $V$  de dimension  $m$  muni d'une base  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$  et soit  $(\theta^1, \dots, \theta^m)$  la base duale. Elie Cartan voit les formes différentielles sur  $V$  comme des fonctions en les variables  $\theta^1, \dots, \theta^m$ , avec la particularité que ces variables anticommulent, c'est à dire satisfont

$$\theta^i \theta^j + \theta^j \theta^i = 0.$$

Cette règle d'anticommutation a comme conséquence que l'espace vectoriel des polynômes en les variables  $\theta^1, \dots, \theta^m$  est de dimension finie et s'identifie avec l'algèbre extérieure  $\Lambda^* V^*$ . Plus généralement, on convient que l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  en ces variables s'identifie aussi avec  $\Lambda^* V^*$ .

Cartan définit alors l'opérateur de dérivation  $\frac{\partial}{\partial \theta^i}$  par :

$$\frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^i} = \delta_i^j; \quad (10)$$

et la règle de Leibniz graduée :

$$\forall f \in \Lambda^p V^*, \forall g \in \Lambda^q V^*, \quad \frac{\partial (fg)}{\partial \theta^i} = \frac{\partial f}{\partial \theta^i} g + (-1)^p f \frac{\partial g}{\partial \theta^i}. \quad (11)$$

Nous remarquons que l'opérateur  $\iota_{\epsilon_i}$  satisfait exactement les mêmes relations, à savoir :  $\iota_{\epsilon_i} \theta^j = \delta_i^j$  et la règle de Leibniz graduée (6). Comme ces règles caractérisent complètement ces opérateurs, ils coïncident :

$$\iota_{\epsilon_i} = \frac{\partial}{\partial \theta^i}.$$

Suivant ce point de vue, Cartan découvre des analogues « anticommutes » de relations bien connues. Par exemple l'analogie de l'identité d'Euler  $\sum_{i=1}^m x^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) = p f(x)$  satisfaite par une fonction  $f$  homogène de degré  $p$  est la relation  $\sum_{i=1}^m \theta^i \frac{\partial}{\partial \theta^i} f(\theta) = p f(\theta)$ , satisfaite par une  $p$ -forme  $f \in \Lambda^p V^*$ . De même on pourra interpréter (5) comme un analogue du lemme de Schwarz.

Dans la suite, nous ne priverons pas de noter de temps à autre le produit intérieur comme une dérivation par rapport à une 1-forme, surtout dans le cas d'un produit intérieur par un vecteur faisant partie d'une base que l'on s'est donnée. Le fait de voir le produit intérieur comme une dérivation par rapport à une variable « impaire » semble avoir été pratiquement oublié (à part quelques réminiscences chez Jean Leray et Israel Gelfand) pendant longtemps, jusqu'à ce qu'il ait refait surface chez les physiciens qui ont inventé la supersymétrie à partir de 1970.

Par ailleurs Cartan avait l'habitude de désigner le produit extérieur de deux formes différentielles  $\alpha, \beta$  par  $[\alpha\beta]$ . Cette notation est aujourd'hui remplacée par  $\alpha \wedge \beta$  chez la plupart des auteurs (ou par  $\alpha\beta$  chez [1]).

### 1.1.4 L'image inverse d'une forme par une application linéaire

Rappelons qu'à toute application linéaire  $A : V \longrightarrow W$ , nous pouvons associer l'application linéaire adjointe  $A^* : W^* \longrightarrow V^*$ , qui, à  $\ell \in W^*$ , associe  $A^*\ell := \ell \circ A \in V^*$ . Cette application s'étend en une application de  $\Lambda^\bullet W^*$  vers  $\Lambda^\bullet V^*$ .

**Définition 1.5** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels réels et  $p \in \mathbb{N}$ . Soit  $A : V \longrightarrow W$  une application linéaire et soit  $\alpha \in \Lambda^p W^*$ . L'**image inverse** ou le **pull-back** de  $\alpha$  par  $A$  est la  $p$ -forme notée  $A^*\alpha \in \Lambda^p V^*$  définie par :

$$\forall v_1, \dots, v_p \in V, \quad (A^*\alpha)(v_1, \dots, v_p) := \alpha(A(v_1), \dots, A(v_p)). \quad (12)$$

L'application  $\alpha \longmapsto A^*\alpha$  s'étend de façon unique en une application linéaire de  $\Lambda^\bullet W^*$  vers  $\Lambda^\bullet V^*$ .

Si  $\dim V = \dim W = n$ , si  $(\eta^1, \dots, \eta^n)$  est une base de  $W^*$  et si  $(\theta^1, \dots, \theta^n)$  est une base de  $V^*$ , alors, pour toute application linéaire  $A : V \longrightarrow W$ ,  $A^*(\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n) = (\det A_\theta^\eta)(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n)$ ,  $A_\theta^\eta$  est la matrice de  $A$  dans les bases duales de  $(\theta^1, \dots, \theta^n)$  et  $(\eta^1, \dots, \eta^n)$ .

Notons une propriété immédiate : si  $\alpha, \beta \in \Lambda^\bullet W^*$  et  $A : V \longrightarrow W$ ,

$$A^*(\alpha \wedge \beta) = (A^*\alpha) \wedge (A^*\beta). \quad (13)$$

Une application de (13) est de retrouver la formule du développement d'un déterminant par rapport à une colonne ou une ligne. En effet, si  $\dim V = n$ , si  $(\theta^1, \dots, \theta^n)$  est une base de  $V^*$ , pour tout endomorphisme  $A : V \longrightarrow V$ , une conséquence de (13) est

$$A^*(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n) = (A^*\theta^1) \wedge A^*(\theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n).$$

Identifions  $A$  avec sa matrice  $\begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix}$  dans la base duale de  $(\theta^1, \dots, \theta^n)$  ( $Id$  est  $A^*\theta^i = A_j^i\theta^j$ ). La relation précédente se traduit alors par

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n = (A_i^1\theta^i) \wedge \left( \frac{\partial \det A}{\partial A_j^1} \frac{\partial}{\partial \theta^j} (\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n) \right)$$

où les signes  $\sum_{i=1}^n$  et  $\sum_{j=1}^n$  sont sous-entendus dès qu'un indice est répété et où, pour tout  $i, j$ ,  $\frac{\partial \det A}{\partial A_j^i}$  est le cofacteur de  $A_j^i$ , c'est à dire  $(-1)^{i+j}$  fois le mineur  $(n-1) \times (n-1)$  obtenu en ôtant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  à la matrice  $A$ . Comme  $\theta^i \wedge \frac{\partial}{\partial \theta^j} (\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n) = \delta_j^i \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$  (où  $\delta_j^i$ , qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 si  $i \neq j$ , est le symbole de Kronecker), on en déduit que

$$\det A = A_i^1 \frac{\partial \det A}{\partial A_i^1},$$



qui correspond au développement du déterminant par rapport à la première ligne de  $A$ .

La même méthode permet de généraliser ce type de formule. En partant de

$$A^*(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n) = A^*(\theta^1 \wedge \theta^2) \wedge A^*(\theta^3 \wedge \cdots \wedge \theta^n),$$

on obtient

$$A^*(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n) = \sum_{i_1 < i_2} \begin{vmatrix} A_{i_1}^1 & A_{i_2}^1 \\ A_{i_1}^2 & A_{i_2}^2 \end{vmatrix} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \sum_{j_1 < j_2} \frac{\partial^2 \det A}{\partial A_{j_1}^1 \partial A_{j_2}^2} \frac{\partial}{\partial \theta^{j_1}} \frac{\partial}{\partial \theta^{j_2}} \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n,$$

d'où l'on déduit

$$\det A = 2 \sum_{i_1 < i_2} A_{i_1 i_2}^{12} \frac{\partial^2 \det A}{\partial A_{i_1}^1 \partial A_{i_2}^2} = \sum_{i_1 < i_2} A_{i_1 i_2}^{12} \left( \frac{\partial^2 \det A}{\partial A_{i_1}^1 \partial A_{i_2}^2} - \frac{\partial^2 \det A}{\partial A_{i_1}^2 \partial A_{i_2}^1} \right),$$

où  $A_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} := \begin{vmatrix} A_{i_1}^{i_1} & A_{i_2}^{i_1} \\ A_{i_1}^{i_2} & A_{i_2}^{i_2} \end{vmatrix}$  et  $\frac{\partial^2 \det A}{\partial A_{j_1}^{i_1} \partial A_{j_2}^{i_2}} = -\frac{\partial^2 \det A}{\partial A_{j_2}^{i_1} \partial A_{j_1}^{i_2}}$  est le cofacteur de  $A_{i_1 i_2}^{i_1 i_2}$ , c'est à dire  $(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}$  fois le mineur  $(n-2) \times (n-2)$  obtenu en ôtant les lignes  $i_1$  et  $i_2$  et les colonnes  $j_1$  et  $j_2$  à la matrice  $A$ .

### 1.1.5 Un lemme de Cartan

Le résultat suivant est très utile.

**Lemme 1.2** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie,  $(\theta^1, \dots, \theta^p)$  et  $(\varphi^1, \dots, \varphi^p)$  deux familles dans  $V^*$ . Supposons que la famille  $(\theta^1, \dots, \theta^p)$  est **libre** et que la relation suivante est satisfaite :*

$$\sum_{i=1}^p \theta^i \wedge \varphi^i = \theta^1 \wedge \varphi^1 + \cdots + \theta^p \wedge \varphi^p = 0. \quad (14)$$

Alors il existe une unique famille de coefficients  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  telle que :  $\forall i, j = 1, \dots, p$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$  et

$$\forall i = 1, \dots, p, \quad \varphi^i = a_{i1} \theta^1 + \cdots + a_{ip} \theta^p = \sum_{j=1}^p a_{ij} \theta^j. \quad (15)$$

*Démonstration* — Notons  $m$  la dimension de  $V$  et commençons par examiner le cas particulier où  $p = m$ . Alors  $(\theta^1, \dots, \theta^m)$  est une base de  $V^*$  et l'existence et l'unicité des coefficients tels que (15) ait lieu est alors automatique. De plus si nous remplaçons les  $\varphi^i$  dans (14) par leur expression donnée par (15), nous obtenons la relation

$$0 = \sum_{i, j=1}^m a_{ij} \theta^i \wedge \theta^j = \sum_{1 \leq i < j \leq m} (a_{ij} - a_{ji}) \theta^i \wedge \theta^j,$$

qui entraîne la relation de symétrie  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Dans le cas où  $p < m$ , nous pouvons toujours compléter la famille libre  $(\theta^1, \dots, \theta^p)$  en une base  $(\theta^1, \dots, \theta^m)$  de  $V^*$ . Nous complétons également la famille  $(\varphi^1, \dots, \varphi^p)$  en la famille  $(\varphi^1, \dots, \varphi^m)$  en choisissant tout simplement  $\varphi^j = 0$  si  $p + 1 \leq j \leq m$ . Nous sommes alors ramenés au cas précédent. En appliquant le résultat que nous avons obtenu, nous en déduisons que,  $\forall i = 1, \dots, m$ ,  $\varphi^i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \theta^j$ . Puisque  $\varphi^i = 0$  si  $p + 1 \leq i \leq m$  et comme  $(\theta^1, \dots, \theta^m)$  est une base, nous en déduisons que  $a_{ij} = 0$  si  $p + 1 \leq i \leq m$ . Mais à cause de la relation de symétrie  $a_{ij} = a_{ji}$ , nous avons aussi  $a_{ij} = 0$  si  $p + 1 \leq j \leq m$ . Le résultat s'ensuit.  $\square$

### 1.1.6 Décomposition d'une 2-forme

**Théorème 1.1** *Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension  $m$ ,  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$  une base de  $V$  et  $(\theta^1, \dots, \theta^m)$  la base duale. Soit  $F \in \Lambda^2 V^*$  une 2-forme sur  $V$ . Alors il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $2p \leq m$  et il existe une famille  $(\alpha^1, \dots, \alpha^{2p})$  de rang  $2p$  dans  $V^*$  telle que*

$$F = \alpha^1 \wedge \alpha^2 + \dots + \alpha^{2p-1} \wedge \alpha^{2p}. \quad (16)$$

De plus l'entier  $p$  est donné par  $\text{rang} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \theta^m} \right) = 2p$ .

(Rappelons que  $\frac{\partial F}{\partial \theta^i} = \iota_{\epsilon_i} F = \epsilon_i \lrcorner F$ .)

*Démonstration* — Le cas où  $F = 0$  est immédiat, on a alors dès le départ la forme (16) avec  $p = 0$ . Supposons donc que  $F \neq 0$  et partons de la décomposition

$$F = \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_{ij} \theta^i \wedge \theta^j.$$

*Etape 1* — Sans perte de généralité, on suppose que  $a_{12} \neq 0$ . Alors, si nous notons

$$\alpha_1 = \frac{\partial F}{\partial \theta^1} = a_{12} \theta^2 + \sum_{j=3}^m a_{1j} \theta^j \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{1}{a_{12}} \frac{\partial F}{\partial \theta^2} = -\theta^1 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{k=3}^m a_{2k} \theta^k,$$

il est clair que le système  $(\alpha_1, \alpha_2)$  est de rang 2. Notons

$$\Phi := F - \alpha_1 \wedge \alpha_2 = F - \frac{1}{a_{12}} \frac{\partial F}{\partial \theta^1} \wedge \frac{\partial F}{\partial \theta^2}$$

et montrons que  $\Phi \in \Lambda^2 \text{Vect}(\theta^3, \dots, \theta^m)$ . Pour cela nous calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta^1} \wedge \frac{\partial F}{\partial \theta^2} &= \left( a_{12} \theta^2 + \sum_{j=3}^m a_{1j} \theta^j \right) \wedge \left( -a_{12} \theta^1 + \sum_{k=3}^m a_{2k} \theta^k \right) \\ &= -(a_{12})^2 \theta^2 \wedge \theta^1 + a_{12} \sum_{k=3}^m a_{2k} \theta^2 \wedge \theta^k + a_{12} \sum_{j=3}^m a_{1j} \theta^1 \wedge \theta^j + \sum_{j=3}^m a_{1j} \theta^j \wedge \sum_{k=3}^m a_{2k} \theta^k \\ &= a_{12} \left( a_{12} \theta^1 \wedge \theta^2 + \sum_{j=3}^m a_{1j} \theta^1 \wedge \theta^j + \sum_{k=3}^m a_{2k} \theta^2 \wedge \theta^k \right) + \sum_{j=3}^m a_{1j} \theta^j \wedge \sum_{k=3}^m a_{2k} \theta^k \\ &= a_{12} \left( F - \sum_{3 \leq i < j \leq m} a_{ij} \theta^i \wedge \theta^j \right) + \sum_{j=3}^m a_{1j} \theta^j \wedge \sum_{k=3}^m a_{2k} \theta^k. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\Phi = \sum_{3 \leq i < j \leq m} a_{ij} \theta^i \wedge \theta^j - \frac{1}{a_{12}} \sum_{j=3}^m a_{1j} \theta^j \wedge \sum_{k=3}^m a_{2k} \theta^k \in \Lambda^2 \text{Vect}(\theta^3, \dots, \theta^m).$$

*Etape 2* — Nous avons obtenu que  $F = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \Phi$ , où  $\Phi \in \Lambda^2 \text{Vect}(\theta^3, \dots, \theta^m)$ , c'est à dire,  $\Phi$  est un polynôme en les variables  $\theta^3, \dots, \theta^m$ . On peut alors réitérer le raisonnement : soit  $\Phi = 0$  et on s'arrête là, on obtient (16) avec  $p = 2$ ; soit  $\Phi \neq 0$  et on décompose à nouveau  $\Phi$  comme à l'étape précédente, obtenant ainsi une décomposition de la forme  $F = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4 + \Phi^{(2)}$ , où  $\Phi^{(2)}$  est un polynôme en les variables  $\theta^5, \dots, \theta^m$ . On continue ainsi de suite jusqu'au résultat recherché. Comme on passe d'un polynôme en  $m - 2j$  variables à un polynôme en  $m - 2j - 2$  variables à chaque itération non triviale, l'algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations.

Notons que nous pouvons interpréter géométriquement le fait que  $\Phi \in \Lambda^2 \text{Vect}(\theta^3, \dots, \theta^m)$ , en en concluant que  $\Phi$  provient d'une 2-forme sur l'espace quotient  $^3 V / (\mathbb{R}\epsilon_1 + \mathbb{R}\epsilon_2)$  qui est de dimension  $m - 2$ .

*Etape 3* — Complétons la famille  $(\alpha^1, \dots, \alpha^{2p})$  en une base  $(\alpha^1, \dots, \alpha^m)$  de  $V^*$  et notons  $(X_1, \dots, X_m)$  sa base duale. Comme  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$  et  $(X_1, \dots, X_m)$  sont deux bases de  $V$ , il existe  $A = (A_j^i)_{1 \leq i, j \leq m} \in GL(m, \mathbb{R})$  tel que  $\epsilon_j = \sum_{i=1}^m A_j^i X_i$  (le signe  $\sum_{i=1}^m$  est sous-entendu). Notons  $\frac{\partial F}{\partial \alpha^i} = X_i \lrcorner F$ , nous avons alors

$$\frac{\partial F}{\partial \theta^j} = \epsilon_j \lrcorner F = A_j^i X_i \lrcorner F = A_j^i \frac{\partial F}{\partial \alpha^i},$$

on en déduit donc que  $\text{rang} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \theta^m} \right) = \text{rang} \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \alpha^m} \right)$ . Mais cette dernière quantité est facile à calculer, en effet

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^i} = \begin{cases} \alpha^{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq 2p \text{ et } i \text{ est impair} \\ -\alpha^{i-1} & \text{si } 1 \leq i \leq 2p \text{ et } i \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } 2p + 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

et donc  $\text{rang} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \theta^m} \right) = \text{rang} \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \alpha^m} \right) = 2p$ . □

*Remarque* — Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , notons  $F^{\wedge k} := \underbrace{F \wedge \dots \wedge F}_k$ . Une autre caractérisation de l'entier  $p$  est qu'il est le plus grand entier  $k$  tel que  $F^{\wedge k} \neq 0$ . Cela provient du fait que, si on note  $\beta^i := \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}$  pour  $i = 1, \dots, k$ , on a, pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq p$  :

$$F^{\wedge k} = k! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \beta^{i_1} \wedge \beta^{i_2} \wedge \dots \wedge \beta^{i_k}$$

et donc en particulier  $F^{\wedge p} = p! \beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^p$  et  $F^{\wedge k} = 0$  si  $k > p$ .

---

3. En effet, le dual de  $V / (\mathbb{R}\epsilon_1 + \mathbb{R}\epsilon_2)$  s'identifie de façon canonique à  $\text{Vect}(\theta^3, \dots, \theta^m)$  et, plus précisément,  $\Phi$  est le pull-back d'une 2-forme sur  $V / (\mathbb{R}\epsilon_1 + \mathbb{R}\epsilon_2)$  par l'application canonique  $\pi : V \rightarrow V / (\mathbb{R}\epsilon_1 + \mathbb{R}\epsilon_2)$

## 1.2 Formes différentielles et champs de vecteur sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$

### 1.2.1 Définitions

**Définition 1.6** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Une  $p$ -forme différentielle  $\alpha$  sur  $U$  est une application régulière

$$\alpha : U \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*.$$

Pour tout  $M \in U$ , on note  $\alpha_M \in \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$  la valeur de  $\alpha$  en  $M$ . On note  $\Omega^p(U)$  l'espace vectoriel des  $p$ -formes différentielles sur  $U$  et on pose  $\Omega^\bullet(U) := \bigoplus_{p=0}^m \Omega^p(U)$ .

Il est naturel de définir en même temps l'espace des champs de vecteur.

**Définition 1.7** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . Un champ de vecteur sur  $U$  est une application régulière

$$X : U \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

On note  $X(M)$  la valeur d'un champ de vecteur  $X \in \mathcal{X}(U)$  en un point  $M \in U$ . On note  $\mathcal{X}(U)$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur  $U$ .

### Produits extérieurs et intérieurs

Les opérations de produit extérieur et de produit intérieur définies précédemment s'étendent de façon immédiate aux formes différentielles extérieures et aux champs de vecteur.

- Si  $\alpha \in \Omega^p(U)$  et  $\beta \in \Omega^q(U)$ , le produit extérieur de  $\alpha$  par  $\beta$  est la  $(p+q)$ -forme  $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q}(U)$  définie par

$$\forall M \in U, \quad (\alpha \wedge \beta)_M = \alpha_M \wedge \beta_M.$$

- Si  $\alpha \in \Omega^p(U)$  et  $X \in \mathcal{X}(U)$ , le produit intérieur de  $X$  par  $\alpha$  est la  $(p-1)$ -forme  $X \lrcorner \alpha \in \Omega^{p-1}(U)$  définie par

$$\forall M \in U, \quad (X \lrcorner \alpha)_M = X(M) \lrcorner \alpha_M.$$

### 1.2.2 Deux exemples fondamentaux de formes différentielles extérieures

L'exemple le plus simple d'une forme différentielle sur un ouvert  $U$  est une forme de degré 0 : comme  $\Lambda^0(\mathbb{R}^m)^*$  s'identifie à  $\mathbb{R}$ , une 0-forme est simplement une fonction de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ .

Un autre exemple simple consiste à partir d'une fonction  $\varphi$  définie sur  $U$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  (i.e. dans  $\mathcal{C}^1(U)$ ). Alors, en tout point  $M \in U$ , la différentielle de  $\varphi$  en  $M$

$$d\varphi_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi = (\xi^1, \dots, \xi^m) & \longmapsto & \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(M) \end{array}$$

est un élément de  $(\mathbb{R}^m)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^m)^*$  et donc l'application différentielle  $d\varphi : M \longmapsto d\varphi_M$  est une 1-forme.

Ces deux exemples sont fondamentaux, comme nous le verrons à la Section 3. A partir d'eux et en utilisant le produit extérieur  $\Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \longrightarrow \Omega^{p+q}(U)$ , il est possible de reconstituer toutes les  $p$ -formes différentielles sur un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et pour tout  $p$ . De plus l'application

$$\begin{array}{ccc} d : \Omega^0(U) & \longrightarrow & \Omega^1(U) \\ f & \longmapsto & df \end{array}$$

conduit, via une extension sur  $\Omega^\bullet(U) = \bigoplus_{p=0}^m \Omega^p(U)$ , à la construction de la *différentielle extérieure*, objet central dans le calcul différentiel extérieur.

### 1.2.3 Les notations $dx^i$ et $\frac{\partial}{\partial x^i}$

Soit  $x = (x^1, \dots, x^m) : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$  un système de coordonnées sur  $U$  (affine, ou plus généralement, régulières). Observons le fait élémentaire que, pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $x^i$  est une fonction sur  $U$  et donc  $dx^i$  est une 1-forme différentielle sur  $U$ . De plus, en tout point  $M \in U$ , les différentielles

$$dx_M^1, \dots, dx_M^m$$

forment une base de  $(\mathbb{R}^m)^*$ . En fait il s'agit tout simplement de la base duale de la base canonique de  $\mathbb{R}^m$  qui, en particulier, ne dépend pas de  $M$ . On pourra donc écrire  $dx^i$  au lieu de  $dx_M^i$  en général. Si  $\alpha \in \Omega^p(U)$ , on peut décomposer la valeur de  $\alpha_M$  dans la base  $(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m}$  :

$$\forall M \in U, \quad \alpha_M = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p}(M) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_I \alpha_I(M) dx^I,$$

où nous avons utilisée la notation concise  $I$  pour un multi-indice introduite en (4). Nous pouvons aussi écrire l'identité suivante dans  $\Omega^p(U)$

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_I \alpha_I dx^I.$$

De même nous préférons souvent noter

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right)$$

la base canonique de  $\mathbb{R}^m$  (ou, plus généralement, la base duale de  $(dx^1, \dots, dx^m)$ , au lieu de  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ ). Le lecteur peut se demander de quel droit je note des champs de vecteur comme des opérateurs différentiels. La raison est qu'un champ de vecteur sur  $U$  n'est pas très différent d'un opérateur différentiel homogène de degré 1 agissant sur les fonctions définies sur  $U$ . Expliquons pourquoi.

Notons  $\mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(U), \mathcal{C}^\infty(U))$  l'espace vectoriel des applications linéaires de  $\mathcal{C}^\infty(U)$  vers  $\mathcal{C}^\infty(U)$  et considérons

$$\mathcal{D}^1(U) := \{D \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(U), \mathcal{C}^\infty(U)); D(fg) = (Df)g + fDg, \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)\}.$$

C'est ainsi que nous définissons l'espace des opérateurs différentiels homogènes de degré 1 agissant sur les fonctions définies sur  $U$ . La propriété essentielle est que ces opérateurs satisfont la règle de Leibniz.

Il n'est pas difficile de voir que, si  $X \in \mathcal{X}(U)$ , l'opérateur  $D_X \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(U), \mathcal{C}^\infty(U))$  défini par

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(U), \forall M \in U \quad (D_X f)(M) := df_M(X(M))$$

satisfait la règle de Leibniz et donc  $D_X \in \mathcal{D}^1(U)$ . Cela définit une application linéaire canonique

$$\begin{aligned} T : \mathcal{X}(U) &\longrightarrow \mathcal{D}^1(U) \\ X &\longmapsto D_X \end{aligned}$$

**Proposition 1.5** *L'application  $T$  est un isomorphisme.*

Remarquons que, étant donné un  $D \in \mathcal{D}^1(U)$ , si l'on sait que  $T^{-1}(D)$  existe, il n'est pas difficile d'identifier  $T^{-1}(D)$  (et donc de montrer que  $T$  est injectif). Il suffit pour cela de tester  $D$  sur les fonctions coordonnées  $x^i$ . On trouve ainsi que  $T^{-1}(D)$  est le champ de vecteur  $\sum_{i=1}^m (Dx^i)\epsilon_i$ .

*Démonstration de la Proposition 1.5* — Il s'agit de construire l'application inverse  $T^{-1}$ . Commençons par remarquer que, pour tout  $D \in \mathcal{D}^1(U)$ ,  $D1 = 0$  (où 1 est la fonction constante égale à un). Cela découle de la règle de Leibniz :  $D1 = D1^2 = (D1)1 + 1D1 = 2D1$ . Par linéarité, cela entraîne que, pour toute fonction constante  $a$ ,  $Da = 0$ .

Fixons  $M_0 \in U$  et posons  $x_0^i := x^i(M_0)$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ , nous avons

$$\forall M \in U, \quad f(M) = f(M_0) + \sum_{i=1}^m (x^i(M) - x_0^i)g_i(M),$$

où  $g_i(M) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(M_0 + s(M - M_0))ds$ . Donc

$$Df = D(f(M_0)) + \sum_{i=1}^m D[(x^i - x_0^i)g_i] = 0 + \sum_{i=1}^m [(Dx^i - 0)g_i + (x^i - x_0^i)Dg_i].$$

En évaluant cette fonction en  $M = M_0$ , on obtient

$$(Df)(M_0) = \sum_{i=1}^m (Dx^i)(M_0)g_i(M_0) + 0 = \sum_{i=1}^m (Dx^i)(M_0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(M_0).$$

Donc  $D$  coïncide avec  $T(X)$  avec  $X = \sum_{i=1}^m (Dx^i)\epsilon_i$ . □

Cela justifie donc que nous identifions  $\epsilon_i$  avec  $T(\epsilon_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Ainsi, par exemple,  $T^{-1}(D) = \sum_{i=1}^m (Dx^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

## 2 Les variétés

Nous nous ne présentons ici que les variétés sans bord. Les variétés avec bord seront abordées (si je puis me permettre) à la Section 3.6.1.

## 2.1 Variétés, espaces tangents et cotangents

**Définition 2.1 (Variété différentielle)** Une variété différentielle  $\mathcal{M}$  de dimension  $n$  est un espace topologique équipé d'un **atlas**, c'est à dire un système de **cartes locales**  $x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i \subset \mathbb{R}^m$ , où  $i \in I$  ( $I$  est un ensemble fini ou dénombrable) et

- chaque  $\mathcal{O}_i$  est un ouvert de  $\mathcal{M}$  et la réunion  $\cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  est égale à  $\mathcal{M}$  ;
- chaque  $U_i$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  ;
- chaque application  $x_i$  est un homéomorphisme ;
- si  $\mathcal{O}_{ij} := \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$  est non vide, alors l'homéomorphisme  $\varphi_{ij} := x_j \circ (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})}$  est un difféomorphisme de  $x_i(\mathcal{O}_{ij})$  vers  $x_j(\mathcal{O}_{ij})$ .

On dit que la variété est de classe  $\mathcal{C}^k$  si les applications de recollement  $\varphi_{ij} : (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})} \longrightarrow x_i(\mathcal{O}_{ij})$  sont toutes de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Cette définition permet de donner un sens aux notions suivantes : une application de  $\Omega \subset \mathbb{R}^q$  dans  $\mathcal{M}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  ou, à l'inverse, une application de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\mathcal{M}$  vers  $\mathbb{R}^m$  ou encore, plus généralement, une application entre deux variétés de classe  $\mathcal{C}^k$ , etc.

### 2.1.1 L'espace tangent

Pour tout point  $M \in \mathcal{M}$ , on définit l'*espace tangent* à la variété  $\mathcal{M}$  en  $M$  comme suit. Tout d'abord on considère l'ensemble de tous les trajectoires dynamiques d'un point dans  $\mathcal{M}$  qui passent en  $M$  à l'instant  $t = 0$  :

$$\Gamma_M := \{(I, \gamma) \mid I \text{ (intervalle)} \subset \mathbb{R}, 0 \in I, \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}), \gamma(0) = M\}$$

et on décidera que *deux trajectoires*  $(I_1, \gamma_1)$  et  $(I_2, \gamma_2)$  sont équivalentes si elles ont même vecteur vitesse à l'instant 0. Bien évidemment la difficulté est de donner un sens au mot « vecteur vitesse », puisque celui-ci est censé vivre dans l'espace tangent, que l'on n'a pas encore défini. On s'en sort en utilisant une carte locale  $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ , où  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$  est un ouvert qui contient le point  $M$ . Cela donne :

$$(I_1, \gamma_1) \sim (I_2, \gamma_2) \iff \frac{d(x \circ \gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(x \circ \gamma_2)}{dt}(0).$$

Grâce aux axiomes de la définition d'une variété, on peut alors vérifier que cette relation d'équivalence ne dépend pas de la carte locale utilisée. En effet, si  $y : \mathcal{O}' \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^m$  est une autre carte locale, alors  $y = \varphi \circ x$  sur un voisinage de  $M$  dans  $\mathcal{M}$  et, pour tout chemin  $\gamma$  tracé sur  $\mathcal{M}$  et passant par  $M$  à l'instant 0, nous avons  $y \circ \gamma = \varphi \circ (x \circ \gamma)$  et donc

$$\frac{d(y \circ \gamma)}{dt}(0) = d\varphi_{x(M)} \circ \frac{d(x \circ \gamma)}{dt}(0), \quad (17)$$

où  $d\varphi_{x(M)}$  est la différentielle de  $\varphi$  en  $x(M)$ . Donc, comme  $d\varphi_{x(M)}$  est une bijection, nous voyons que la relation d'équivalence  $\sim$  ne dépend pas du choix de la carte. On peut alors adopter la définition suivante :

**Définition 2.2 (espace tangent)** L'espace tangent à  $M$  en  $\mathcal{M}$  est l'ensemble des classes d'équivalence de  $\sim$  :

$$T_M \mathcal{M} := \Gamma_M / \sim .$$

Pour tout élément  $v = [\gamma \bmod \sim] \in T_M \mathcal{M}$  et pour toute carte locale  $x$ , on pose  $dx_M(v) = \frac{d(x \circ \gamma)}{dt}(0)$ . Cela définit la bijection

$$\begin{aligned} dx_M : \quad T_M \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ [(I, \gamma) \bmod \sim] &\longmapsto \frac{d(x \circ \gamma)}{dt}(0) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc munir  $T_M \mathcal{M}$  de l'unique structure d'espace vectorielle telle que  $dx_M$  soit linéaire. La relation (17) se traduit par

$$dy_M = d\varphi_{x(M)} \circ dx_M. \quad (18)$$

Comme  $d\varphi_M$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^m$ , cela entraîne que la structure d'espace vectoriel que nous avons définie sur  $T_M \mathcal{M}$  ne dépend pas de la carte choisie.

### 2.1.2 L'espace cotangent

Le compagnon de l'espace tangent est son dual, qui joue un rôle au moins aussi important.

**Définition 2.3 (espace cotangent)** Soit  $\mathcal{M}$  une variété différentielle et  $M \in \mathcal{M}$ . L'espace cotangent à  $\mathcal{M}$  au point  $M$  est  $(T_M \mathcal{M})^*$ , l'espace dual de  $T_M \mathcal{M}$ . On le note :

$$T_M^* \mathcal{M}.$$

Nous définissons de même l'espace des **formes  $p$ -multilinéaires alternées** sur  $T_M \mathcal{M}$ , nous le noterons :

$$\Lambda^p T_M^* \mathcal{M}.$$

Si  $f$  est une fonction à valeurs réelles définie sur  $\mathcal{M}$  (ou sur un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{M}$ ), nous définissons  $df_M : T_M \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$  par

$$df_M(v) := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0), \quad \text{où } v = [\gamma \bmod \sim].$$

Si  $x$  est une carte locale sur un voisinage de  $M$  dans  $\mathcal{M}$ , nous pouvons écrire l'identité  $f \circ \gamma = (f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma)$ , dont nous déduisons  $\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = d(f \circ x^{-1})_{x(M)} \circ \frac{d(x \circ \gamma)}{dt}(0) = d(f \circ x^{-1})_{x(M)} \circ dx_M(v)$ . Cela entraîne que, d'une part,  $\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0)$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$  pour représenter  $v$  et, d'autre part,  $[v \longrightarrow df_M(v)]$  est linéaire. Ainsi  $df_M \in T_M^* \mathcal{M}$ .

Appliquant en particulier cela aux fonctions  $x^1, \dots, x^m : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$  (c'est à dire aux composantes d'une carte locale  $x : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ), nous obtenons ainsi en chaque point  $M \in \mathcal{O}$  une famille  $(dx_M^1, \dots, dx_M^m)$  dans  $T_M^* \mathcal{M}$ . Comme il ne s'agit ni plus ni moins que des composantes canoniques de l'isomorphisme  $dx_M$ , cette famille forme donc une base



de  $T_M^* \mathcal{M}$  (cela généralise les remarques faites au §1.2). La différentielle d'une fonction quelconque  $f$  en un point  $M \in \mathcal{O}$  se décompose donc d'une façon unique dans cette base. L'usage est de noter

$$df_M = \frac{\partial f}{\partial x^j}(M) dx_M^j.$$

cette décomposition (le signe  $\sum_{j=1}^m$  est sous-entendu). Remarquer que  $\frac{\partial f}{\partial x^j}(M) = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial t^j}(x(M))$ . Si  $f$  est définie et différentiable sur  $\mathcal{O}$ , on écrira  $df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$  sur  $\mathcal{O}$ .

### 2.1.3 Applications différentiables entre variétés

Nous disposons maintenant de tous les outils pour faire du calcul différentiel entre deux variétés. Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux variétés de dimensions  $m$  et  $n$ , respectivement. Soit  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application. Nous dirons que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si, pour toute carte locale  $x : \mathcal{D} \rightarrow U$  sur  $\mathcal{M}$  et toute carte locale  $y : \mathcal{O} \rightarrow V$  sur  $\mathcal{N}$  telle que l'image  $x(\mathcal{D})$  de  $\mathcal{D}$  par  $x$  soit contenue dans  $\mathcal{O}$ , l'application

$$y \circ \varphi \circ x^{-1} : U \rightarrow V$$

est de classe  $\mathcal{C}^k$ . A nouveau, cette définition n'a de sens (indépendant des cartes utilisées sur  $\mathcal{M}$  et sur  $\mathcal{N}$ ) que si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont des variétés de classe au moins égale à  $k$ . Si tel est le cas et si  $k \geq 1$ , nous pouvons définir la différentielle de  $\varphi$  en un point  $M \in \mathcal{M}$  comme étant l'application linéaire  $d\varphi_M : T_M \mathcal{M} \rightarrow T_{\varphi(M)} \mathcal{N}$  telle que  $dy_{\varphi(M)} \circ d\varphi_M \circ (dx_M)^{-1} = d(y \circ \varphi \circ x^{-1})_{x(M)}$ .

## 2.2 Les sous-variétés

### 2.2.1 Définitions

Une classe importante d'exemples de variétés sont les sous-variétés des variétés. Nous en donnons plusieurs définitions équivalentes.

**Définition 2.4 (sous-variété 1)** *Soit  $\mathcal{M}$  une variété de dimension  $m$ . Une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{M}$  de dimension  $k$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{M}$  tel que pour tout point  $M$  de  $\mathcal{S}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}_M$  de  $M$  dans  $\mathcal{M}$  et une carte  $x$  définie sur  $\mathcal{O}_M$  et à valeurs dans un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , tel que  $x(\mathcal{O}_M \cap \mathcal{S}) = \Delta^k \cap x(\mathcal{O}_M)$ , où  $\Delta^k$  est le sous-espace de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^m$  défini par*

$$\Delta^k := \{t \in \mathbb{R}^m / t^{k+1} = \dots = t^m = 0\}.$$

Cette définition signifie que, localement, une sous-variété ressemble à un sous-espace affine, si on la regarde « à travers » une carte locale bien choisie.

**Définition 2.5 (sous-variété 2)** *Une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{M}$  de dimension  $k$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{M}$  tel que pour tout point  $M$  de  $\mathcal{S}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}_M$  de  $M$  dans  $\mathcal{M}$ , une application  $f : \mathcal{O}_M \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$  de rang  $m - k$  partout (cela signifie que le rang de  $df$  est  $m - k$  partout sur  $\mathcal{O}_M$ ) et une valeur  $s_0 \in \mathbb{R}^{m-k}$  tels que  $\mathcal{O}_M \cap \mathcal{S} = f^{-1}(s_0)$ .*

Cette définition entraîne en particulier que tout ensemble de niveau d'une application régulière correspondant à une valeur régulière est une sous-variété. Enfin une dernière définition est :

**Définition 2.6 (sous-variété 3)** Une sous-variété  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{M}$  de dimension  $k$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{M}$  tel que pour tout point  $M$  de  $\mathcal{S}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}_M$  de  $M$  dans  $\mathcal{M}$ , un ouvert  $\omega$  de  $\mathbb{R}^k$  et une application  $\psi : \omega \rightarrow \mathcal{O}_M$  telle que

- $\psi$  est un homéomorphisme entre  $\omega$  et  $\mathcal{O}_M \cap \mathcal{S}$  (où la topologie utilisée sur  $\mathcal{O}_M \cap \mathcal{S}$  est celle induite par la distance dans  $\mathcal{M}$ )
- $\psi$  est une *immersion*, id est  $d\psi$  est de rang  $k$  partout sur  $\omega$

**Théorème 2.1** Les trois définitions précédentes d'une sous-variété sont toutes équivalentes.

*Démonstration* — (i) Pour passer de la définition 1 à la définition 2, il suffit de prendre  $f = (x^{k+1}, \dots, x^m)$ .

(ii) Passons de la définition 2 à la définition 1. Notons  $f = (f^{k+1}, \dots, f^m)$  les composantes de  $f$  et choisissons une carte locale  $x : \mathcal{O}'_M \rightarrow U$  sur un voisinage  $\mathcal{O}'_M$  de  $M$ . Par le théorème de la base incomplète, nous pouvons choisir  $k$  composantes de  $x$ , que, quitte à les renuméroter, nous pouvons noter  $x^1, \dots, x^k$  et telles que  $(dx^1_M, \dots, dx^k_M, df^{k+1}_M, \dots, df^m_M)$  soit de rang  $m$ . Nous pouvons alors appliquer le théorème d'inversion locale en ce point pour montrer que l'application  $(x^1, \dots, x^k, f^{k+1}, \dots, f^m)$  est une carte locale qui satisfait les conditions de la définition 1.

(iii) Pour passer de la définition 1 à la définition 3, il suffit de restreindre  $x^{-1}$  à  $x(\mathcal{O}_M) \cap \Delta^k$  pour obtenir l'application  $\psi$  désirée.

(iv) Terminons en montrant comment passer de la définition 3 à la définition 1. Supposons que  $\psi(0) = M$ . Soit  $y$  une carte locale sur un voisinage de  $M$  dans  $\mathcal{M}$  et à valeur dans un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . Considérons l'application  $y \circ \psi$  (bien définie, quitte à remplacer  $\omega$  par un ouvert plus petit si nécessaire). Cette application satisfait les mêmes propriétés que  $\psi$ . En particulier  $d(y \circ \psi)_0$  est de rang  $k$  et nous pouvons donc trouver  $m - k$  vecteurs  $E_{k+1}, \dots, E_m \in \mathbb{R}^m$  tels que  $(\frac{\partial y \circ \psi}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial y \circ \psi}{\partial t^k}, E_{k+1}, \dots, E_m)$  soit une base de  $\mathbb{R}^m$ . Nous pouvons donc appliquer le théorème d'inversion locale pour en déduire que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \omega \times \mathbb{R}^{m-k} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (t^1, \dots, t^m) &\longmapsto y \circ \psi(t^1, \dots, t^k) + E_{k+1}t^{k+1} + \dots + E_mt^m \end{aligned}$$

est inversible sur un voisinage de  $0$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Considérons l'application  $x := \Phi^{-1} \circ y$ , qui constitue une carte locale définie sur un voisinage  $\mathcal{O}_M$  de  $M$  dans  $\mathcal{M}$  (bien définie, pourvu qu'on l'on choisisse  $\mathcal{O}_M$  suffisamment petit). Quitte à choisir  $\mathcal{O}_M$  encore plus petit, on peut supposer aussi que  $x(\mathcal{O}_M) = U_0 \times V_0$ , où  $U_0 \subset \mathbb{R}^k$  et  $V_0 \subset \mathbb{R}^{m-k}$ . Il est clair que  $x^{-1}(U_0 \times \{0\})$  est contenu dans  $\mathcal{S} \cap \mathcal{O}_M$  (puisque la restriction de  $x^{-1}$  à  $U_0 \times \{0\}$  coïncide avec  $\psi$ ). Il reste à montrer que l'inclusion inverse, à savoir que l'inclusion  $\mathcal{O}_M \cap \mathcal{S} \subset x^{-1}(U_0 \times \{0\})$  ou, de façon équivalente,  $x(\mathcal{O}_M \cap \mathcal{S}) \subset U_0 \times \{0\}$  peut être satisfaite si nous choisissons  $U_0$  suffisamment petit. Pour cela nous utilisons le fait que  $\psi$  est un homéomorphisme local vers

$\mathcal{S}$  et donc, en particulier, l'application inverse  $\psi^{-1}$  est continue. Cela implique qu'il existe un voisinage  $\mathcal{O}'_M$  de  $M$  dans  $\mathcal{M}$  tel que  $\psi^{-1}(\mathcal{O}'_M \cap \mathcal{S}) \subset U_0$ , ce qui signifie que  $\forall M' \in \mathcal{O}'_M \cap \mathcal{S}$ ,  $\exists!(t^1, \dots, t^k) \in U_0$  tel que  $\psi(t^1, \dots, t^k) = M'$  et alors  $x^{-1}(t^1, \dots, t^k, 0, \dots, 0) = M'$ . Donc  $x(M') = (t^1, \dots, t^k, 0, \dots, 0) \in U_0 \times \{0\}$ . Il suffit donc de remplacer  $\mathcal{O}_M$  par  $\mathcal{O}'_M$  et  $x(\mathcal{O}_M)$  par  $x(\mathcal{O}'_M)$ .  $\square$

Le diagramme suivant récapitule très schématiquement les liens entre les différentes applications de l'étape (iv) de la preuve :

$$\begin{array}{ccc}
 \omega & \subset & \omega \times \mathbb{R}^{m-k} \\
 \psi \downarrow & & \uparrow x \\
 \mathcal{S} & \subset & \mathcal{M} \\
 & & \downarrow y \\
 & & \mathbb{R}^m
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow \Phi \\
 \searrow \Phi^{-1}
 \end{array}$$

### 2.2.2 Une tautologie importante

Toute sous-variété  $\mathcal{S}$  d'une variété  $\mathcal{M}$  est naturellement munie d'une structure de variété : il suffit par exemple de prendre les applications réciproques  $\psi^{-1}$  des paramétrisations locales de la troisième définition pour obtenir un système de cartes. L'application d'inclusion

$$\begin{array}{ccc}
 \iota_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\
 & \longmapsto & \mathcal{M}
 \end{array}$$

est un objet idiot mais très utile pour clarifier certains raisonnements. Il s'agit non seulement d'une inclusion entre deux ensembles, mais aussi d'une application différentiable entre deux variétés. Sa différentielle en un point  $M \in \mathcal{S}$ ,  $d(\iota_{\mathcal{S}})_M : T_M \mathcal{S} \longrightarrow T_M \mathcal{M}$ , est injective et permet, à travers l'abus de notation  $T_M \mathcal{S} \simeq d(\iota_{\mathcal{S}})_M(T_M \mathcal{S})$ , d'identifier  $T_M \mathcal{S}$  avec un sous-espace vectoriel de  $T_M \mathcal{M}$ .

## 2.3 Semons les vecteurs et les covecteurs dans les champs

**Définition 2.7 (champs de vecteurs)** Soit  $\mathcal{M}$  une variété différentielle, un champ de vecteur tangent  $X$  sur  $\mathcal{M}$  est la donnée, en chaque point  $M$  de  $\mathcal{M}$ , d'un vecteur  $X(M) \in T_M \mathcal{M}$ .

On note  $\mathcal{X}(\mathcal{M})$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs tangents sur  $\mathcal{M}$ .

En d'autres termes un champ de vecteur est analogue à une application définie sur  $\mathcal{M}$  et à valeurs dans un espace vectoriel, à la nuance près que l'« espace d'arrivée »  $T_M \mathcal{M}$  dépend, lui aussi, de  $M$ . Nous verrons plus loin la notion adéquate pour décrire un tel objet : celle de *fibré vectoriel* sur une variété.

En général on suppose que  $X(M)$  dépend de façon régulière (continue,  $\mathcal{C}^\ell$ , etc.) de  $M$ . Mais une telle notion nécessite des précautions. Pour cela, on se place sur un ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$  sur lequel est définie une carte  $x : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ . Il existe alors un moyen naturel pour représenter la restriction sur  $\mathcal{O}$  du champ de vecteur  $X$ , par une application de  $U$  vers  $\mathbb{R}^n$  que nous noterons  $x_* X$  (un champ de vecteur sur  $U$ ). Pour définir la valeur

de  $x_*X$  en un point  $t \in U$ , prenons l'unique  $M \in \mathcal{O}$  tel que  $x(M) = t$ . On définit alors  $(x_*X)(t)$  comme étant l'image par  $dx_M$  de  $X(M) \in T_M\mathcal{M}$ . Autrement,  $x_*X$  est caractérisé par l'une des deux propriétés (équivalentes) suivantes :

$$\forall M \in \mathcal{O}, \quad (x_*X)(x(M)) = dx_M(X(M)),$$

ou

$$\forall t \in U, \quad (x_*X)(t) = dx_{x^{-1}(t)}(X(x^{-1}(t))).$$

A présent il est possible de demander que le champ de vecteur  $X$  soit de classe  $\mathcal{C}^\ell$  : il suffit pour cela de supposer que, pour toute carte locale  $x : \mathcal{O} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ , on ait  $x_*X \in \mathcal{C}^\ell(U, \mathbb{R}^m)$ . Mais, attention ! cela n'a de sens que si la variété est de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq \ell + 1$ , car sinon, on obtiendrait des contradictions en passant d'une carte à l'autre (puisque une application de recollement  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et que, par conséquent, sa différentielle  $d\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ ).

Nous pouvons alors définir, de façon analogue aux champs de vecteurs, des champs de formes  $p$ -multilinéaires alternées sur  $\mathcal{M}$ , que nous désignerons par  **$p$ -formes différentielles sur  $\mathcal{M}$** .

**Définition 2.8 ( $p$ -formes différentielles)** Soit  $\mathcal{M}$  une variété différentielle, une  $p$ -forme différentielle  $\alpha$  sur  $\mathcal{M}$  est la donnée, en chaque point  $M$  de  $\mathcal{M}$ , d'une  $p$ -forme  $\alpha_M \in \Lambda^p T_M^*\mathcal{M}$ .

On note  $\Omega^p(\mathcal{M})$  l'espace vectoriel des  $p$ -formes différentielles sur  $\mathcal{M}$ .

Comme pour les champs de vecteurs, nous pouvons préciser avec quelle continuité ou avec quelle régularité la  $p$ -forme  $\alpha_M$  varie en fonction de  $M$ . Nous devons pour cela « transporter »  $\alpha$  en une  $p$ -forme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  en utilisant une carte locale. Soit  $x : \mathcal{O} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  une telle carte, nous définissons  $(x^{-1})^*\alpha \in \Omega^p(U)$  par :  $\forall t \in U$ ,  $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\left( (x^{-1})^*\alpha \right)_t(\xi_1, \dots, \xi_p) = \alpha_{x^{-1}(t)} \left( (dx_{x^{-1}(t)})^{-1}(\xi_1), \dots, (dx_{x^{-1}(t)})^{-1}(\xi_p) \right),$$

(où l'on peut écrire aussi  $(dx_{x^{-1}(t)})^{-1} = d(x^{-1})_t$ ) ou, de façon équivalente,

$$\forall M \in \mathcal{O}, \forall v_1, \dots, v_p \in T_M\mathcal{M}, \quad \left( (x^{-1})^*\alpha \right)_{x(M)}(dx_M(v_1), \dots, dx_M(v_p)) = \alpha_M(v_1, \dots, v_p).$$

Et alors nous dirons que  $\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^\ell$  si, pour toute carte locale  $x : \mathcal{O} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $(x^{-1})^*\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^\ell$ . A nouveau cette définition n'a de sens (pour  $p \geq 1$ ) que si la variété  $\mathcal{M}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $k \geq \ell + 1$  (le cas  $p = 0$  est exceptionnel :  $k \geq \ell$  suffit).

## 2.4 Fibrés vectoriels

Les ensembles :

$$T\mathcal{M} := \{(M, v) \mid M \in \mathcal{M}, v \in T_M\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{M \in \mathcal{M}} T_M\mathcal{M},$$

$$T^*\mathcal{M} := \{(M, \alpha) \mid M \in \mathcal{M}, \alpha \in T_M^*\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{M \in \mathcal{M}} T_M^*\mathcal{M}$$

et, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\Lambda^p T^*\mathcal{M} := \{(M, \alpha) \mid M \in \mathcal{M}, \alpha \in \Lambda^p T_M^*\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \Lambda^p T_M^*\mathcal{M}$$

peuvent être munis d'une structure de variété différentielle, dont la construction se déduit naturellement de la structure de variété de  $\mathcal{M}$ . Nous appellerons  $T\mathcal{M}$  le **fibré tangent de  $\mathcal{M}$** ,  $T^*\mathcal{M}$  le **fibré cotangent de  $\mathcal{M}$**  et enfin  $\Lambda^p T^*\mathcal{M}$ , le **fibré des  $p$ -formes sur  $\mathcal{M}$** . Noter que dans le cas  $p = 1$ , on a  $T^*\mathcal{M} = \Lambda^1 T^*\mathcal{M}$ .

En effet, supposons que  $\mathcal{M}$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^k$  et soit  $x : \mathcal{O} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  une carte locale. Nous considérons d'abord l'exemple du fibré tangent. Notons

$$T_{\mathcal{O}}\mathcal{M} := \{(M, v) \mid M \in \mathcal{O}, v \in T_M\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{M \in \mathcal{O}} T_M\mathcal{M},$$

le sous-ensemble de  $T\mathcal{M}$  qui est « au-dessus de »  $\mathcal{O}$ . Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} Tx : T_{\mathcal{O}}\mathcal{M} &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^m \\ (M, v) &\longmapsto (x(M), dx_M(v)). \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que  $Tx$  est une bijection (donc devient un homéomorphisme à partir du moment où l'on choisit sur  $T_{\mathcal{O}}\mathcal{M}$  une topologie qui rend cette application continue). Mais, en plus, en partant d'un atlas  $(\mathcal{O}_i, x_i)_{i \in I}$  sur  $\mathcal{M}$ , on peut construire ainsi un atlas  $(T_{\mathcal{O}_i}\mathcal{M}, Tx_i)_{i \in I}$  sur  $T\mathcal{M}$ , dont les applications de recollement sont de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  (exercice : le vérifier !). Ainsi  $T\mathcal{M}$  possède une structure de variété différentielle de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

Nous pouvons faire de même avec le fibré cotangent  $T^*\mathcal{M}$  : nous construisons à partir de la carte  $x$  l'application définie sur

$$T_{\mathcal{O}}^*\mathcal{M} := \{(M, \alpha) \mid M \in \mathcal{O}, \alpha \in T_M^*\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{M \in \mathcal{O}} T_M^*\mathcal{M}$$

par

$$\begin{aligned} T^*x : T_{\mathcal{O}}^*\mathcal{M} &\longrightarrow U \times (\mathbb{R}^m)^* \\ (M, \alpha) &\longmapsto (x(M), \alpha_M \circ (dx_M)^{-1}). \end{aligned}$$

Et nous pouvons donc construire de façon naturelle un atlas sur  $T^*\mathcal{M}$  à partir d'un atlas sur  $\mathcal{M}$  et munir ainsi  $T^*\mathcal{M}$  d'une structure de variété différentielle de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

De même en construisant une carte locale sur

$$\Lambda^p T_{\mathcal{O}}^*\mathcal{M} := \{(M, \alpha) \mid M \in \mathcal{O}, \alpha \in \Lambda^p T_M^*\mathcal{M}\} \simeq \bigcup_{M \in \mathcal{O}} \Lambda^p T_M^*\mathcal{M},$$

nous pouvons démontrer que  $\Lambda^p T^*\mathcal{M}$  est également une variété de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

Par ailleurs pour, par exemple, le fibré tangent, nous pouvons définir une **projection**

$$\begin{aligned} \pi : T\mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (M, v) &\longmapsto M \end{aligned}$$

L'image inverse par  $\pi$  d'un point  $M \in \mathcal{M}$  est l'espace tangent  $T_M\mathcal{M}$ . De façon analogue, nous pouvons définir les projections  $\pi : T^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$  et  $\pi : \Lambda^p T^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ . A chaque fois, l'image inverse par  $\pi$  d'un point  $M$  est un espace vectoriel, que nous appellerons **fibre** de la projection.

Ces constructions sont des exemples de fibrés vectoriels :

**Définition 2.9 (fibré vectoriel)** Soit  $\mathcal{M}$  une variété différentielle de dimension  $m$  et soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $k \in \mathbb{N}$ . Un fibré vectoriel  $\mathcal{F}$  au-dessus de  $\mathcal{M}$  et de fibre type  $V$  est une variété  $\mathcal{F}$  munie d'une application différentiable  $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{M}$ , appelée **fibration** telle que

- pour tout point  $M \in \mathcal{M}$ , la fibre  $\mathcal{F}_M := \pi^{-1}(M)$  est un espace vectoriel isomorphe à  $V$  ;
- il existe un atlas  $(\mathcal{F}_{\mathcal{O}_i}, \Phi_i)_{i \in I}$  où :
  - $(\mathcal{O}_i, x_i)_{i \in I}$  est un atlas de  $\mathcal{M}$ , c'est à dire :  $\cup_{i \in I} \mathcal{O}_i = \mathcal{M}$  et pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{O}_i$  est un ouvert de  $\mathcal{M}$ ,  $x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow U_i \subset \mathbb{R}^m$  est un homéomorphisme et les fonctions de recollement entre deux cartes  $x_i$  et  $x_j$  sont des difféomorphismes,
  - $\mathcal{F}_{\mathcal{O}_i} := \{(M, f) \mid M \in \mathcal{O}_i, f \in \mathcal{F}_M\} \simeq \cup_{M \in \mathcal{O}_i} \mathcal{F}_M$ ,
  - pour tout  $i \in I$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_i : \mathcal{F}_{\mathcal{O}_i} &\longrightarrow U_i \times V \\ (M, f) &\longmapsto (x_i(M), A_i(M)(f)), \end{aligned}$$

où,  $\forall M \in \mathcal{O}_i$ ,  $A_i(M)$  est une application linéaire inversible de  $\mathcal{F}_M$  vers  $V$ , i.e. un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Remarque** — On appelle **rang du fibré vectoriel** la dimension  $k$  de ses fibres.

Grossièrement on peut voir un fibré vectoriel au-dessus de  $\mathcal{M}$  et de fibre type  $V$  comme une variété qui ressemblerait *localement* au produit  $\mathcal{M} \times V$ , mais qui ne serait pas globalement difféomorphe (c'est à dire équivalente par un difféomorphisme) à ce produit. A ce propos, mentionnons que  $\mathcal{M} \times V$  est un exemple de fibré, que l'on qualifie de *trivial*.

**Définition 2.10 (section d'un fibré vectoriel)** Soit  $\mathcal{F}$  un fibré vectoriel au-dessus de  $\mathcal{M}$  et de fibre type  $V$  et notons  $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{M}$  la fibration associée. Soit  $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$  une partie de  $\mathcal{M}$  (un ouvert, une sous-variété...). Une section  $\sigma$  de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $\mathcal{P}$  est une application  $\sigma : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$  telle que l'application composée  $\pi \circ \sigma$  coïncide avec l'application identité de  $\mathcal{P}$  dans lui-même.

On note  $\Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{F})$  l'ensemble des sections de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $\mathcal{P}$ .

Autrement dit, si  $M \in \mathcal{P}$ ,  $\sigma(M) = (M, \tilde{\sigma}(M))$ , où  $\tilde{\sigma}(M) \in \mathcal{F}_M$ . Par abus de langage nous noterons  $\sigma(M) = \tilde{\sigma}(M) \in \mathcal{F}_M$ .

Notons également qu'une section du fibré trivial  $\mathcal{M} \times V$  au dessus de  $\mathcal{M}$  est une application de la forme  $\sigma(\mathbf{M}) = (\mathbf{M}, s(\mathbf{M}))$ , où  $s$  est une application de  $\mathcal{M}$  vers  $V$ .

### Expression en coordonnées locales

Si  $\sigma$  est une section de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $\mathcal{M}$  et si  $\Phi : \mathcal{F}_{\mathcal{O}} \rightarrow U \times V$  est une carte locale avec  $\Phi(\mathbf{M}, f) = (x(\mathbf{M}), A(\mathbf{M})(f))$ , nous pouvons représenter  $\sigma$  grâce à une application  $s : U \rightarrow V$  telle que

$$\forall t \in U, \quad (t, s(t)) = \Phi \circ \sigma \circ x^{-1}(t).$$

Ce qui revient à dire que le diagramme  $\mathcal{M} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}$  est commutatif. Autrement dit :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{F} \\ \downarrow x & & \downarrow \Phi \\ U & \xrightarrow{1 \times s} & U \times V \end{array}$$

$$\forall \mathbf{M} \in \mathcal{O}, \quad s(x(\mathbf{M})) = A(\mathbf{M})(\sigma(\mathbf{M})).$$

En guise de conclusion et pour faire le lien avec le paragraphe précédent, nous aurions pu définir un champ de vecteur tangent sur  $\mathcal{M}$  comme étant une section du fibré tangent  $T\mathcal{M}$ , i.e.  $\mathcal{X}(\mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ . De même une  $p$ -forme différentielle sur  $\mathcal{M}$  est une section de  $\Lambda^p T^*\mathcal{M}$ , i.e.  $\Omega^p(\mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^p T^*\mathcal{M})$ .

## 2.5 A propos des notations

Comme nous avons vu au §2.1.2, si  $x = (x^1, \dots, x^m) : \mathcal{O} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  est une carte locale, en chaque point  $\mathbf{M} \in \mathcal{O}$ , les différentielles des fonctions coordonnées  $x^1, \dots, x^m$  constituent une base  $(dx^1, \dots, dx^m)$  de  $T_{\mathbf{M}}^*\mathcal{M}$ . De même et comme au paragraphe 1.2.3, nous noterons

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^1}(\mathbf{M}), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}(\mathbf{M}) \right) \quad \text{ou, plus simplement,} \quad \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right)$$

la base de  $T_{\mathbf{M}}\mathcal{M}$  qui est duale de  $(dx^1, \dots, dx^m)$ , c'est à dire telle  $dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i$ , pour tous les entiers  $i$  et  $j$  tels que  $1 \leq i, j \leq m$ . (Rappelons que le *symbole de Kronecker*  $\delta_j^i$  vaut 1 si  $i = j$  et 0 si  $i \neq j$ .) Cette notation, où les vecteurs sont notés comme des opérateurs différentiels, peut se justifier par le fait que l'espace tangent admet une autre définition, équivalente à la première :

**Théorème 2.2** *Soit  $\mathcal{S}$  une variété différentielle et  $\mathbf{M} \in \mathcal{S}$ . Soit  $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  l'ensemble des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathcal{M}$  vers  $\mathbb{R}$ . L'espace tangent à  $\mathcal{M}$  en  $\mathbf{M}$  s'identifie canoniquement à l'ensemble des dérivations agissant sur  $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  au point  $\mathbf{M}$ , c'est à dire à l'ensemble des applications linéaires  $D : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfont la règle de Leibniz :  $\forall f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ ,*

$$D(fg) = (Df)g(\mathbf{M}) + f(\mathbf{M})(Dg) \tag{19}$$

*Démonstration* — Ce résultat généralise la Proposition 1.5. Dans un sens, il est relativement facile : à tout  $v \in T_{\mathbf{M}}\mathcal{M}$ , on associe l'opérateur différentiel  $D_v : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \ni f \mapsto D_v f := df_{\mathbf{M}}(v) \in \mathbb{R}$ . On vérifie alors sans peine que  $D_v$  satisfait (19).

Réciproquement, soit  $m_0 \in \mathcal{M}$  et soit  $D : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$  un opérateur linéaire satisfaisant  $D(fg) = f(m_0)Dg + g(m_0)Df$ ,  $\forall f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$ .

*Première étape : Localisation, ou comment se ramener à un opérateur  $L$  agissant sur des fonctions définies sur un ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$*  — Soit  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$  un ouvert contenant  $m_0$  et soit  $x : \mathcal{O} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  une carte locale. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x(m_0) = 0$ . Soit  $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$  une fonction égale à 1 en dehors d'un compact contenu dans  $\mathcal{O}$  et telle que  $\psi(m_0) = 0$  et soit  $\chi := 1 - \psi^2 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$  (alors  $\chi$  s'annule en dehors d'un compact contenu dans  $\mathcal{O}$ ). Calculons  $D\chi$ . En remarquant que  $D1 = 0$  (cf. Proposition 1.5), on obtient  $D\chi = D1 - 2\psi(m_0)D\psi = 0$ . De plus  $\chi(m_0) = 1$ . De ces deux propriétés, nous déduisons que, pour tout  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$ ,

$$D(\chi f) = (D\chi)f(m_0) + \chi(m_0)Df = 0 + 1 \cdot Df = Df. \quad (20)$$

Introduisons l'opérateur d'extension  $E : \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$  qui, à toute fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ , associe la fonction  $E(f) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$  qui coïncide avec  $\chi f$  sur  $\mathcal{O}$  et qui s'annule sur  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{O}$ . Nous définissons également l'opérateur de restriction

$$\begin{aligned} R : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) \\ f &\longmapsto f|_{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur  $L : \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$  défini par  $L = D \circ E$ . Nous avons alors les deux propriétés suivantes :

$$L \circ R = D \quad (21)$$

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}), \quad L(fg) = (Lf)g(m_0) + f(m_0)Lg. \quad (22)$$

Pour montrer (21), nous déduisons des définitions que, pour  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M})$ ,  $L \circ R(f) = D \circ E \circ R(f) = D(\chi f)$  et donc  $L \circ R(f) = Df$ , en vertu de (20). Pour montrer (22), observons d'abord que  $\chi E(fg) = E(f)E(g)$  et donc, en utilisant (20),

$$\begin{aligned} L(fg) &= D[E(fg)] = D[\chi E(fg)] = D[E(f)E(g)] \\ &= E(f)(m_0)D[E(g)] + D[E(f)]E(g)(m_0) \\ &= f(m_0)(Lg) + (Lf)g(m_0). \end{aligned}$$

Ainsi  $L$  satisfait la même propriété que  $D$ .

*Deuxième étape : Le résultat pour  $L$*  — Soit  $x : \mathcal{O} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  une carte locale telle que  $x(m_0) = 0$  et soit  $\Lambda : \mathcal{C}^\infty(x(\mathcal{O})) \rightarrow \mathbb{R}$  défini par  $\Lambda(\varphi) = L(\varphi \circ x)$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(x(\mathcal{O}))$ . Alors  $\Lambda(\varphi\psi) = \varphi(0)\Lambda(\psi) + \psi(0)\Lambda(\varphi)$ . On peut donc utiliser le résultat de la Proposition 1.5 à  $\Lambda$ . On en déduit qu'il existe  $\xi \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\Lambda(\varphi) = d\varphi_0(\xi)$ . Donc  $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ ,  $L(f) = \Lambda(f \circ x^{-1}) = d(f \circ x^{-1})_0(\xi) = df_{m_0}(v)$ , où  $v := dx^{-1}_0(\xi) \in T_{m_0}\mathcal{M}$ . Donc, par (21),  $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ ,  $D(f) = L(R(f)) = d(R(f))_{m_0}(v) = df_{m_0}(v)$ .  $\square$



### 3 Opérations sur les formes différentielles

Nous allons voir quatre opérations qui jouent un rôle très important dans le calcul différentiel extérieur : *l'image inverse* par une application différentiable, *la différentielle extérieure*, *le produit intérieur* par un champ de vecteur et *l'intégration*. Pour simplifier la présentation et les notations, nous supposons désormais que les formes différentielles considérées sont toutes de classe  $C^\infty$ , sauf mention contraire.

L'idée conductrice de ce qui suit est de voir l'espace des formes différentielles  $\Omega^*(\mathcal{M}) = \bigoplus_{p=0}^m \Omega^p(\mathcal{M})$  sur une variété  $\mathcal{M}$  comme une extension de l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathcal{M})$ , puisque  $\Omega^0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$ . On peut enrichir ce point de vue d'une intuition géométrique, à condition d'imaginer qu'une variété n'est pas seulement un continuum de *points*  $\mathcal{M}$ , mais qu'elle est également le support d'objets de la forme  $(M, v) \in T\mathcal{M}$ ,  $(M, v_1 \wedge v_2) \in \Lambda^2 T\mathcal{M}$ , etc., où, par exemple,  $\Lambda^2 T_M \mathcal{M}$  (dont nous ne donnerons pas une définition précise ici) est l'espace engendré par les *produits extérieurs*  $v_1 \wedge v_2$  de paires de vecteurs  $(v_1, v_2) \in (T_M \mathcal{M})^2$ . On peut envisager  $v_1 \wedge v_2$  comme étant un élément infinitésimal d'une surface orientée. Alors une  $p$ -forme peut être vue comme une fonction sur  $\Lambda^p T\mathcal{M}$ .

#### 3.1 L'image inverse d'une forme différentielle

Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux variétés, de dimensions quelconques (et différentes en général) et  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application régulière. Pour toute fonction  $f \in C^\infty(\mathcal{N})$ , il existe une méthode naturelle pour fabriquer une autre fonction sur  $\mathcal{M}$  : la composer avec  $\varphi$ . On obtient ainsi :

$$f \circ \varphi : x \mapsto f(\varphi(x)).$$

Nous allons étendre l'opération

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathcal{N}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathcal{M}) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

en une opération

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \Omega^p(\mathcal{M}) \\ \alpha & \longmapsto & \varphi^* \alpha, \end{array}$$

pour tout  $0 \leq p \leq n$ . Nous appellerons **image inverse de  $\alpha$  par  $\varphi$**  ou **tiré en arrière de  $\alpha$  par  $\varphi$**  (nom peu élégant), ou encore **pull-back de  $\alpha$  par  $\varphi$**  la forme  $\varphi^* \alpha$ .

**Définition 3.1 (image inverse d'une  $p$ -forme)** Soit  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application régulière et soit  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$ . L'image inverse de  $\alpha$  par  $\varphi$  est la  $p$ -forme  $\varphi^* \alpha$  définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}, \forall v_1, \dots, v_p \in T_M \mathcal{M}, \quad (\varphi^* \alpha)_M(v_1, \dots, v_p) = \alpha_{\varphi(M)}(d\varphi_M(v_1), \dots, d\varphi_M(v_p)).$$

Observons que, de façon immédiate,  $\varphi^* \alpha$  est bien automatiquement  $p$ -multilinéaire et alternée et

$$\forall f \in \Omega^0(\mathcal{N}) = C^\infty(\mathcal{N}), \quad \varphi^* f = f \circ \varphi. \quad (23)$$

Une autre remarque importante : après les 0-formes (qui sont des fonctions) les exemples de formes différentielles les plus simples sont les différentielles de fonctions. En effet, comme nous l'avons vu au §2.1.2, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$  et en tout point  $N \in \mathcal{N}$ , la différentielle  $df_N$  est un élément de  $T_N^*\mathcal{N}$ . Ainsi nous pouvons voir de façon naturelle  $df$  comme une section régulière de  $T^*\mathcal{N}$ , c'est à dire  $df \in \Omega^1(\mathcal{N})$ . Quelle est l'image inverse de  $df$  par  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ? d'après la définition, elle est caractérisée par :

$$\forall M \in \mathcal{M}, \forall v \in T_M\mathcal{M}, \quad (\varphi^*(df))_M(v) = df_{\varphi(M)}(d\varphi_M(v)) = (df_{\varphi(M)} \circ d\varphi_M)(v).$$

On voit donc que, d'après la règle de dérivation d'une fonction composée,  $(\varphi^*(df))_M$  s'identifie à  $(df_{\varphi(M)} \circ d\varphi_M) = d(f \circ \varphi)_M$ . Donc, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$ ,

$$\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^*f). \quad (24)$$

Enfin l'opération d'image inverse est compatible avec le produit extérieur des formes différentielles :

**Proposition 3.1** *Soit  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application régulière et soit  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  et  $\beta \in \Omega^q(\mathcal{M})$  (pour  $1 \leq p, q \leq m$ ). Alors*

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta). \quad (25)$$

**Preuve** — exercice. □

En fait les propriétés (23), (24) et (25) caractérisent complètement l'image inverse des formes différentielles, c'est à dire que l'on aurait pu adopter une autre définition de  $\alpha \mapsto \varphi^*\alpha$  qui serait

**Définition 3.2 (image inverse d'une  $p$ -forme, variante)** *Soit  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application régulière. Alors l'opérateur d'image inverse par  $\varphi$  l'unique opérateur linéaire*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \Omega^p(\mathcal{M}) \\ f & \longmapsto & \varphi^*f, \end{array}$$

qui satisfait les relations (23), (24) et (25).

Cete dernière définition repose sur une caractérisation algébrique :  $\varphi^*$  est le *morphisme* de  $(\Omega^*(\mathcal{N}), +, \wedge)$  vers  $(\Omega^*(\mathcal{M}), +, \wedge)$  (au sens où (25) est vérifié) dont l'action sur les fonctions et sur les différentielles de fonctions sont données respectivement par (23) et (24).

**Exercice 3.1** *Montrer l'équivalence des deux définitions. Pour cela, on utilisera que, étant donnée une carte locale  $y : \mathcal{N} \supset \mathcal{O} \rightarrow U$ , la restriction d'une  $p$ -forme  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$  sur  $\mathcal{O}$  peut s'écrire  $\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \alpha_{j_1 \dots j_p} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_p}$ , où  $\alpha_{j_1 \dots j_p} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ .*

### Comment calculer, en pratique, l'image inverse d'une $p$ -forme ?

Soit  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$  et  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application régulière. Nous pouvons appliquer une des deux définitions (3.1 ou 3.2) dont nous disposons pour définir l'image inverse  $\varphi^*\alpha$ . Utiliser la première revient à tester la valeur de  $\varphi^*\alpha$  en un point  $M \in \mathcal{M}$  et avec des vecteurs  $v_1, \dots, v_p \in T_M\mathcal{M}$ .

**Exercice 3.2** Montrer en utilisant la définition 3.1 que, si  $\alpha$  a l'expression :

$$\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \alpha_{j_1 \dots j_p} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_p}$$

dans une carte locale  $y = (y^1, \dots, y^n) : \mathcal{N} \supset \mathcal{O} \rightarrow U$ , alors  $\varphi^*\alpha$  a l'expression suivante dans  $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$  :

$$(\varphi^*\alpha)_M = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \alpha_{j_1 \dots j_p}(\varphi(M)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^{j_1}}{\partial x^{i_1}}(M) & \dots & \frac{\partial \varphi^{j_p}}{\partial x^{i_1}}(M) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{j_1}}{\partial x^{i_p}}(M) & \dots & \frac{\partial \varphi^{j_p}}{\partial x^{i_p}}(M) \end{vmatrix} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (26)$$

où l'on utilise une carte locale  $x = (x^1, \dots, x^m)$  sur  $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$  et l'on note  $\varphi^j := y^j \circ \varphi$ . Il est important dans ce calcul d'utiliser la multi-linéarité et la l'alternance de  $\alpha$  (indication : commencer par  $p = 1$ , puis  $p = 2$ ).

La deuxième définition (3.2) permet de faire le même calcul sans avoir besoin de tester la valeur de  $\varphi^*\alpha$  avec des vecteurs  $v_1, \dots, v_p \in T_M\mathcal{M}$ , mais en utilisant (23), (24) et (25). En pratique, cela donne des calculs plus courts : en utilisant d'abord (25) et (23), on a

$$\varphi^*\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} (\alpha_{j_1 \dots j_p} \circ \varphi) (\varphi^* dy^{j_1}) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dy^{j_p}),$$

puis, en utilisant (24), qui entraîne notamment  $\varphi^* dy^j = d(\varphi^* y^j) = d(y^j \circ \varphi) = d\varphi^j$ , on obtient

$$\varphi^*\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} (\alpha_{j_1 \dots j_p} \circ \varphi) d\varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{j_p}.$$

Il ne reste plus alors qu'à développer  $d\varphi^j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} dx^i$  et utiliser le fait que le produit extérieur est alterné pour retrouver (26).

## 3.2 Restriction d'une forme différentielle à une sous-variété

Considérons une variété  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathcal{M}$ . Grâce à l'application d'inclusion  $\iota_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$  introduite au §2.2.2 nous pouvons étendre l'opération de restriction

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}) \\ f &\longmapsto f|_{\mathcal{S}} = f \circ \iota_{\mathcal{S}} \end{aligned}$$

en une application  $\Omega^\bullet(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{S})$ .

**Définition 3.3** Soit  $\mathcal{M}$  une variété et  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathcal{M}$ . Soit  $\alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{M})$ , alors la restriction de  $\alpha$  à  $\mathcal{S}$  est  $\alpha|_{\mathcal{S}} := (\iota_{\mathcal{S}})^*\alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{S})$ .

Il sera utile dans la suite de disposer de plusieurs critères pour reconnaître quand la restriction d'une forme sur une sous-variété s'annule ou ne s'annule pas. C'est le but du résultat qui suit.

**Proposition 3.2** Soit  $\mathcal{M}$  une variété et  $\mathcal{S}$  une sous-variété de  $\mathcal{M}$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$  et soit  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes entre elles.

- (i)  $(\iota_{\mathcal{S}})^*\alpha = 0$  ;
- (ii)  $\forall M \in \mathcal{S}, \forall v_1, \dots, v_p \in T_M\mathcal{S}, \alpha_M(v_1, \dots, v_p) = 0$  ;
- (iii)  $\forall M \in \mathcal{S}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}_M$  de  $M$  dans  $\mathcal{S}$  et une carte locale  $x$  sur  $\mathcal{O}_M$  telle que  $(x^{-1})^*\alpha = 0$  ;
- (iv) pour toute application  $u$  à valeurs dans  $\mathcal{M}$  dont l'image est contenue dans  $\mathcal{S}$ ,  $u^*\alpha = 0$ .

*Démonstration* — L'équivalence entre (i) et (ii) est une conséquence immédiate de la définition de  $(\iota_{\mathcal{S}})^*\alpha$ , pourvu qu'on ait à l'esprit l'abus de notation  $T_M\mathcal{S} \simeq d(\iota_{\mathcal{S}})_M(T_M\mathcal{S})$ , qui conduit à l'identification :

$$\alpha_M(v_1, \dots, v_p) \simeq \alpha_{\iota_{\mathcal{S}}(M)}(d(\iota_{\mathcal{S}})_M(v_1), \dots, d(\iota_{\mathcal{S}})_M(v_p)) = ((\iota_{\mathcal{S}})^*\alpha)_M(v_1, \dots, v_p).$$

(i) entraîne (iii) simplement parce qu'il faut comprendre que (iii) signifie que  $(\iota_{\mathcal{S}} \circ x^{-1})^*\alpha = 0$  et parce que  $(\iota_{\mathcal{S}} \circ x^{-1})^*\alpha = (x^{-1})^*(\iota_{\mathcal{S}})^*\alpha$ . Pour la même raison (i) entraîne (iv) : en effet, si l'image de  $u$  est contenue dans  $\mathcal{S}$ , alors il existe  $v$  à valeurs dans  $\mathcal{S}$  tel que  $u = \iota_{\mathcal{S}} \circ v$  et  $u^*\alpha = v^*(\iota_{\mathcal{S}})^*\alpha$ .

(iii) entraîne (ii) car  $\alpha_M(v_1, \dots, v_p) = ((x^{-1})^*\alpha)_{x(M)}(dx_M(v_1), \dots, dx_M(v_p))$ .

Enfin (iv) implique (iii) puisqu'il suffit d'appliquer (iv) avec  $u = x^{-1}$ . □

### 3.3 Image directe d'un champ de vecteur

Nous donnons la définition de l'image directe d'un champ de vecteur sur une variété par un difféomorphisme. Au passage soulignons que, pour définir l'image directe d'un champ de vecteur, on doit impérativement utiliser un difféomorphisme<sup>4</sup>. En revanche, il est possible de définir l'image inverse d'une  $p$ -forme par n'importe quelle application, du moment qu'elle soit régulière (noter que, en particulier, nous n'avons même pas besoin que les dimensions de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  soient les mêmes pour l'image inverse d'une forme).

**Définition 3.4 (image directe d'un champ de vecteur)** Soit  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un difféomorphisme. Soit  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  un champ de vecteur. Alors l'image directe de  $X$  par  $\varphi$  est le champ de vecteur  $\varphi_*X \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$  défini par

$$\forall N \in \mathcal{N}, \quad (\varphi_*X)(N) := d\varphi_{\varphi^{-1}(N)}(X(\varphi^{-1}(N))),$$

---

4. ou, à défaut, un plongement, c'est à dire une application, mais alors l'image du champ de vecteur est défini uniquement sur l'image du plongement, c'est à dire sur une sous-variété.

ou encore

$$\forall M \in \mathcal{M}, \quad (\varphi_* X)(\varphi(M)) := d\varphi_M(X(M)).$$

Les opérations d'images directes pour les champs de vecteur et d'images inverses pour les formes sont liées, comme il apparaît dans le résultat suivant.

**Proposition 3.3** Soit  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un **difféomorphisme**, soit  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$  et soit  $X_1, \dots, X_p \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  des champs de vecteur. Alors

$$[\alpha(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_p)] \circ \varphi = (\varphi^* \alpha)(X_1, \dots, X_p). \quad (27)$$

*Démonstration* — Il suffit de calculer, pour tout point  $M \in \mathcal{M}$ , la valeur en  $M$  du terme de gauche :

$$\begin{aligned} [\alpha(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_p)] \circ \varphi(M) &= \alpha_{\varphi(M)}(\varphi_* X_1(\varphi(M)), \dots, \varphi_* X_p(\varphi(M))) \\ &= \alpha_{\varphi(M)}(d\varphi_M(X_1(M)), \dots, d\varphi_M(X_p(M))) \\ &= (\varphi^* \alpha)_M(X_1(M), \dots, X_p(M)). \end{aligned}$$

□

En notant  $\beta(Y_1, \dots, Y_p) = \langle \beta, Y_1 \wedge \dots \wedge Y_p \rangle$  (façon de voir la valeur de ce nombre comme le produit de dualité entre un élément  $\beta \in \Lambda^p V^*$  et un multivecteur  $Y_1 \wedge \dots \wedge Y_p \in \Lambda^p V$ ), la relation (27) se lit  $\langle \varphi^* \alpha, X_1 \wedge \dots \wedge X_p \rangle = \langle \alpha, \varphi_* X_1 \wedge \dots \wedge \varphi_* X_p \rangle \circ \varphi$ . Autrement dit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & & \\ \downarrow \varphi & \searrow \langle \varphi^* \alpha, X_1 \wedge \dots \wedge X_p \rangle & \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{\langle \alpha, \varphi_* X_1 \wedge \dots \wedge \varphi_* X_p \rangle} & \mathbb{R} \end{array}$$

### 3.4 La différentielle extérieure

Nous avons vu précédemment que, à toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) = \Omega^0(\mathcal{M})$ , on peut associer la 1-forme  $df \in \Omega^1(\mathcal{M})$  dont la valeur en chaque point  $M$  est  $df_M$ , la différentielle de  $f$  en  $M$ . Nous allons à présent étendre l'application

$$\begin{array}{ccc} d : \Omega^0(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \Omega^1(\mathcal{M}) \\ f & \longmapsto & df \end{array}$$

en une application  $d : \Omega^*(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^*(\mathcal{M})$  appelée *différentielle extérieure*, qui applique  $\Omega^p(\mathcal{M})$  sur  $\Omega^{p+1}(\mathcal{M})$ .

#### 3.4.1 La différentielle extérieure sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$

Commençons par expliquer comment on construit cette application sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in \Omega^p(U)$ , alors, si

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_I \alpha_I dx^I,$$

sa différentielle extérieure est la  $(p+1)$ -forme  $d\alpha \in \Omega^{p+1}(U)$  définie par

$$d\alpha := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} d\alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I, \quad (28)$$

où  $d\alpha_{i_1 \dots i_p} = d\alpha_I$  est simplement la différentielle de la fonction  $\alpha_I$ .

Peut-on étendre cette définition sur les variétés ? et si oui, comment ? Nous verrons plus loin que la réponse est positive : le point capital pour cela est de vérifier que cette définition est invariante par difféomorphisme, c'est à dire de montrer que : pour tout difféomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$  entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^m$  et pour toute  $p$ -forme  $\alpha \in \Omega^p(V)$ , si on calcule  $d\alpha$  et  $d(\varphi^*\alpha)$  en appliquant la relation (28) à  $\alpha$  et  $\varphi^*\alpha$ , alors on a bien  $\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha)$ . Il se trouve que cela est vrai et est même la conséquence d'un résultat plus général, à savoir : la propriété  $\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha)$  sera valable pour *n'importe quelle application différentiable*  $\varphi$ , sans qu'il soit nécessaire qu'elle soit un difféomorphisme.

En attendant voyons quelques propriétés fondamentales vérifiées par la différentielle extérieure, toujours sur un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ .

**Proposition 3.4 (règle de Leibniz graduée)** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $\alpha \in \Omega^p(U)$  et  $\beta \in \Omega^q(U)$ , alors*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \quad (29)$$

*Preuve* — Ecrivons

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_I \alpha_I dx^I$$

et

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq m} \beta_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \sum_J \beta_J dx^J.$$

Alors  $\alpha \wedge \beta = \sum_I \sum_J \alpha_I \beta_J dx^I \wedge dx^J$ , ce qui entraîne

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \sum_I \sum_J d(\alpha_I \beta_J) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_I \sum_J ((d\alpha_I) \beta_J \wedge dx^I \wedge dx^J) + (\alpha_I d\beta_J \wedge dx^I \wedge dx^J) \\ &= \left( \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I \right) \wedge \left( \sum_J \beta_J dx^J \right) + \left( \sum_I \alpha_I dx^I \right) \wedge \left( \sum_J (-1)^p d\beta_J \wedge dx^J \right) \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \quad \square \end{aligned}$$

**Théorème 3.1** ( $dd = 0$ ) *Pour tout  $\alpha \in \Omega^*(U)$ , on a :*

$$d(d\alpha) = 0. \quad (30)$$

*Preuve* — Nous commençons par montrer (30) pour une 0-forme, c'est à dire pour une fonction : nous allons voir ce résultat est essentiellement le lemme de Schwarz sur les dérivées secondes. Soit  $f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ . Alors

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum_{i_2=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^{i_2}} dx^{i_2}$$

et donc, en appliquant (28) :

$$d(df) = \sum_{i_2=1}^m d\left(\frac{\partial f}{\partial x^{i_2}}\right) \wedge dx^{i_2} = \sum_{i_2=1}^m \left(\sum_{i_1=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} dx^{i_1}\right) \wedge dx^{i_2} = \sum_{i_1, i_2=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}.$$

Mais comme d'une part,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i_2} \partial x^{i_1}}$  et, d'autre part,  $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} = -dx^{i_2} \wedge dx^{i_1}$ , nous en déduisons que  $d(df) = 0$ .

Nous en déduisons à présent le résultat pour une forme de degré  $p$  quelconque. Soit  $\alpha \in \Omega^p(U)$ , alors on peut écrire  $\alpha = \sum_I \alpha_I dx^I$ , ce qui entraîne en utilisant (28)  $d\alpha = \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I$ , qui implique à son tour, en utilisant (29) :

$$d(d\alpha) = \sum_I d(d\alpha_I) \wedge dx^I - d\alpha_I \wedge d(dx^I).$$

Mais comme  $d(d\alpha_I) = 0$ , puisque  $\alpha_I$  est une fonction et  $d(dx^I) = d(1dx^I) = d(1) \wedge dx^I = 0$ , en vertu de (28), on en conclut que  $d(d\alpha) = 0$ .  $\square$

### 3.4.2 Compatibilité entre la différentielle extérieure et l'image inverse

Nous pouvons maintenant démontrer<sup>5</sup> le résultat suivant :

**Théorème 3.2** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ ,  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\varphi : U \rightarrow V$  une application régulière. Alors, pour toute  $p$ -forme  $\alpha \in \Omega^p(V)$ , on a*

$$d(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d\alpha). \quad (31)$$

*Preuve* — Nous procédons en plusieurs étapes élémentaires :

- (i) pour une 0-forme  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  : c'est tout simplement l'identité (24) déjà montrée au § précédent.
- (ii) pour une 1-forme qui est la différentielle  $df$  d'une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ . Il s'agit d'une conséquence de

$$d(\varphi^*(df)) = 0 = \varphi^*(d(df)). \quad (32)$$

En effet, grâce à (24), c'est à dire  $\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$ , on peut réécrire le terme de gauche  $d(\varphi^*(df)) = d(d(\varphi^* f))$ . Les deux termes dans (32) sont donc nuls à cause de (30).

---

5. En réalité il est possible de montrer le théorème 3.2 directement, mais au prix de calculs assez lourds et compliqués. En revanche nous allons voir que, une fois que l'on a établi (29) et (30), cela devient beaucoup plus simple, grâce aussi à (23), (24) et (25).

- (iii) Soit  $y = (y^1, \dots, y^n)$  les coordonnées sur  $\mathbb{R}^n \supset V$ . L'identité (32) est vraie en particulier pour  $f = y^j$  ( $1 \leq j \leq n$ ), i.e.  $d(\varphi^* dy^j) = 0$ . Donc, en utilisant (25) et (29), on en déduit que

$$\begin{aligned} d(\varphi^*(dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_p})) &= d((\varphi^* dy^{j_1}) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dy^{j_p})) \\ &= \sum_{a=1}^p (-1)^{a-1} (\varphi^* dy^{j_1}) \wedge \dots \wedge d(\varphi^* dy^{j_a}) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dy^{j_p}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- (iv) Nous pouvons enfin montrer (31) pour une forme  $\alpha \in \Omega^p(V)$  quelconque. Nous partons de la décomposition  $\alpha = \sum_J \alpha_J dy^J$ , où, pour  $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$ ,  $J = (j_1, \dots, j_p)$  et  $dy^J = dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_p}$ . Alors, en vertu de (25),

$$\varphi^* \alpha = \varphi^* \left( \sum_J \alpha_J dy^J \right) = \sum_J (\alpha_J \circ \varphi) \varphi^* dy^J$$

et donc, en utilisant (29), puis les étapes (i) et (iii),

$$\begin{aligned} d(\varphi^*(d\alpha)) &= \sum_J d(\alpha_J \circ \varphi) \wedge \varphi^* dy^J + (\alpha_J \circ \varphi) d(\varphi^* dy^J) \\ &= \sum_J \varphi^*(d\alpha_J) \wedge \varphi^* dy^J = \varphi^*(d\alpha). \quad \square \end{aligned}$$

### 3.4.3 La différentielle extérieure sur une variété

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition de la différentielle extérieure sur une variété.

**Définition 3.5 (différentielle extérieure)** *Soit  $\mathcal{M}$  une variété, la différentielle extérieure est l'opérateur  $d : \Omega^*(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^*(\mathcal{M})$  tel que, pour toute  $p$ -forme  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  et pour toute carte locale  $x : \mathcal{O} \rightarrow U$ , si on a  $\alpha = \sum_I \alpha_I dx^I$  sur  $\mathcal{O}$ , alors*

$$d\alpha = \sum_I d\alpha_I \wedge dx^I \quad \text{sur } \mathcal{O}. \quad (33)$$

En effet, en appliquant le théorème 3.2 aux fonctions de recollement entre deux cartes d'un atlas sur  $\mathcal{M}$ , on vérifie aisément que cette définition est cohérente.

Enfin notons que la définition (33) peut se retrouver en utilisant que la différentielle extérieure coïncide avec la différentielle des fonctions, que, pour toute fonction  $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$ ,  $d(df) = 0$  et enfin la règle de Leibniz graduée (29). D'où une autre définition, plus intrinsèque.

**Définition 3.6 (différentielle extérieure (variante))** *Soit  $\mathcal{M}$  une variété, il existe une unique opérateur linéaire  $d : \Omega^*(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^*(\mathcal{M})$ , appelé différentielle extérieure, qui envoie  $\Omega^p(\mathcal{M})$  sur  $\Omega^{p+1}(\mathcal{M})$  et qui satisfait les conditions suivantes :*

- (i) pour toute fonction  $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$ ,  $df$  est la différentielle de  $f$  ;
- (ii) pour toute fonction  $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$ ,  $d(df) = 0$  ;
- (iii)  $\forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M}), \forall \beta \in \Omega^q(\mathcal{M}), d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ .



Alors toutes les propriétés satisfaites par la différentielle extérieure sur un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  s'étendent sans difficultés à une variété.

**Théorème 3.3** *Sur une variété  $\mathcal{M}$ , la différentielle extérieure satisfait les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M}), \quad d(d\alpha) &= 0, \\ \forall \varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}, \forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{N}), \quad d(\varphi^* \alpha) &= \varphi^*(d\alpha). \end{aligned}$$

Pour terminer, un peu de terminologie :

**Définition 3.7** *Une forme  $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{M})$  est dite **fermée** si  $d\alpha = 0$ . Une forme  $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{M})$  est dite **exacte** si il existe une forme  $\beta \in \Omega^*(\mathcal{M})$  telle que  $\alpha = d\beta$ .*

Le théorème 3.1 (et sa généralisation sur les variétés formulée au théorème 3.3) peut donc se reformuler ainsi : **toute forme extérieure exacte est fermée**. On peut se demander si la réciproque est vraie : elle l'est localement (il s'agit du lemme de Poincaré, voir Section 3.7), mais non globalement en général.

### 3.4.4 Exemples et exercices

**Exercice 3.3** *Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et orienté de dimension  $m = 3$  et un  $U$  un ouvert de  $E$ . On associe à tout  $\alpha \in \Lambda^1 E^*$  un unique vecteur  $V$  tel que  $\forall \xi \in E, \alpha(\xi) = \langle V, \xi \rangle$ ; à tout  $\alpha \in \Lambda^2 E^*$ , un unique vecteur  $W$  tel que  $\forall \xi, \eta \in E, \alpha(\xi, \eta) = \det(W, \xi, \eta)$ ; enfin à tout  $\alpha \in \Lambda^3 E^*$ , un unique scalaire  $\lambda$  tel que  $\forall \xi, \eta, \zeta \in E, \alpha(\xi, \eta, \zeta) = \lambda \det(\xi, \eta, \zeta)$ . Montrer qu'alors on peut identifier*

- (i)  $d : \Omega^0(U) \longrightarrow \Omega^1(U)$  avec l'opérateur gradient d'une fonction scalaire
- (ii)  $d : \Omega^1(U) \longrightarrow \Omega^2(U)$  avec l'opérateur rotationnel d'un champ de vecteurs
- (iii)  $d : \Omega^2(U) \longrightarrow \Omega^3(U)$  avec l'opérateur divergence d'un champ de vecteurs.

**Exercice 3.4** *Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et orienté de dimension  $m = 3$  et un  $U$  un ouvert de  $E$ . Montrer que, pour toute fonction  $f \in C^\infty(U)$  et pour tout champ de vecteur  $V \in \mathcal{X}(U)$ ,*

$$\vec{\text{rot}}(\nabla f) = 0 \text{ et } \text{div}(\vec{\text{rot}}V) = 0.$$

### 3.4.5 Les équations de Maxwell

Ces équations gouvernent le comportement des champs électrique et magnétique, en présence de charges électriques distribuées dans l'espace, en fonction du temps. Soit  $\vec{E}$  le champ électrique et  $\vec{B}$  le champ magnétique. A première vue,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ressemblent à des champs de vecteurs (à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ ) définis sur l'espace-temps  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , qui sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \end{array} \right.$$

où  $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est la densité de charge électrique par unité de volume,  $\vec{j} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est le vecteur densité de courant électrique et  $c$  est la vitesse de la lumière.

En fait il est plus naturel de considérer  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  comme les composantes d'une paire de 2-formes sur l'espace-temps  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , tandis que  $\vec{j}$  et  $\rho$  sont les composantes d'une 3-forme sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ . Les 2-formes sont :

$$F := (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge c dt + (B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2),$$

et

$$\star F := -(B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3) \wedge c dt + (E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2).$$

La 3-forme est :

$$J := \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - (j_1 dx^2 \wedge dx^3 + j_2 dx^3 \wedge dx^1 + j_3 dx^1 \wedge dx^2) \wedge dt.$$

**Exercice 3.5** (i) Vérifier que le premier système des équations de Maxwell est équivalent à la relation  $dF = 0$  et que le second système est équivalent à  $d(\star F) = 4\pi J$ .

(ii) Appliquer le lemme de Poincaré (théorème 3.10) et en déduire qu'il existe une 1-forme  $A$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , telle que  $F = dA$ . Faites appel à vos souvenirs des physique et interprétez.

(iii) Appliquer le théorème 3.1 et trouver une équation que doivent satisfaire  $\rho$  et  $\vec{j}$ . Interpréter.

Ecrire les équations de Maxwell sous la forme  $dF = 0$  et  $d(\star F) = 4\pi J$  est non seulement plus concis, mais en plus, cela permet de calculer comment l'expression des coordonnées du champ électromagnétique change lorsque l'on passe d'un référentiel inertiel à un autre (par exemple les composantes de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ne changent pas de la même façon que celles du vecteur vitesse d'une particule, ce qui invalide définitivement l'idée naïve selon laquelle  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  devraient être des « vecteurs »). Les transformations des coordonnées de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont en fait obtenues en prenant l'image inverse de la 2-forme  $F$  par l'application de changement de coordonnées. L'identification de ces règles de transformation est importante : il y a plus d'un siècle, H.A. Lorentz et H. Poincaré ont déterminé — parmi tous les changements de coordonnées — ceux dans lesquels l'expression des équations de Maxwell n'est pas altérée<sup>6</sup>. La grande surprise a été de découvrir que les équations de Maxwell étaient invariantes sous l'action d'un groupe appelé maintenant *groupe de Poincaré* (extension du *groupe de Lorentz*), qui est différent du groupe d'invariance des équations de la mécanique de Newton (le *groupe de Galilée*). De cette contradiction (et aussi sur la base d'expériences sur la vitesse de la lumière) est née la théorie de la relativité restreinte, mécanique invariante sous l'action du groupe de Poincaré.

---

6. On peut dire ici que la forme des équations de Maxwell n'est pas altérée si et seulement si l'opérateur linéaire (dit de *Hodge*) qui permet de passer de  $F$  à  $\star F$  est toujours le même.

## 3.5 Le produit intérieur par un champ de vecteur

### 3.5.1 Définitions

Soit  $\mathcal{M}$  une variété différentielle,  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  un champ de vecteur et  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  une  $p$ -forme. L'opération que nous allons définir consiste à « contracter »  $\alpha$  et  $X$  en une  $(p-1)$ -forme : en tout point  $M \in \mathcal{M}$ , nous considérons l'application

$$(\iota_X \alpha)_M \text{ ou } (X \lrcorner \alpha)_M : \begin{array}{ccc} (T_M \mathcal{M})^{p-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{p-1}) & \longmapsto & \alpha_M(X(M), v_1, \dots, v_{p-1}) \end{array} \quad (34)$$

qui est clairement  $(p-1)$ -multilinéaire et alternée. Cette définition est juste une extension de celle, donnée en 1.4, du produit intérieur ponctuel.

**Définition 3.8 (produit intérieur)** *Pour toute  $p$ -forme  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  et pour tout champ de vecteur  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , on appelle produit intérieur de  $\alpha$  par  $X$  et on note  $X \lrcorner \alpha$  (ou parfois  $\iota_X \alpha$ ) la  $(p-1)$ -forme sur  $\mathcal{M}$  définie en chaque point  $M \in \mathcal{M}$  par (34).*

Une conséquence immédiate de (6) est que le produit intérieur satisfait la règle de Leibniz graduée :

**Proposition 3.5** *Soit  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  un champ de vecteur. Alors,  $\forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ ,  $\forall \beta \in \Omega^q(\mathcal{M})$ ,*

$$X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (X \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (X \lrcorner \beta). \quad (35)$$

Le résultat suivant indique comment se comporte le produit intérieur d'une forme différentielle lorsqu'on le tire en arrière par un difféomorphisme.

**Proposition 3.6** *Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux variétés différentielles et  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un difféomorphisme. Soit  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$  une  $p$ -forme et  $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$  un champ de vecteur. Alors*

$$\varphi^*(Y \lrcorner \alpha) = (\varphi^{-1} \lrcorner_* Y) \lrcorner \varphi^* \alpha. \quad (36)$$

*Démonstration* — D'après la Proposition 3.3, pour toute  $p$ -forme  $\alpha$  définie sur  $\mathcal{N}$ , pour tout difféomorphisme  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  et pour toute famille  $(X_1, \dots, X_p)$  de champs de vecteur sur  $\mathcal{M}$ , nous avons :

$$\alpha(\varphi_* X_1, \varphi_* X_2, \dots, \varphi_* X_p) \circ \varphi = (\varphi^* \alpha)(X_1, X_2, \dots, X_p). \quad (37)$$

Posant  $X_1 := \varphi^{-1} \lrcorner_* Y$ , ce qui revient à  $\varphi_* X_1 = Y$ , cela se traduit par

$$(Y \lrcorner \alpha)(\varphi_* X_2, \dots, \varphi_* X_p) \circ \varphi = ((\varphi^{-1} \lrcorner_* Y) \lrcorner \varphi^* \alpha)(X_2, \dots, X_p),$$

ce qui nous donne le résultat en appliquant (37) à  $Y \lrcorner \alpha$ . □

### 3.5.2 Le flot d'un champ de vecteur et la dérivée de Lie

Les champs de vecteurs sont la traduction géométrique de systèmes dynamiques que l'on rencontre partout dans la physique et les sciences appliquées. L'évolution au cours du temps de ces systèmes est décrite par le flot du champ de vecteur. Nous rappelons ici l'essentiel de ce qu'il faut savoir là-dessus. Les détails et des preuves sont donnés dans la section 8.2 en fin de ce chapitre.

Un champ de vecteur  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  est naturellement associé à un problème dynamique, c'est à dire à l'équation d'évolution

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)), \quad (38)$$

où  $\gamma$  est une application régulière d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{M}$ . L'ensemble des solutions de (38) est décrit par le couple  $(\Delta_X, e^X)$ , où  $\Delta_X \subset \mathbb{R} \times \mathcal{M}$  et

$$e^X : \begin{array}{ccc} \Delta_X & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ (t, M) & \longmapsto & e^{tX}(M), \end{array}$$

est caractérisée par : la « condition initiale »

$$e^{tX}(M)|_{t=0} = M$$

et l'équation d'évolution

$$\frac{\partial e^{tX}(M)}{\partial t} = X(e^{tX}(M)).$$

L'ensemble de vie  $\Delta_X$  est défini comme étant le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$  sur lequel on puisse définir  $e^X$ . C'est un ouvert qui contient toujours un voisinage de  $\{0\} \times \mathcal{M}$  (une façon de formuler le théorème d'existence locale de solutions à (38)). Dans le cas où  $\Delta_X = \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ , c'est à dire si les solutions de (38) existent pour tout temps et pour toute condition initiale, on dit que le champ de vecteur  $X$  est **complet**.

Ainsi un champ de vecteur  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  permet de déformer des fonctions, des champs de vecteur et des  $p$ -formes différentielles : si  $(t, M) \in \Delta_X$ , on choisit de « rapatrier » au point  $M$  la « valeur » que la fonction ou le champ de vecteur ou la  $p$ -forme prend en  $e^{tX}(M)$ . Cela donne,

- pour une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  :  $f(e^{tX}(M))$  ;
- pour une  $p$ -forme  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  :  $((e^{tX})^* \alpha)_M$  (noter que, pour  $p = 0$  on retrouve la même chose que pour une fonction) ;
- pour un champ de vecteur  $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  :  $((e^{-tX})_* Y)_M$  (on a utilisé ici l'inverse  $e^{-tX}$  de  $e^{tX}$  et la définition 3.4).

Cela nous amène à définir la **dérivée de Lie** comme la dérivée de ces objets en  $t = 0$ .

**Définition 3.9 (dérivation de Lie)** Soit  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  un champ de vecteur sur une variété. Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ ,  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  ou  $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ . Nous définissons leur dérivée de Lie par rapport à  $X$  par

$$L_X f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f \circ e^{tX} - f], \quad (39)$$

$$L_X \alpha := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(e^{tX})^* \alpha - \alpha], \quad (40)$$

$$L_X Y := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(e^{-tX})_* Y - Y]. \quad (41)$$

Il existe des formules très utiles pour calculer chacune de ces dérivées. Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ , il est simple de montrer :

$$L_X f = df(X) = X \lrcorner df = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (\text{le signe } \sum_{i=1}^m \text{ est sous-entendu}).$$

Si  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ , nous verrons au théorème 3.6 une formule qui permet de calculer  $L_X \alpha$ . Enfin la dérivée de Lie d'un champ de vecteur par un autre est reliée à une autre notion, celle de crochet de Lie.

**Proposition 3.7** *Soit  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  deux champs de vecteur. Alors le commutateur des opérateurs  $L_X : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  et  $L_Y : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  est un opérateur du même type, autrement dit il existe un champ de vecteur, noté  $[X, Y]$  et appelé crochet de Lie de  $X$  et de  $Y$  tel que  $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ ,*

$$L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) = L_{[X, Y]} f. \quad (42)$$

Dans des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^m)$ , si  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  (le signe  $\sum_{i=1}^m$  est ici sous-entendu), alors

$$[X, Y] = \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

**Théorème 3.4** *Soit  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  deux champs de vecteur, alors leur crochet de Lie coïncide avec la dérivée de Lie de  $Y$  par rapport à  $X$  :*

$$[X, Y] = L_X Y. \quad (43)$$

Pour la preuve, voir le Théorème 8.4.

Un résultat fondamental à propos du crochet de Lie sur les champs de vecteur est le suivant.

**Théorème 3.5** *Soient  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  deux champs de vecteur sur une variété  $\mathcal{M}$ . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i)  $[X, Y] = 0$  ;

(ii) pour tout  $M \in \mathcal{M}$  et  $s, t \in \mathbb{R}$  tels que  $e^{tX}(e^{sY}(M))$  et  $e^{sY}(e^{tX}(M))$  existent, on a :

$$e^{tX}(e^{sY}(M)) = e^{sY}(e^{tX}(M)). \quad (44)$$

Autrement dit, en particulier, si  $[X, Y] = 0$ , alors les flots de  $X$  et de  $Y$  commutent et on peut noter

$$e^{tX+sY}(\mathcal{M}) := e^{tX}(e^{sY}(\mathcal{M})) = e^{sY}(e^{tX}(\mathcal{M}))$$

sans ambiguïté.

**Preuve** — Nous ne présentons que l'ébauche de la preuve. Des détails supplémentaires sont donnés au Théorème 8.6. Le fait que (ii) entraîne (i) est la partie la plus facile : cela s'obtient en calculant la dérivée par rapport à  $s$  de (44) en  $(t, s) = (t, 0)$ , puis en dérivant une deuxième fois par rapport à  $t$  en  $t = 0$ . La réciproque demande un peu plus de travail. Elle repose sur deux résultats :

- montrer que, si  $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  est difféomorphisme, alors, pour tout  $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$  et  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $e^{tX}(\mathcal{M})$  existe, alors  $e^{t\Psi_*X}(\Psi(\mathcal{M}))$  existe et on a :

$$\Psi(e^{tX}(\mathcal{M})) = e^{t\Psi_*X}(\Psi(\mathcal{M})). \quad (45)$$

Cela s'obtient en vérifiant que les deux membres de (45) sont solutions de la même équation différentielle  $\frac{d\gamma}{dt}(t) = (\Psi_*X)(\gamma(t))$ , avec la même condition initiale  $\gamma(0) = \Psi(\mathcal{M})$ .

- puis montrer que, si  $[X, Y] = 0$ , alors

$$(e^{tY})_*X = X, \quad (46)$$

qui s'obtient en vérifiant que, si  $[X, Y] = 0$ ,  $(e^{tY})_*X$  ne dépend pas de  $t$ . En appliquant (45) avec  $\Psi = e^{sY}$ , on trouve alors :

$$e^{sY}(e^{tX}(\mathcal{M})) = e^{t(e^{sY})_*X}(e^{sY}(\mathcal{M})).$$

Mais comme, à cause de (46),  $[X, Y] = 0$  entraîne  $(e^{sY})_*X = X$ , on en déduit (44).  $\square$

### 3.5.3 Autres propriétés de la dérivée de Lie

La dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteur satisfait toutes les formes de règle de Leibniz.

**Proposition 3.8 (règles de Leibniz)** *Soit  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  un champ de vecteur. Alors*

$$\text{si } f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}), \quad L_X(fg) = (L_Xf)g + fL_Xg; \quad (47)$$

$$\text{si } \alpha, \beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{M}), \quad L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta; \quad (48)$$

$$\text{si } \alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{M}) \text{ et si } Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), \quad L_X(Y \lrcorner \alpha) = (L_XY) \lrcorner \alpha + Y \lrcorner L_X\alpha; \quad (49)$$

$$\text{si } Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), \quad L_X[Y, Z] = [L_XY, Z] + [Y, L_XZ]. \quad (50)$$

*Démonstration* — Ces propriétés se démontrent de la même façon. Nous montrons d'abord (48) ((47) en étant une conséquence). Il suffit d'écrire

$$(e^{tX})^*(\alpha \wedge \beta) - \alpha \wedge \beta = ((e^{tX})^*\alpha - \alpha) \wedge (e^{tX})^*\beta + \alpha \wedge ((e^{tX})^*\beta - \beta)$$

pour en déduire

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{tX})^*(\alpha \wedge \beta) - \alpha \wedge \beta}{t} = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta.$$

La preuve de (49) est similaire en partant de l'identité suivante, conséquence de (36) :

$$(e^{tX})^*(Y \lrcorner \alpha) = ((e^{-tX})_*Y - Y) \lrcorner (e^{tX})^*\alpha + Y \lrcorner ((e^{tX})^*\alpha - \alpha).$$

Pour montrer (50), nous commençons par établir le résultat suivant : pour toute paire de champ de vecteur  $Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  et pour tout difféomorphisme  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ,

$$[\Phi_*Y, \Phi_*Z] = \Phi_*[Y, Z]. \quad (51)$$

Pour cela, soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  et  $m \in \mathcal{M}$ , alors, en utilisant (45)

$$\begin{aligned} (L_{\Phi_*Y}f)(\Phi(m)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ e^{t\Phi_*Y})(\Phi(m)) - f(\Phi(m))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \Phi)(e^{tY})(m) - (f \circ \Phi)(m)}{t} = L_X(f \circ \Phi)(m). \end{aligned}$$

Donc

$$(L_{\Phi_*Y}f) \circ \Phi = L_Y(f \circ \Phi). \quad (52)$$

En utilisant deux fois cette dernière identité nous avons alors

$$[L_{\Phi_*Y}(L_{\Phi_*Z}f)] \circ \Phi = L_Y[(L_{\Phi_*Z}f) \circ \Phi] = L_Y[L_Z(f \circ \Phi)].$$

Nous en déduisons, en utilisant une troisième fois (52)

$$([L_{\Phi_*Y}, L_{\Phi_*Z}]f) \circ \Phi = L_{[Y, Z]}(f \circ \Phi) = (L_{\Phi_*[Y, Z]}f) \circ \Phi.$$

Donc  $[L_{\Phi_*Y}, L_{\Phi_*Z}] = L_{\Phi_*[Y, Z]}$ , si bien que nous obtenons (51). Appliquant cette identité avec  $\Phi = e^{-sX}$ , nous avons  $(e^{-sX})_*[Y, Z] = [(e^{-sX})_*Y, (e^{-sX})_*Z]$ . Nous en déduisons en dérivant par rapport à  $s$  en  $s = 0$  que  $L_X[Y, Z] = [L_XY, Z] + [Y, L_XZ]$ , en suivant la même méthode que précédemment.  $\square$

Remarquons qu'à cause de (43) et puisque le crochet de Lie est antisymétrique, la dernière identité (50) peut également s'écrire

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad (53)$$

qui est l'*identité de Jacobi* pour les champs de vecteur.

Une autre propriété est que la dérivée de Lie commute avec la différentielle extérieure.

**Proposition 3.9** Soit  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  et soit  $\alpha \in \Omega^\bullet(\mathcal{M})$ , alors

$$L_X(d\alpha) = d(L_X\alpha). \quad (54)$$

*Démonstration* — Cela provient de :  $(e^{tX})^* d\alpha = d(e^{tX})^* \alpha$ , identité qui est elle-même une conséquence de (31). On obtient ainsi (en observant que  $[(e^{tX})^* \alpha - \alpha] / t$  converge vers  $L_X\alpha$  uniformément dans  $\mathcal{C}^1(\mathcal{K})$ , pour tout compact  $K \subset \mathcal{M}$ ) :

$$d(L_X\alpha) = d\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{tX})^* \alpha - \alpha}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{tX})^* d\alpha - d\alpha}{t} = L_X d\alpha.$$

□

### 3.5.4 Les belles formules de Cartan

Et voici, pour terminer, deux magnifiques et fort utiles formules dues à Elie Cartan :

**Théorème 3.6 (formule magique de Cartan)** Soit  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  un champ de vecteur et  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  une  $p$ -forme. Alors

$$L_X\alpha = X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha), \quad (55)$$

autrement dit, sur  $\Omega^*(\mathcal{M})$ , on a l'identité  $L_X = (X \lrcorner) \circ d + d \circ (X \lrcorner)$ .

**Démonstration** — Notons provisoirement  $D_X := (X \lrcorner) \circ d + d \circ (X \lrcorner)$ . Nous allons montrer que  $D_X = L_X$ . Pour cela, il suffit de montrer que :

- (i)  $D_X$  et  $L_X$  satisfont tous les deux la règle de Leibniz ;
- (ii) l'action de  $D_X$  sur les fonctions et sur les différentielles de fonction coïncide avec celle de  $L_X$ .

Alors puisque toute forme peut s'écrire comme une combinaison linéaire de produits extérieurs de fonctions et de différentielles de fonctions, le résultat s'en suivra. Nous avons déjà vérifié (i) pour  $L_X$  à la Proposition 3.8, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que  $D_X$  vérifie également

$$\forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M}), \forall \beta \in \Omega^q(\mathcal{M}), \quad D_X(\alpha \wedge \beta) = (D_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (D_X\beta).$$

en utilisant (29) et (35).

Vérifions (ii). Soit  $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$ . Alors

$$D_x f = X \lrcorner df + d(X \lrcorner f) = df(X) + 0 = L_X f.$$

D'autre part,

$$D_X(df) = X \lrcorner d(df) + d(X \lrcorner df) = 0 + dL_X f = L_X df,$$

en vertu de (54). □



**Théorème 3.7 (formule de Cartan)** Soit  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  deux champs de vecteur et  $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$  une 1-forme. Alors on a :

$$d\alpha(X, Y) = L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \quad (56)$$

**Démonstration** — Plusieurs démonstrations sont possibles. La première consiste à tout écrire dans un système de coordonnées. Nous encourageons le lecteur à le faire, ce n'est pas si méchant. La deuxième méthode revient plus ou moins au même : nous montrons le résultat pour une 1-forme  $\alpha$  de la forme  $fdg$ , où  $f, g \in \Omega^0(\mathcal{M})$ . Nous partons de :

$$\begin{aligned} L_X(fdg(Y)) &= df(X) dg(Y) + fL_X(L_Yg) \\ L_Y(fdg(X)) &= df(Y) dg(X) + fL_Y(L_Xg) \end{aligned}$$

Par soustraction, nous obtenons  $L_X(fdg(Y)) - L_Y(fdg(X)) = (df \wedge dg)(X, Y) + fL_{[X, Y]}g = d(fdg)(X, Y) + fdg([X, Y])$ , qui est (56) pour  $\alpha = fdg$ . Le cas général se déduit par linéarité.

Une troisième méthode consiste à partir de la règle de Leibniz (49) et à utiliser la formule magique (55) :

$$\begin{aligned} L_X(\alpha(Y)) = L_X(Y \lrcorner \alpha) &= (L_XY) \lrcorner \alpha + Y \lrcorner L_X\alpha \\ &= \alpha(L_XY) + Y \lrcorner [X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha)] \\ &= \alpha([X, Y]) + d\alpha(X, Y) + L_Y(\alpha(Y)), \end{aligned}$$

et nous retrouvons ainsi (56). □

## 3.6 Intégrale d'une forme différentielle

### 3.6.1 Compléments préliminaires sur les variétés : l'orientation et le bord

**Définition 3.10** Une variété  $\mathcal{M}$  est **orientée** si on peut choisir un système de cartes dans lequel toutes les fonctions de recollement  $\varphi_{ij}$  ont un jacobien positif.

Noter que cette définition est équivalente à définir une orientation de chaque espace tangent  $T_M\mathcal{M}$  qui dépend continûment de  $M$  : celle telle que, pour chaque carte locale  $x : \mathcal{O} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  et pour tout point  $M \in \mathcal{M}$ ,  $dx_M : T_M \rightarrow \mathbb{R}^m$  est un isomorphisme qui préserve l'orientation.

Pour la suite, nous avons besoin aussi d'étendre la définition 2.1 d'une variété différentielle au cas des variétés *avec bord*. Pour cela notons :

$$\mathbb{R}_-^m := \{t = (t^1, \dots, t^m) \in \mathbb{R}^m \mid t^1 \leq 0\} = ]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}.$$

**Définition 3.11 (Variété différentielle avec bord)** Une variété différentielle à bord  $\mathcal{M}$  de dimension  $m$  est un espace topologique équipé d'un **atlas**, c'est à dire un système de **cartes locales**  $x_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}_-^m$ , où  $i \in I$  et

— chaque  $\mathcal{O}_i$  est un ouvert de  $\mathcal{M}$  et la réunion  $\cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  est égale à  $\mathcal{M}$  ;

- chaque  $\mathcal{O}_i$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_-^m$ , c'est à dire l'intersection d'un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  avec  $\mathbb{R}_-^m$  ;
- chaque application  $x_i$  est un homéomorphisme ;
- si  $\mathcal{O}_{ij} := \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$  est non vide, alors l'homéomorphisme  $\varphi_{ij} := x_j \circ (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})}$  est un difféomorphisme de  $x_i(\mathcal{O}_{ij})$  vers  $x_j(\mathcal{O}_{ij})$ .

On dit que la variété est de classe  $\mathcal{C}^k$  si les applications de recollement  $\varphi_{ij} : (x_i)^{-1}|_{x_i(\mathcal{O}_{ij})} \longrightarrow x_i(\mathcal{O}_{ij})$  sont toutes de classe  $\mathcal{C}^k$ .

La différence avec la définition 2.1 est que, pour certaines valeurs de  $i \in I$ ,  $x_i(\mathcal{O}_i)$  peut rencontrer le bord  $\partial\mathbb{R}_-^m := \{(0, t^2, \dots, t^m) \mid (t^2, \dots, t^m) \in \mathbb{R}^{m-1}\} \simeq \mathbb{R}^{m-1}$ . On définit alors le **bord de la variété**  $\mathcal{M}$ , noté  $\partial\mathcal{M}$ , comme étant l'ensemble des points  $M$  tels que, pour toute carte  $x_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}_-^m$ , on ait  $x_i(M) \in \partial\mathbb{R}_-^m$ . Bien entendu, pour que cette définition ait un sens, il faut vérifier que cette propriété est indépendante de la carte utilisée<sup>7</sup>. On montre alors que  $\partial\mathcal{M}$  est également une variété différentielle, de dimension  $m - 1$ . Plus précisément, si nous notons  $x_i|_{\partial\mathcal{M}} : \partial\mathcal{M} \cap \mathcal{O}_i \longrightarrow \partial\mathbb{R}_-^m$  la restriction de  $x_i$  à  $\partial\mathcal{M} \cap \mathcal{O}_i$ ,  $(x_i|_{\partial\mathcal{M}})_{i \in I}$  est un atlas sur  $\partial\mathcal{M}$ .

Supposons que nous puissions **orienter** la variété  $\mathcal{M}$ . Alors son bord  $\partial\mathcal{M}$  est aussi naturellement muni d'une orientation, que l'on définit comme suit : d'abord nous orientons  $\partial\mathbb{R}_-^m$  en décidant que, pour tout  $t \in \partial\mathbb{R}_-^m$ ,  $(\epsilon_2, \dots, \epsilon_m)$  (où  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$  est la base canonique directe de  $\mathbb{R}^m$ ) est une base directe de  $T_t\partial\mathbb{R}_-^m \simeq \mathbb{R}^{m-1}$ . Puis, pour chaque point  $M \in \partial\mathcal{M}$ , l'espace tangent  $T_M\partial\mathcal{M}$  est muni de l'orientation induite par celle de  $\partial\mathbb{R}_-^m$  par une carte  $x|_{\partial\mathcal{M}} : \partial\mathcal{M} \cap \mathcal{O} \longrightarrow \partial\mathbb{R}_-^m$ . En d'autres termes,  $(\frac{\partial}{\partial x^2} \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m})$  est une base directe de  $T_M\partial\mathcal{M}$ .

### 3.6.2 Intégrale d'une forme différentielle

Les  $p$ -formes différentielles  $\alpha$  sur une variété  $\mathcal{M}$  sont, d'une certaine façon, duales des *sous-variétés orientées*  $\mathcal{S}$  de dimension  $p$  de  $\mathcal{M}$  (avec ou sans bord) : le produit de dualité en question sera noté  $\int_{\mathcal{S}} \alpha$  et sera appelé *intégrale de  $\alpha$  sur  $\mathcal{S}$* . On peut illustrer cette construction en considérant d'abord le cas où  $\mathcal{S}$  est un parallélépipède orienté plongé dans un espace affine  $E$ . Un tel parallélépipède peut être décrit par une application affine  $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$  :  $\mathcal{S}$  est alors l'image du cube  $[0, 1]^p$  par  $u$  et le sous-espace affine  $u(\mathbb{R}^p)$  qui le contient est orienté en postulant que  $du$  envoie une base directe de  $\mathbb{R}^p$  en une base directe. Si  $\alpha \in \Lambda^p E^*$ , on peut alors poser :

$$\int_{u([0,1]^p)} \alpha := \alpha(M_0\vec{M}_1, \dots, M_0\vec{M}_p) = (u^*\alpha)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p),$$

où, si on note  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ ,  $M_0 := u(0)$  et  $M_i := u(\epsilon_i)$ , pour  $1 \leq i \leq p$ . Autrement dit, nous mesurons le volume algébrique (c'est à dire avec un signe tenant compte de l'orientation) de  $u([0, 1]^p)$ . Nous pouvons aussi adapter cette définition à

7. Exercice : montrez-le! Indication : caractériser les points du bord comme étant les points  $M \in \mathcal{M}$  tels qu'il existe un voisinage  $\mathcal{O}$  de  $M$  et une fonction  $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$  qui atteint son minimum en  $M$ , mais telle que  $df_M \neq 0$ .

un simplexe de  $E$ , c'est à dire l'image par une application affine  $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$  du simplexe  $\Delta^p := \{t = (t^1, \dots, t^p) \in \mathbb{R}^p \mid 0 \leq t^1 < \dots < t^p \leq 1\}$  en posant

$$\int_{u(\Delta^p)} \alpha := \frac{1}{p!} (u^* \alpha)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p),$$

le facteur  $1/p!$  représentant le volume du simplexe  $\Delta^p$ . Pour une sous-variété  $\mathcal{S}$  d'une variété quelconque, nous pouvons imaginer que nous l'approchons par une surface polyédrale  $\mathcal{S}_A = \cup_{a \in A} \Delta_a^p$  constituée par la réunion de simplexes<sup>8</sup> orientés  $(\Delta_a^p)_{a \in A}$ , que l'on peut supposer aussi petits que l'on veut et définir

$$\int_{\mathcal{S}_A} \alpha := \sum_{a \in A} \int_{\Delta_a^p} \alpha_{M_a}, \quad (57)$$

où, pour tout  $a \in A$ ,  $M_a$  est le point origine du simplexe  $\Delta_a^p$ . Enfin, comme dans la définition de l'intégrale de Riemann, nous considérons une suite de sous-variétés polyédrales  $\mathcal{S}_A$  de plus en plus fines, qui approche  $\mathcal{S}$  et pourrions définir  $\int_{\mathcal{S}} \alpha$  comme étant la limite de l'intégrale (57). Une telle construction est envisageable (nous ne la décrivons pas ici) et fait déjà pressentir une propriété remarquable de cette notion d'intégrale : elle ne nécessite pas de se donner une mesure sur  $\mathcal{M}$  ou sur  $\mathcal{S}$  (on a juste besoin d'une structure différentiable et d'une orientation).

En fait, pour des raisons de commodité, on a plutôt l'habitude de construire l'intégrale d'une  $p$ -forme en utilisant la théorie de la mesure, bien que, répétons-le, la théorie de la mesure n'y joue pas un rôle essentiel. Pour cela, on peut commencer par définir l'intégrale d'une  $m$ -forme  $\alpha$  sur une *variété* orientée  $\mathcal{M}$  de dimension  $m$  (avec ou sans bord) en posant

$$\int_{\mathcal{M}} \alpha := \sum_{i \in I} \int_{\mathbb{R}_-^m} \psi_i^*(\chi_i \alpha),$$

où, étant donné un recouvrement de  $\mathcal{M}$  par des ouverts  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  sur lesquels sont définies des cartes locale  $x_i$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_-^m$ ,  $(\chi_i)_{i \in I}$  est une partition de l'unité (voir exercice 3.6 plus loin) sur  $\mathcal{M}$  associée au recouvrement  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  et, pour tout  $i \in I$ ,  $\psi_i : x_i(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i$  est l'inverse de  $x_i$ . Chaque forme  $\psi_i^*(\chi_i \alpha)$  est alors étendue sur  $\mathbb{R}_-^m$  par la valeur 0 en dehors de  $x_i(\mathcal{O}_i)$  et l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}_-^m} \psi_i^*(\chi_i \alpha)$  est, par définition,

$$\int_{\mathbb{R}_-^m} \psi_i^*(\chi_i \alpha) := \int_{\mathbb{R}_-^m} f_i(t) dt^1 \cdots dt^m, \quad (58)$$

où  $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_-^m)$  est la densité telle que  $\psi_i^*(\chi_i \alpha) = f_i dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^m$  et l'intégrale de droite dans (58) est une intégrale au sens de la théorie de la mesure (Riemann ou Lebesgue).

A nouveau le point capital dans cette démarche pour définir l'intégrale d'une forme est de vérifier que la définition (58) ne dépend pas du système de cartes, ni de la partition

---

8. Noter qu'il est en général impossible d'approcher une sous-variété par une réunion de parallélépipèdes. En revanche, cela est possible avec des simplexes.

de l'unité utilisée. Nous ne rentrerons pas dans ces détails ici. Mentionnons simplement que tout repose sur le fait la formule (26) qui permet d'exprimer l'image inverse d'une  $p$ -forme par une application est *presque* la même formule que celle du changement de variable dans une intégrale multiple. La différence essentielle est que, dans (26) interviennent des déterminants jacobiens avec leurs signe, alors que la formule de changement de variable ne fait intervenir que la valeur absolue du déterminant jacobien de la transformation.

L'intégrale que nous venons de définir satisfait le résultat suivant (qui à nouveau repose sur le fait que (26) est pratiquement la formule de changement de variable dans une intégrale) :

**Théorème 3.8** *Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux variétés différentielles orientées et de même dimension  $m$  (avec ou sans bord) et soit  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ . Soit  $\alpha \in \Omega^m(\mathcal{M})$ . Alors*

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi^* \alpha = \int_{\mathcal{N}} \alpha. \quad (59)$$

Cela nous permet d'étendre la définition de l'intégrale d'une  $p$ -forme au cas d'une **sous-variété orientée**  $\mathcal{S}$  de dimension  $p$ , plongée dans une variété  $\mathcal{N}$  de dimension quelconque. Pour cela soit  $j : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  l'application « inclusion » : cette application est un exemple d'application régulière entre deux variétés différentielles particulièrement simple (ça paraît même idiot), mais redoutablement efficace : nous en ferons un usage constant dans la suite. Nous définissons alors

$$\int_{\mathcal{S}} \alpha := \int_{\mathcal{S}} j^* \alpha. \quad (60)$$

Enfin énonçons le théorème de Stokes :

**Théorème 3.9** *Soit  $\mathcal{M}$  une variété à bord de dimension  $m$  et  $\alpha \in \Omega^{m-1}(\mathcal{M})$ . Alors*

$$\int_{\partial \mathcal{M}} \alpha = \int_{\mathcal{M}} d\alpha. \quad (61)$$

Une des choses spectaculaires dans ce théorème, c'est que, grâce à (59) il s'étend instantanément à une sous-variété  $\mathcal{S}$  de dimension  $p$  d'une variété  $\mathcal{N}$  : soit  $j : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  l'application inclusion et soit  $\alpha \in \Omega^{p-1}(\mathcal{N})$ . Alors

$$\int_{\mathcal{S}} d\alpha \stackrel{(60)}{=} \int_{\mathcal{S}} j^*(d\alpha) \stackrel{(31)}{=} \int_{\mathcal{S}} d(j^*\alpha) \stackrel{(61)}{=} \int_{\partial \mathcal{S}} (j^*\alpha) \stackrel{(60)}{=} \int_{\partial \mathcal{S}} \alpha.$$

**Exercice 3.6 (partition de l'unité)** *Soit  $\mathcal{M}$  une variété différentielle et  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  une collection finie d'ouverts de  $\mathcal{M}$  telle que  $\mathcal{M} \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ . Une **partition de l'unité sur  $\mathcal{M}$  subordonnée à  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$**  est une famille  $(\theta_i)_{i \in I}$  de fonctions dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$  (ensemble des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact sur  $\mathcal{M}$ ) telle que :*

- $\forall i \in I, \text{supp} \theta_i \subset \mathcal{O}_i$
- $\forall x \in \mathcal{M}, \sum_{i \in I} \theta_i(x) = 1.$

*Le but de cet exercice est de construire une partition de l'unité sur un compact de  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^m$ . On suppose qu'il existe une collection finie d'ouverts de  $\mathbb{R}^m$   $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  telle que  $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ .*

(i) Montrer qu'il existe des compacts  $K_i \subset \mathcal{O}_i$  et  $\rho > 0$  tels que

$$K \subset \bigcup_{i \in I} K_i \quad \text{et} \quad \text{dist}(K_i, \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{O}_i) = \rho.$$

(Indication : pour tout  $i \in I$  et pour tout  $x \in K \cap \mathcal{O}_i$  on pourra considérer  $r_{i,x} := \frac{1}{2} \text{dist}(x, \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{O}_i)$  et partir du fait que  $K \subset \bigcup_{i \in I, x \in K} B(x, r_{i,x})$ .)

(ii) On se donne une fonction  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$  telle que  $\text{supp}\chi \subset B(0, 1)$  et  $\int_{\mathbb{R}^m} \chi = 1$ . Pour tout  $t > 0$ , on pose  $\chi_t(x) = \frac{1}{t^m} \chi(\frac{x}{t})$ . Fabriquer des fonctions  $(\varphi_i)_{i \in I}$  dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$  telles que  $\text{supp}\varphi_i \subset \mathcal{O}_i$  et  $\varphi_i = 1$  sur  $K_i$ .

(iii) On pose  $\theta_i := \varphi_i \left( \sum_{j \in I} \varphi_j \right)^{-1}$ . Conclure que  $(\theta_i)_{i \in I}$  est une partition de l'unité sur  $K$  subordonnée à  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ , c'est à dire :  $\forall i \in I, \theta_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ ,  $\text{supp}\theta_i \subset \mathcal{O}_i$  et  $\forall x \in K, \sum_{i \in I} \theta_i(x) = 1$ .

(iv) question supplémentaire : comment étendre ce résultat à une variété compacte ?

### 3.7 La formule d'homotopie et le lemme de Poincaré

Nous montrons ici une réciproque partielle au théorème 3.1, à savoir que, **sur certaines variétés**, une forme fermée est exacte. Noter qu'en général, une forme fermée n'est pas exacte. Un exemple est, sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}^*$ , la 1-forme :

$$\alpha := \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \text{Im} \left( \frac{dz}{z} \right), \quad \text{où } z = x + iy.$$

On vérifie aisément que  $d\alpha = 0$  sur  $\mathbb{C}^*$ . En revanche, il n'existe pas de 0-forme  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^*)$  telle que  $df = \alpha$  sur  $\mathbb{C}^*$  et cela résulte de l'identité suivante : soit  $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathbb{C}^*)$  défini par  $\gamma(t) = e^{it}$ , alors

$$\int_{[0, 2\pi]} \gamma^* \alpha = \int_0^{2\pi} \text{Im} \frac{d(e^{it})}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} i dt = i2\pi. \quad (62)$$

Or s'il existait une fonction  $f$  telle que  $\alpha = df$ , on devrait aussi avoir :

$$\int_{[0, 2\pi]} \gamma^* \alpha = \int_{[0, 2\pi]} \gamma^*(df) = \int_{[0, 2\pi]} d(\gamma^* f) = \int_{\partial[0, 2\pi]} f \circ \gamma = (f \circ \gamma)(2\pi) - (f \circ \gamma)(0) = 0,$$

ce qui contredit (62).

En revanche, le résultat serait vrai pour une 1-forme sur  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  ou, plus généralement, sur  $\mathbb{R}^m$ , comme le montre l'exercice suivant.

**Exercice 3.7** Soit  $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^m)$  une 1-forme fermée, c'est à dire solution de  $d\alpha = 0$ . On note  $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i dx^i$ . Montrer que si on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad f(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^m \alpha_i(tx) x^i dt, \quad (63)$$

alors, on a  $\alpha = df$  sur  $\mathbb{R}^m$ .

En fait, dans notre premier exemple,  $\alpha$  est la partie imaginaire de  $dz/z$  et on sait bien en analyse complexe que  $dz/z$  n'est fermée que « localement », puisqu'il s'agit de la dérivée de la fonction logarithme sur  $\mathbb{C}^*$ , qui est multivaluée. Cela est dû au fait que  $\mathbb{C}^*$  n'est pas simplement connexe (le lacet  $\gamma$  ne peut pas être contracté en un point tout en restant dans  $\mathbb{C}^*$ ). Cela nous amène à la notion d'homotopie.

### 3.7.1 L'homotopie

**Définition 3.12 (homotopie différentielle)** Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux variétés et soit  $\varphi_0 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  et  $\varphi_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  deux applications régulières. On dit que  $\varphi_0$  est **régulièrement homotope** à  $\varphi_1$  s'il existe une application régulière :

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 1] \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{N} \\ (t, x) &\longmapsto \Phi(t, x), \end{aligned}$$

appelée **homotopie entre  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$** , telle que :

- (i)  $\forall x \in \mathcal{M}, \Phi(0, x) = \varphi_0(x)$  ;
- (ii)  $\forall x \in \mathcal{M}, \Phi(1, x) = \varphi_1(x)$ .

Noter que la relation « est régulièrement homotope à » est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence s'appellent les *classes d'homotopie*.

**Définition 3.13 (variété homotopiquement équivalente à un point)** Soit  $\mathcal{M}$  une variété différentielle. On dit que  $\mathcal{M}$  est **régulièrement homotopiquement équivalente à un point** s'il existe un point  $m_0 \in \mathcal{M}$  tel que les applications  $\text{Id} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  (application identité) et  $0 : \mathcal{M} \rightarrow \{m_0\}$  (application constante) soient régulièrement homotopes.

Nous remarquons que, si la variété  $\mathcal{M}$  est connexe (ce qui est le cas ici), le point  $m_0$  peut être échangé avec n'importe quel autre point car, alors, deux applications constantes à valeurs dans  $\mathcal{M}$  sont forcément homotopes. Le lemme de Poincaré peut s'énoncer ainsi :

**Théorème 3.10 (lemme de Poincaré)** Soit  $\mathcal{M}$  une variété homotopiquement équivalente à un point. Alors, toute forme différentielle sur  $\mathcal{M}$  qui est fermée est exacte. C'est à dire : pour toute forme  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ , si  $d\alpha = 0$ , alors il existe une forme  $\beta \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M})$  telle que  $\alpha = d\beta$ .

Dans ce qui suit, nous allons établir ce résultat comme conséquence d'un résultat plus général.

### 3.7.2 La formule d'homotopie

Nous commençons par le résultat suivant qui concerne une  $p$ -forme  $\omega$  définie sur le produit  $[0, 1] \times \mathcal{M}$  : il donne une expression pour la différence entre la restriction de  $\omega$  sur  $\{1\} \times \mathcal{M}$  et sa restriction sur  $\{0\} \times \mathcal{M}$ .

**Proposition 3.10** *Soit  $\mathcal{M}$  une variété et soit*

$$\begin{array}{ccc} j_0 : \mathcal{M} & \longrightarrow & [0, 1] \times \mathcal{M} \\ \mathbb{M} & \longmapsto & (0, \mathbb{M}) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} j_1 : \mathcal{M} & \longrightarrow & [0, 1] \times \mathcal{M} \\ \mathbb{M} & \longmapsto & (1, \mathbb{M}). \end{array}$$

*Alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq p \leq m$ , il existe un opérateur linéaire*

$$\begin{array}{ccc} I : \Omega^p([0, 1] \times \mathcal{M}) & \longrightarrow & \Omega^{p-1}(\mathcal{M}) \\ \omega & \longmapsto & I\omega \end{array}$$

*tel que, pour toute  $p$ -forme  $\omega \in \Omega^p([0, 1] \times \mathcal{M})$ , on ait*

$$j_1^* \omega - j_0^* \omega = d(I\omega) + I(d\omega).$$

**Preuve** — Notons, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \Phi_t : \mathbb{R} \times \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathcal{M} \\ (s, \mathbb{M}) & \longmapsto & (s + t, \mathbb{M}). \end{array}$$

Remarquons que  $\Phi_t$  est simplement l'expression du flot  $e^{t\partial_t}$  du champ de vecteur  $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$  à l'instant  $t$ . Nous avons alors<sup>9</sup> :

$$\begin{aligned} j_1^* \omega - j_0^* \omega &= (\Phi_1 \circ j_0)^* \omega - j_0^* \omega = j_0^* (\Phi_1^* \omega) - j_0^* \omega = \int_0^1 \frac{d}{dt} (j_0^* \Phi_t^* \omega) \, dt \\ &= j_0^* \int_0^1 L_{\partial_t} (\Phi_t^* \omega) \, dt = j_0^* \int_0^1 \Phi_t^* (L_{\partial_t} \omega) \, dt \\ &= j_0^* \int_0^1 \Phi_t^* (d(\partial_t \lrcorner \omega) + \partial_t \lrcorner (d\omega)) \, dt \\ &= j_0^* \int_0^1 d(\Phi_t^* (\partial_t \lrcorner \omega)) \, dt + j_0^* \int_0^1 \Phi_t^* (\partial_t \lrcorner (d\omega)) \, dt \\ &= d \left( j_0^* \int_0^1 \Phi_t^* (\partial_t \lrcorner \omega) \, dt \right) + j_0^* \int_0^1 \Phi_t^* (\partial_t \lrcorner (d\omega)) \, dt \\ &= d(I\omega) + I(d\omega), \end{aligned}$$

où, pour  $\alpha = \omega$  ou  $d\omega$ , on a posé :

$$I\alpha := j_0^* \int_0^1 \Phi_t^* (\partial_t \lrcorner \alpha) \, dt = j_0^* \int_0^1 \partial_t \lrcorner (\Phi_t^* \alpha) \, dt$$

(car  $\partial_t \lrcorner \Phi_t^* \alpha = \Phi_t^* (\partial_t \lrcorner \alpha)$ ). □

Peut-être avez-vous trouvé le style de cette démonstration un peu trop abstrait. Si c'est le cas, il est possible d'en donner une présentation un peu différente. En effet toute forme  $\alpha \in \Omega^p([0, 1] \times \mathcal{M})$  peut se décomposer sous la forme

$$\alpha = \alpha + dt \wedge \beta, \quad \text{où } \alpha \in \Omega^p([0, 1] \times \mathcal{M}), \beta \in \Omega^{p-1}([0, 1] \times \mathcal{M}) \text{ et } \partial_t \lrcorner \alpha = \partial_t \lrcorner \beta = 0.$$

---

9. en notant  $dt$  la mesure de Lebesgue (ou de Riemann) dans toutes les intégrales, au lieu de la notation habituelle  $dt$ , pour la distinguer de la 1-forme sur  $\mathbb{R}$ .

Alors, on a aussi :

$$I\alpha = \int_0^1 \beta|_t dt,$$

et, en partant de la décomposition  $\omega = \phi + dt \wedge \psi$ , on parvient ainsi au même résultat.

Nous déduisons de la proposition 3.10 le résultat suivant :

**Théorème 3.11 (formule d'homotopie)** *Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux variétés différentielles et soit  $f_0, f_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  deux applications régulièrement homotopes. Soit  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$  une forme fermée, c'est à dire telle que  $d\alpha = 0$ . Alors il existe une forme  $\beta \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M})$  telle que*

$$f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = d\beta. \quad (64)$$

**Preuve** — Soit  $H : [0, 1] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  l'homotopie entre  $f_0$  et  $f_1$  :  $H$  est une application régulière telle que  $H(0, \cdot) = f_0$  et  $H(1, \cdot) = f_1$ . Nous appliquons la proposition 3.10 avec  $\omega = H^*\alpha$  : cela nous donne :

$$j_1^*(H^*\alpha) - j_0^*(H^*\alpha) = d(I(H^*\alpha)) + I(d(H^*\alpha)).$$

Mais, comme  $H \circ j_1 = f_1$  et  $H \circ j_0 = f_0$ , on a

$$f_1^*\alpha = (H \circ j_1)^*\alpha = j_1^*(H^*\alpha) \quad \text{et} \quad f_0^*\alpha = (H \circ j_0)^*\alpha = j_0^*(H^*\alpha)$$

et donc :

$$f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = d(I(H^*\alpha)) + I(d(H^*\alpha)).$$

C'est le moment d'utiliser l'hypothèse que  $\alpha$  est fermée : cela entraîne que  $d(H^*\alpha) = H^*(d\alpha) = H^*0 = 0$ . Donc nous en déduisons (64) avec  $\beta = I(H^*\alpha)$ .  $\square$

### 3.7.3 La preuve du lemme de Poincaré

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme de Poincaré (théorème 3.10) : c'est une conséquence immédiate de la formule d'homotopie (64).

En effet soit  $H : [0, 1] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  une homotopie entre l'application constante  $f_0 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_0$  et l'application identité  $f_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , c'est à dire telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}, \quad H(0, M) = M_0 \quad \text{et} \quad H(1, M) = M.$$

Soit  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  une forme fermée. Alors, grâce au théorème 3.11, il existe  $\beta \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M})$  tel que  $f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = d\beta$ . Or, comme  $f_0$  est constante, on a  $f_0^*\alpha = 0$  et comme, par ailleurs,  $f_1$  est l'identité,  $f_1^*\alpha = \alpha$ . Donc on conclut que  $\alpha = d\beta$ .  $\square$

**Exercice 3.8** *Soit  $\alpha$  une 1-forme fermée sur  $\mathbb{R}^m$  (i.e.  $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^m)$  et  $d\alpha = 0$ ). Appliquer la proposition 3.10 avec l'homotopie*

$$H : \begin{array}{ccc} [0, 1] \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (t, x) & \longmapsto & tx \end{array}$$

*pour donner une expression explicite de  $\beta$  tel que  $d\beta = \alpha$  et retrouver (63). Qu'obtient-on pour une  $p$ -forme fermée sur  $\mathbb{R}^m$  en utilisant la même homotopie ?*



### 3.7.4 Cohomologie de de Rham

Le fait que toute forme exacte soit fermée peut se reformuler en écrivant que l'espace vectoriel  $d\Omega^{p-1}(\mathcal{M}) := \{d\beta \mid \beta \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M})\}$  est contenu dans l'espace vectoriel  $Z^p(\mathcal{M}) := \{\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M}) \mid d\alpha = 0\}$ . On démontre que, lorsque  $\mathcal{M}$  est compacte et sans bord, l'espace quotient  $Z^p(\mathcal{M})/d\Omega^{p-1}(\mathcal{M})$  est de dimension fini. On note  $H^p(\mathcal{M}) := Z^p(\mathcal{M})/d\Omega^{p-1}(\mathcal{M})$  cet espace, appelé *classe de cohomologie de de Rham*. Cet espace mesure décrit le nombre de possibilités pour qu'une forme fermée ne soit pas exacte (au sens où, en particulier,  $H^p(\mathcal{M}) = 0$  si et seulement si toute  $p$ -forme fermée sur  $\mathcal{M}$  est exacte). La classe de cohomologie nous renseigne aussi sur des propriétés topologiques globales de la variété  $\mathcal{M}$ .

## 4 Equations différentielles à une variable

Nous allons voir que l'on peut formuler n'importe quelle équation différentielle à coefficients réguliers et à une ou plusieurs variables de façon géométrique, en représentant la solution d'une équation par une sous-variété et en exprimant la contrainte imposée par l'équation différentielle par la condition que certaines formes différentielles s'annulent sur la sous-variété. Les avantages d'une telle approche sont :

- cela permet une formulation intrinsèque : le but est alors non seulement esthétique, mais de simplifier les calculs et d'avoir un cadre dans lequel on est en mesure de comprendre les calculs, parfois compliqués, que l'on fait ;
- c'est le bon cadre pour aborder le *problème d'équivalence* : il s'agit de déterminer si deux équations différentielles (ou plus généralement deux structures géométriques) sont équivalentes ou non par un changement de variable. Cette question, qui tire son origine dans les travaux de Sophus Lie, peut être abordée en utilisant la théorie d'Elie Cartan, qui a développé un algorithme complet pour cela. Une des idées clefs pour ce problème est de chercher les *invariants*. Les applications à la géométrie sont nombreuses ;
- comprendre la structure de l'équation ;
- ce cadre permet en fait d'aborder une classe encore plus large de problèmes que les équations différentielles : les systèmes différentiels extérieurs, dans lesquels on impose simplement des contraintes différentielles entre différentes quantités, mais on ne fixe pas forcément à l'avance quelles sont les variables indépendantes, ni quel est leur nombre.

Bien que cette approche permette parfois de démontrer des résultats globaux, nous nous contenterons dans la suite d'une étude **locale** des systèmes différentiels extérieurs. Tous les résultats énoncés seront donc valables en général *au voisinage d'un point* et pas nécessairement globalement, même si nous ne le rappelons pas systématiquement.

### 4.1 Equations différentielles ordinaires du premier ordre

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{df}{dx}(x) = A(x, f(x)), \quad x \in I, \quad (65)$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , l'inconnue est une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(I)$  (ou bien  $f$  est définie sur un intervalle  $I'$  inclus dans  $I$ ) et  $A \in \mathcal{C}^\infty(I \times \mathbb{R})$ . Voyons comment nous pouvons formuler cette équation de façon géométrique.

Notons en préliminaire qu'une première formulation géométrique de (65) consiste à introduire le champ de vecteur  $X \in \mathcal{X}(I \times \mathbb{R})$  défini par

$$X(x) = \frac{\partial}{\partial x} + A(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

où  $(x, y)$  sont les coordonnées sur  $I \times \mathbb{R}$  (une autre façon d'écrire cela est :  $X(x) =$

$\left( \begin{array}{c} 1 \\ A(x, y) \end{array} \right)$ ). Alors toute solution de l'équation  $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t))$  est de la forme  $\gamma(t) = (x_0 + t, f(x_0 + t))$ , où  $f$  est solution de (65). Cela dit, nous allons dans la suite décrire de façon plus détaillée une autre formulation.

### Où $df/dx$ devient une variable indépendante

Soit

$$J^1(I, \mathbb{R}) := \{(x, y, p) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (66)$$

l'espace des jets d'ordre 1 entre  $I$  et  $\mathbb{R}$ . A toute fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (non nécessairement solution de (65) pour l'instant), nous associons le **1-graphe** de  $f$  :

$$\begin{aligned} j^1 f : I &\longrightarrow J^1(I, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto (x, f(x), f'(x)), \end{aligned} \quad (67)$$

où  $f' = \frac{df}{dx}$ . Nous considérons l'image de  $j^1 f$  :

$$\Gamma := j^1 f(I) = \{(x, f(x), f'(x)) \mid x \in I\},$$

qui est clairement une sous-variété de dimension 1 de  $J^1(I, \mathbb{R})$ . Enfin nous définissons les deux 1-formes suivantes sur  $J^1(I, \mathbb{R})$  :

$$\theta := dy - p dx \quad \text{et} \quad \omega := dx.$$

Avant d'aller plus loin, il est peut-être utile de préciser les rôles joués par chaque objet :  $J^1(I, \mathbb{R})$  est une variété de dimension 3 et  $x, y$  et  $p$  sont des coordonnées sur  $J^1(I, \mathbb{R})$ , c'est à dire des fonctions sur  $J^1(I, \mathbb{R})$ . Alors  $dx, dy$  et  $dp$  sont les différentielles de ces fonctions. A présent nous allons voir que le fait que  $\Gamma$  soit une courbe de la forme  $j^1 f(I)$ , pour une certaine fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , peut, localement, se traduire par une condition locale :

$$\theta|_{\Gamma} = \iota_{\Gamma}^* \theta = 0, \quad (68)$$

où  $\iota_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow J^1(I, \mathbb{R})$  est l'application inclusion (voir la définition 3.3). Nous avons vu à la proposition 3.2 plusieurs façons de la tester, dont notamment la condition :  $\forall M \in \Gamma, \forall v \in T_M \Gamma, \theta_M(v) = 0$ .

En effet, commençons par montrer (68). Pour cela nous utilisons la paramétrisation de  $\Gamma$  la plus naturelle :  $j^1 f$ . Nous devons donc calculer  $(j^1 f)^* \theta$  et vérifier que cela s'annule. Il n'est pas inutile à ce propos de rappeler comment on calcule l'image inverse d'une forme par une application. Le plus efficace consiste à s'appuyer sur la définition 3.2 :

- grâce à (25) nous savons que  $(j^1 f)^* \theta = (j^1 f)^*(dy - p dx)$  peut se calculer en utilisant d'abord le fait que le pull-back est un morphisme d'algèbre :  $(j^1 f)^*(dy - p dx) = (j^1 f)^* dy - (j^1 f)^* p (j^1 f)^* dx$  ;
- la propriété (23) nous enseigne que  $(j^1 f)^* p$  est égal à  $p \circ j^1 f$ . Comme  $j^1 f = (x, f, f')$  et que  $p$  est tout simplement la troisième coordonnée sur  $J^1(I \times \mathbb{R})$ , cela signifie que  $(j^1 f)^* p = f'$  ;

- en utilisant (24) et (23), nous avons  $(j^1 f)^* dy = d((j^1 f)^* y) = d(y \circ j^1 f) = df$ . De même, nous avons  $(j^1 f)^* dx = d((j^1 f)^* x) = d(x \circ j^1 f) = dx$ ;
- nous pouvons maintenant tout assembler :  $(j^1 f)^* \theta = df - f' dx$ ;

En résumé, et c'est là, finalement, la chose toute simple à retenir :

*Dans l'expression  $dy - p dx$ , nous avons remplacé  
chacune des coordonnées  $x, y$  ou  $p$  par sa composition avec  $j^1 f$*

- enfin nous développons  $df \in \Omega^1(I)$  dans la base de  $\mathbb{R}^*$  (à savoir  $dx$ ), ce qui donne  $df = f' dx$  et substituons cela dans le calcul précédent : cela donne  $(j^1 f)^* \theta = f' dx - f' dx = 0$ .

Montrons à présent la réciproque de ce qui précède : soit  $\Gamma$  une sous-variété simplement connexe, de dimension 1 de  $J^1(I, \mathbb{R})$  telle que, si on note  $\iota_\Gamma : \Gamma \rightarrow J^1(I, \mathbb{R})$  son inclusion dans  $J^1(I, \mathbb{R})$ , on ait :

$$\iota_\Gamma^* \theta = 0 \tag{69}$$

$$\iota_\Gamma^* dx \neq 0. \tag{70}$$

Soit  $I' \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $\gamma : I' \ni t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$  une paramétrisation de  $\Gamma$ . Notons  $\gamma = (\varphi, \psi, \pi)$ . Alors (70) équivaut à :

$$\gamma^* dx \neq 0 \iff \frac{d\varphi}{dt} dt \neq 0.$$

Donc en particulier  $\varphi : I' \rightarrow I$  est une fonction strictement monotone et est par conséquent un homéomorphisme entre  $I'$  et son image  $\varphi(I') =: I_1$ . En fait, en utilisant  $d\varphi/dt \neq 0$  et le théorème d'inversion local, on montre que  $\varphi$  est un difféomorphisme. Nous pouvons donc faire le changement de variable

$$x = \varphi(t), \quad t \in I_1,$$

et poser :

$$f(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x), \quad g(x) = \pi \circ \varphi^{-1}(x), \quad \forall x \in I_1.$$

Nous obtenons ainsi une paramétrisation locale  $\Phi : x \mapsto (x, f(x), g(x))$  de  $\Gamma$ . A présent nous pouvons exploiter (69), qui équivaut à :

$$\Phi^* \theta = 0 \iff df - g dx = 0 \iff g = \frac{df}{dx}.$$

Et nous concluons que  $\varphi = j^1 f$ . Récapitulons :

**Proposition 4.1** *Soit  $\Gamma$  une sous-variété simplement connexe de  $J^1(I, \mathbb{R})$  et notons  $\iota_\Gamma$  son inclusion dans  $J^1(I, \mathbb{R})$ . Alors les deux propriétés suivantes (i) et (ii) sont équivalentes.*

- (i)  $\iota_\Gamma^* \theta = 0$  et  $\iota_\Gamma^* dx \neq 0$ ;
- (ii) il existe un intervalle  $I_1 \subset I$  et une application  $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $\Gamma$  est l'image de l'application  $j^1 f$ .

Une application de ce résultat est une reformulation géométrique de l'équation (65). Soit  $\mathcal{M}$  la sous-variété de  $J^1(I, \mathbb{R})$  définie par l'équation

$$p = A(x, y).$$

Il est clair que les solutions  $f$  de (65) sont les fonctions telles que  $j^1 f$  soit à valeur dans  $\mathcal{M}$ . Compte tenu de la proposition 4.1, ces solutions peuvent être décrites par  $\Gamma := j^1 f(I_1)$ , et donc, pourvu que  $\Gamma$  soit connexe, (65) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \Gamma & \subset \mathcal{M}, \\ \theta|_{\Gamma} & = 0, \\ dx|_{\Gamma} & \neq 0. \end{cases} \quad (71)$$

Plus généralement, toute équation différentielle de la forme (implicite)

$$F\left(x, f(x), \frac{df}{dx}(x)\right) = 0,$$

où  $F \in \mathcal{C}^\infty(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  peut s'écrire également sous la forme (71), à condition de poser  $\mathcal{M} := \{(x, y, p) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid F(x, y, p) = 0\}$ .

## 4.2 La restriction d'une forme différentielle sur une sous-variété

La formulation précédente repose sur l'emploi de la restriction d'une forme différentielle sur une sous-variété. Comme nous utiliserons constamment cette opération, il est utile de donner des précisions.

Nous considérons une  $p$ -forme  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  et  $\Gamma \subset \mathcal{M}$  une sous-variété (de dimension  $m$  quelconque). Notons  $\iota_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathcal{M}$  l'application tautologique d'inclusion. Remarquons que, étant une sous-variété,  $\Gamma$  a aussi une structure de variété et peut être muni d'un atlas  $(\mathcal{O}_i, x_i, U_i)_{i \in I}$ , où, pour tout  $i \in I$ ,  $x_i : \mathcal{O}_i \rightarrow U_i \subset \mathbb{R}^m$  est une carte locale sur un ouvert  $\mathcal{O}_i$  de  $\Gamma$ .

**Lemme 4.1** *Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\iota_\Gamma^* \alpha = 0$  ;
- (ii)  $\forall M \in \Gamma, \forall v_1, \dots, v_p \in T_M \Gamma, \alpha_M(v_1, \dots, v_p) = 0$  ;
- (iii) pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  d'une variété quelconque de dimension quelconque et toute application différentiable  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}$  dont l'image est contenue dans  $\Gamma$ ,  $f^* \alpha = 0$  ;
- (iv) il existe un atlas  $(\mathcal{O}_i, x_i, U_i)_{i \in I}$  sur  $\Gamma$  tel que,  $\forall i \in I, (x_i^{-1})^* \alpha = 0$ .

**Définition 4.1** *Soit  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  et  $\Gamma \subset \mathcal{M}$  une sous-variété. On écrit que*

$$\alpha|_{\Gamma} = 0$$

*si l'une des quatre conditions du lemme précédent est réalisée.*

*Démonstration du lemme* — Nous montrons successivement (i)  $\iff$  (ii), (i)  $\iff$  (iii), (iii)  $\implies$  (iv) et (iv)  $\implies$  (i). Par concision, nous noterons  $\iota_\Gamma = \iota$ .

Commençons par remarquer que, dans (ii), un abus de notation (bien commode) est fait : pour tout  $M \in \Gamma$ ,  $T_M\Gamma$  est identifié avec un sous-espace vectoriel de  $T_M\mathcal{M}$ . Cette identification se fait via la différentielle  $d\iota_M : T_M\Gamma \longrightarrow T_M\mathcal{M}$ , application linéaire injective. Il faut ainsi comprendre (ii) sous la forme :  $\forall M \in \Gamma, \forall v_1, \dots, v_p \in T_M\Gamma, \alpha_M(d\iota_M(v_1), \dots, d\iota_M(v_p)) = 0$ . Comme on a évidemment  $\alpha_M(d\iota_M(v_1), \dots, d\iota_M(v_p)) = \alpha_{\iota(M)}(d\iota_M(v_1), \dots, d\iota_M(v_p)) = (\iota_\Gamma^*\alpha)_M(v_1, \dots, v_p)$ , on en déduit immédiatement que (i) équivaut à (ii).

Toute application  $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{M}$  dont l'image est contenue dans  $\Gamma$  peut s'écrire  $f = \iota \circ g$ , où  $g : \mathcal{O} \longrightarrow \Gamma$ . On a donc  $f^*\alpha = (\iota \circ g)^*\alpha = g^*(\iota^*\alpha)$ , d'où l'équivalence entre (i) et (iii).

Enfin nous observons que (iii) entraîne immédiatement (iv). Réciproquement, si (iv) est vrai, pour tout  $M \in \Gamma$  et pour tout  $v_1, \dots, v_p \in T_M\Gamma$ , prenons une carte  $x : \mathcal{O} \longrightarrow U$  telle que  $M \in \mathcal{O}$ , alors  $\alpha_M(v_1, \dots, v_p) = [(x^{-1})^*\alpha]_{x(M)}(dx_M(v_1), \dots, dx_M(v_p)) = 0$ , donc (i) est vrai.  $\square$

Dans la suite nous allons voir d'autres exemples d'équations différentielles qui se traduisent localement en imposant des conditions sur des sous-variétés  $\Gamma$  d'une variété  $\mathcal{M}$  du type :

- «  $\theta|_\Gamma = 0$  » où  $\theta \in \Omega^p(\mathcal{M})$  : il s'agit alors d'une contrainte sur l'espace tangent à chaque point de  $\Gamma$  ;
- «  $\omega|_\Gamma \neq 0$  partout », où  $\omega \in \Omega^m(\mathcal{M})$  : il s'agit alors d'une condition d'indépendance. Souvent, par abus de notation, nous écrirons «  $\omega|_\Gamma \neq 0$  », en omettant de mentionner que la condition est vraie « partout ».

### 4.3 Equations différentielles ordinaires du second ordre

Considérons l'équation

$$F\left(x, f, \frac{df}{dx}(x), \frac{d^2f}{dx^2}(x)\right) = 0, \quad \forall x \in I, \quad (72)$$

où  $F \in \mathcal{C}^\infty(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ . Nous allons reformuler géométriquement cette équation en généralisant ce qui a été fait au paragraphe précédent. Notons :

$$J^2(I, \mathbb{R}) := \{(x, y, p, q) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

l'espace des jets d'ordre 2 entre  $I$  et  $\mathbb{R}$ . A toute fonction  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ , nous associons son **2-graphe**

$$\begin{aligned} j^2f : I &\longrightarrow J^2(I, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto (x, f(x), f'(x), f''(x)). \end{aligned}$$

Nous définissons également les 1-formes suivantes :

$$\theta_1 := dy - p dx, \quad \theta_2 := dp - q dx,$$

et notons  $\mathcal{M}$  la sous-variété de  $J^2(I, \mathbb{R})$  d'équation  $F(x, y, p, q) = 0$ . Alors nous avons :

**Proposition 4.2** Soit  $\Gamma$  une sous-variété simplement connexe de  $J^2(I, \mathbb{R})$  et notons  $j$  son inclusion dans  $J^2(I, \mathbb{R})$ . Alors les deux propriétés suivantes (i) et (ii) sont équivalentes.

- (i)  $\theta_1|_\Gamma = \theta_2|_\Gamma = 0$  et  $dx|_\Gamma \neq 0$ ;
- (ii) il existe un intervalle  $I_1 \subset I$  et une application  $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $\Gamma$  est l'image de l'application  $j^2 f$ .

Nous pouvons ainsi reformuler l'équation (72) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \subset \mathcal{M}, \\ \theta_1|_\Gamma = 0, \\ \theta_2|_\Gamma = 0, \\ dx|_\Gamma \neq 0. \end{array} \right. \quad (73)$$

Une variante est possible : au lieu de travailler dans  $J^2(I, \mathbb{R})$  avec la contrainte que  $\Gamma$  est une sous-variété de  $\mathcal{M}$ , nous pouvons directement travailler dans la sous-variété  $\mathcal{M}$ , à condition de remplacer  $\theta_1, \theta_2$  et  $dx$  respectivement par leurs restrictions à  $\mathcal{M}$ , c'est à dire, notant  $\iota_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \subset J^2(I, \mathbb{R})$  l'inclusion, par  $\iota_{\mathcal{M}}^* \theta_1, \iota_{\mathcal{M}}^* \theta_2$  et  $\iota_{\mathcal{M}}^* dx$  respectivement. Présenté comme cela, cela paraît un peu abstrait, mais, si nous supposons que  $\frac{\partial F}{\partial q} \neq 0$ , de sorte que l'on peut trouver localement une fonction  $A : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\mathcal{M} = \{(x, y, p, q) \in I \times \mathbb{R}^3; q = A(x, y, p)\}$ , on peut alors utiliser les coordonnées  $(x, y, p)$  sur  $\mathcal{M}$  et on a tout simplement :

$$\iota_{\mathcal{M}}^* \theta_1 = dy - p dx, \quad \iota_{\mathcal{M}}^* \theta_2 = dp - A(x, y, p) dx, \quad \iota_{\mathcal{M}}^* dx = dx.$$

Notons qu'une telle variante était également possible pour (65) et (71).

## 5 Equations aux dérivées partielles du premier ordre

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . La forme générale d'une équation aux dérivées partielles pour une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est

$$F \left( x^1, \dots, x^n, f(x), \frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \right) = 0, \quad (74)$$

où  $F : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 5.1 Formulation géométrique

Nous pouvons reformuler cette équation en introduisant l'espace des jets d'ordre 1 entre  $U$  et  $\mathbb{R}$  :

$$J^1(U, \mathbb{R}) := \{(x, y, p) \in U \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^*\}$$

et la sous-variété  $\mathcal{M}$  de  $J^1(U, \mathbb{R})$  d'équation  $F(x, y, p) = 0$ . Alors, à toute fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  nous associons son 1-jet :

$$\begin{array}{ccc} j^1 f : U & \longrightarrow & J^1(U, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & (x, f(x), df_x) \end{array}$$

et  $f$  est une solution de (74) si et seulement si  $j^1 f$  prend ses valeurs dans  $\mathcal{M}$ , c'est à dire si l'image de  $j^1 f$  est une sous-variété de  $\mathcal{M}$ . A nouveau, il est possible de caractériser les sous-variétés de  $J^1(U, \mathbb{R})$  qui sont des images de 1-graphes d'applications définies sur un ouvert inclus dans  $U$  en utilisant la **forme de contact**

$$\theta := dy - p_i dx^i \quad (\text{ici le signe } \sum_{i=1}^n \text{ est sous-entendu}) \quad (75)$$

et la forme volume

$$\omega := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (76)$$

**Proposition 5.1** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Gamma$  une sous-variété de dimension  $n$  de  $J^1(U, \mathbb{R})$ . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\theta|_{\Gamma} = 0$  et  $\omega|_{\Gamma} \neq 0$  ;
- (ii) pour tout point  $M_0 \in \Gamma$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}_0$  de  $M$  dans  $J^1(U, \mathbb{R})$  et un voisinage ouvert  $U_0$  de  $x_0 := x(M_0)$  dans  $U$  et une application  $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $\Gamma \cap \mathcal{O}_0$  soit l'image de l'application  $j^1 f$ .

**Remarque** — Contrairement aux conclusions des propositions 4.1 et 4.2, nous ne sommes en mesure de montrer que (i) entraîne (ii) que *localement*, c'est à dire sur un voisinage d'un point quelconque  $M_0$  de  $\Gamma$ . L'exemple suivant illustre pourquoi.

**Exemple 5.1** *Soit  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et considérons  $J^1(U, \mathbb{R})$  avec les coordonnées  $(x^1, x^2, y, p_1, p_2)$  (avec  $(x^1, x^2) \neq 0$ ), la forme de contact  $\theta = dy - p_1 dx^1 - p_2 dx^2$  et la forme volume  $\omega = dx^1 \wedge dx^2$ . Soit*

$$\begin{aligned} \phi : ]0, \infty[ \times ]0, 4\pi[ &\longrightarrow J^1(U, \mathbb{R}) \\ (r, \alpha) &\longmapsto \left( r \cos \alpha, r \sin \alpha, \alpha, -\frac{\sin \alpha}{r}, \frac{\cos \alpha}{r} \right). \end{aligned}$$

Alors l'image  $\Gamma$  de  $\phi$  est une sous-variété de  $J^1(U, \mathbb{R})$  et, de plus,  $\phi^* \theta = 0$ , tandis que  $\phi^* \omega \neq 0$  (id est  $\theta|_{\Gamma} = 0$  et  $\omega|_{\Gamma} \neq 0$ ). Cependant  $\Gamma$  n'est pas l'image d'un 1-jet d'une application globalement définie sur  $U$  (en réalité,  $\Gamma$  est l'image de l'application multivaluée  $j^1 f$ , où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $f(x^1, x^2) = \arctg(x^2/x^1)$ ).

*Démonstration de la proposition 5.1* — Montrons que (i) entraîne (ii). Soit  $W \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert, muni des coordonnées  $(t^1, \dots, t^n)$ , et soit  $\gamma = (\varphi, \psi, \pi) : W \rightarrow J^1(U, \mathbb{R})$  une immersion dont l'image est un ouvert de  $\Gamma$  qui contient  $M_0$ . La condition  $\omega|_{\Gamma} \neq 0$  implique que  $\gamma^* \omega \neq 0$  partout. Or  $\gamma^* \omega = d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^n = \det \left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} \right) dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^n$ . On peut donc utiliser le théorème d'inversion locale pour en déduire que  $\varphi$  est un difféomorphisme local de  $W$  vers  $U_0 := \varphi(W) \subset \mathbb{R}^n$  (quitte à choisir un ouvert  $W$  plus petit). Alors l'application  $\Phi := \gamma \circ \varphi^{-1} : U_0 \rightarrow J^1(U, \mathbb{R})$  est une immersion qui a la forme  $\Phi(x) = (x, f(x), g(x))$ ,  $\forall x = (x^1, \dots, x^n) \in U_0$ . La condition  $\theta|_{\Gamma} = 0$  donne alors :

$$0 = \Phi^* \theta = df - g_i dx^i = \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} - g_i \right) dx^i.$$



Cela entraîne donc que  $g_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  ou  $g = df$ . Donc  $\Phi(x) = (x, f(x), df_x) = j^1 f(x)$ ,  $\forall x \in U_0$ , ce qui prouve (ii).

La réciproque est immédiate : si tout voisinage d'un point dans  $\Gamma$  est l'image d'une immersion de la forme  $j^1 f$ , pour  $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $(j^1 f)^* \omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \neq 0$  et  $(j^1 f)^* \theta = df - \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = 0$ .  $\square$

## 5.2 Fermeture du système

Dans ce qui suit, nous allons améliorer la proposition 5.1 d'une façon miraculeuse. En effet nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de supposer que la dimension de  $\Gamma$  est  $n$  pour déduire (ii) de (i). Cela repose sur l'**observation cruciale** suivante :

$$\theta|_{\Gamma} \implies d\theta|_{\Gamma} = 0 \quad (77)$$

(noter que  $d\theta = -dp_i \wedge dx^i$ ).

Cette observation est une conséquence simple du fait que  $\iota_{\Gamma}^* d\theta = d\iota_{\Gamma}^* \theta$ . Cela entraîne que toute solution  $\Gamma$  du système  $\theta|_{\Gamma} = 0$  et  $\omega|_{\Gamma} \neq 0$  est automatiquement solution du système

$$\theta|_{\Gamma} = d\theta|_{\Gamma} = 0 \quad \text{et} \quad \omega|_{\Gamma} \neq 0. \quad (78)$$

Ce nouveau système est dit **fermé**, car il est stable par l'action de la différentielle extérieure. L'équation que nous avons ajoutée n'avait aucune conséquence dans le cas où  $n = 1$  car  $d\theta$  est une 2-forme et sa restriction sur une sous-variété de dimension 1 est donc toujours nulle. Mais il n'en est pas de même si  $n \geq 2$ . Pour exploiter cette condition nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant.

**Lemme 5.1** *Soit  $\mathcal{N} := J^1(U, \mathbb{R})$ ,  $M \in \mathcal{N}$ . Alors l'application*

$$\begin{aligned} K_M : T_M \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \oplus (T_M^* \mathcal{N} / \mathbb{R} \theta_M) \\ V &\longmapsto (V \lrcorner \theta_M, V \lrcorner d\theta_M \text{ mod } [\theta_M]) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

*Démonstration* — Notons  $K = K_M$  pour plus de concision. Comme les espaces de départ et d'arrivée de  $K$  ont même dimension, il suffit de montrer que le noyau de  $K$  est réduit à  $\{0\}$ . Décomposons  $V = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y \frac{\partial}{\partial y} + P_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ . Puisque  $d\theta = -dp_i \wedge dx^i$ , il vient

$$K(V) = (Y - p_i X^i, X^i dp_i - P_i dx^i \text{ mod } [dy - p_i dx^i]).$$

Supposons que  $K(V) = 0$ . Alors le fait que la deuxième composante s'annule signifie qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $X^i dp_i - P_i dx^i = \lambda(dy - p_i dx^i)$ , ce qui équivaut à  $\lambda dy + (P_i - \lambda p_i) dx^i - X^i dp_i = 0$  et donc  $\lambda = 0$ ,  $P_i = 0$  et  $X^i = 0$ . En substituant ces valeurs dans la première composante de  $K(V)$ , on obtient que  $Y = 0$ . Donc  $V = 0$ .  $\square$

Le résultat suivant reprend mot pour mot la proposition 5.1, à l'exception de l'hypothèse que  $\dim \Gamma = n$ .

**Théorème 5.1** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Gamma$  une sous-variété de  $J^1(U, \mathbb{R})$ . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(i)  $\theta|_{\Gamma} = 0$  et  $\omega|_{\Gamma} \neq 0$  ;

(ii) pour tout point  $M_0 \in \Gamma$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}_0$  dans  $J^1(U, \mathbb{R})$  et un voisinage ouvert  $U_0$  de  $x_0 := x(M_0)$  dans  $U$  et une application  $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $\Gamma \cap \mathcal{O}_0$  soit l'image de l'application  $j^1 f$ .

*Démonstration* — A cause de la proposition 5.1, tout ce que nous devons faire est de vérifier que (i) implique que  $\dim \Gamma = n$ . Nous le montrons en deux étapes.

**a)**  $\omega|_{\Gamma} \neq 0$  entraîne que  $\dim \Gamma \geq n$  — Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\dim \Gamma = p < n$ . Alors il existe un ouvert  $U_0 \subset \mathbb{R}^p$  et une immersion  $u : U_0 \rightarrow J^1(U, \mathbb{R})$  dont l'image est le voisinage d'un point de  $\Gamma$ . En particulier  $u^* \omega \neq 0$ . Mais cela est impossible car  $u^* \omega \in \Omega^n(U_0) = \{0\}$ .

**b)**  $\theta|_{\Gamma} = 0$  entraîne que  $\dim \Gamma \leq n$  — Soit  $p$  la dimension de  $\Gamma$ ,  $M \in \Gamma$  et soit  $(v_1, \dots, v_p)$  une base de  $T_M \Gamma$ . Commençons par montrer que, si  $\theta_M$  s'annule sur  $T_M \Gamma$ , alors

$$\text{rang}(\theta_M, v_1 \lrcorner d\theta_M, \dots, v_p \lrcorner \theta_M) = p + 1. \quad (79)$$

Pour cela, soit  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$  et supposons que

$$\alpha \theta_M + \beta_1 (v_1 \lrcorner d\theta_M) + \dots + \beta_p (v_p \lrcorner d\theta_M) = 0.$$

Cette condition implique que  $(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p) \lrcorner d\theta_M = 0 \pmod{[\theta_M]}$ . Mais comme  $\theta_M$  s'annule sur  $T_M \Gamma$ , on a aussi  $\theta_M(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p) = 0$ . Donc  $K_M(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p) = 0$ . Donc, par le lemme 5.1,  $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p = 0$ , ce qui entraîne  $\beta_1 = \dots = \beta_p = 0$  et, par conséquent,  $\alpha = 0$  également. Donc  $(\theta_M, v_1 \lrcorner d\theta_M, \dots, v_p \lrcorner \theta_M)$  est libre, d'où (79).

A présent, utilisons l'observation que, si  $\theta|_{\Gamma} = 0$ , alors  $\theta|_{\Gamma} = d\theta|_{\Gamma} = 0$ . Cela entraîne que,  $\forall v \in T_M \Gamma$ ,  $\theta_M(v) = d\theta_M(v_1, v) = \dots = d\theta_M(v_p, v) = 0$ . Donc  $T_M \Gamma \subset \text{Ker}(\theta_M, v_1 \lrcorner d\theta_M, \dots, v_p \lrcorner d\theta_M)$ . A cause de (79), on en déduit que

$$p = \dim T_M \Gamma \leq \dim J^1(U, \mathbb{R}) - p - 1 = 2n - p.$$

Donc  $p \leq n$ . □

En conclusion nous pouvons utiliser le théorème 5.1 pour obtenir la formulation *locale* de l'équation (74) qui suit : trouver les sous-variétés  $\Gamma$  de  $J^1(U, \mathbb{R})$  telles que

$$\begin{cases} \Gamma \subset \mathcal{M} \\ \theta|_{\Gamma} = 0 \\ \omega|_{\Gamma} \neq 0. \end{cases}, \quad (80)$$

où  $\mathcal{M}$  est la sous-variété d'équation  $F(x, y, p) = 0$ .

### 5.3 Champs de vecteur de Charpit–Lagrange

En 1784 un jeune homme nommé Paul Charpit envoie un mémoire à l’Académie des Sciences présentant des travaux inspirés par des résultats de Joseph Louis Lagrange. Charpit meurt la même année, son mémoire ne sera pas publié avant 1930 et ne sera réellement diffusé qu’à partir des années 1980. Ce mémoire contient l’idée d’une méthode de résolution des équations différentielles du premier ordre qui repose sur l’observation de l’existence de *courbes caractéristiques*. Néanmoins Lagrange en prend connaissance après la mort de Charpit et il reprend la méthode, qui fut développée ultérieurement par Gaspard Monge, Carl Gustav Jakob Jacobi et Augustin Louis Cauchy (pour cette raison, les courbes caractéristiques sont souvent appelées *caractéristiques de Cauchy*). Nous retrouverons aussi une trace de ces idées dans pratiquement tous les résultats que nous présentons dans cet ouvrage.

Un cas particulier célèbre de cette théorie est la théorie de Hamilton–Jacobi, établissant un lien entre les systèmes dynamiques hamiltoniens (donc par exemple les problèmes de mécanique) et les équations de la forme (74) dans lesquelles la fonction  $F$  ne dépend pas de la variable  $y$  ( $F$  est alors le Hamiltonien de la théorie). Outre leur utilité pour la résolution d’équations différentielles, ces méthodes permirent à William Rowan Hamilton d’établir un lien entre la mécanique et l’optique qui préfigure la dualité onde-particule à la base de la mécanique quantique.

Le problème de départ est l’équation (74) que nous avons reformulée géométriquement sous la forme (80). Dans ce qui suit, nous oublierons la condition d’indépendance  $\omega|_{\Gamma} \neq 0$  et nous nous intéressons uniquement au système suivant (écrit ici sous une forme *fermée*) :

$$\begin{cases} \Gamma & \subset \mathcal{M} \\ \theta|_{\Gamma} & = 0 \\ \dim\Gamma & = n. \end{cases} \quad (81)$$

Comme la condition  $\omega|_{\Gamma} \neq 0$  est ouverte, si  $\Gamma$  est une solution de (81) et si cette condition ouverte est satisfaite en un point, alors elle est satisfaite sur un voisinage de ce point et est donc une solution de (80).

Nous allons voir que, en général, les solutions  $\Gamma$  de (81) sont feuilletées par des courbes qui sont les lignes intégrales d’un champ de vecteur  $X$ , dit de Charpit–Lagrange, défini sur  $J^1(U, \mathbb{R})$  directement à partir de la fonction  $F$  qui définit l’hypersurface  $\mathcal{M}$  de  $J^1(U, \mathbb{R})$ . En réalité il suffit de connaître en chaque point  $m$  la droite vectorielle engendrée par la valeur de  $X$  en  $m$  (pourvu justement que  $X(m) \neq 0$ ). Une telle donnée est appelée une *distribution de droites vectorielles*.

Une des propriétés du champ de Charpit–Lagrange  $X$  est qu’il est une symétrie du système (81) : si  $e^{\cdot X}$  est le flot du champ de vecteur, pour chaque  $t$ , l’image par  $e^{tX}$  d’une solution de (81) est encore une solution de (81). Cela entraîne d’abord en particulier que  $X$  est tangent à  $\mathcal{M}$ , c’est à dire  $dF(X)|_{\mathcal{M}} = 0$ . Supposons pour simplifier que  $dF(X)$  s’annule partout. Nous devons supposer en outre que :

$$\iota_{\Gamma}^* \theta = \iota_{\Gamma}^* dF = 0 \quad \implies \quad 0 = \iota_{e^{tX}(\Gamma)}^* \theta \iff 0 = (e^{tX} \circ \iota_{\Gamma})^* \theta = \iota_{\Gamma}^* e^{tX^*} \theta.$$

Pour que cette propriété soit vraie pour toute sous-variété  $\Gamma$ , il faut et il suffit qu'il existe des familles de fonctions  $(f_t)_t$  et  $(g_t)_t$  telle que  $e^{tX}\theta = f_t\theta + g_t dF$ . En dérivant par rapport à  $t$  et en prenant la valeur en  $t = 0$ , on obtient  $L_X\theta = \lambda\theta + \mu dF$ , pour certaines fonctions  $\lambda$  et  $\mu$  (on peut montrer la réciproque).

Mais le champ de Charpit–Lagrange satisfait une propriété encore plus forte! A toute sous-variété  $\gamma$ , nous lui associons la sous-variété  $\Gamma = \gamma \cdot e^{tX} := \{M \cdot e^{tX}; M \in \gamma, (t, M) \in \Delta_X\}$  (le cylindre de base  $\gamma$  généré par les courbes intégrales de  $X$ ). Alors, si, pour une certaine valeur  $C$  constante,  $\gamma$  est solution de  $F|_\gamma = C$  et  $\theta|_\gamma = 0$ , alors,  $\Gamma$  est aussi solution de  $F|_\Gamma = C$  et  $\theta|_\Gamma = 0$ . Au niveau infinitésimal (et en raisonnant avec  $E = T_M\gamma$ ), cela se traduit sous la forme d'une propriété sur les sous-espaces vectoriels  $E$  d'un espace tangent  $T_M J^1(U, \mathbb{R})$ , où  $M \in J^1(U, \mathbb{R})$  :

$$dF_M|_E = \theta_M|_E = d\theta_M|_E = 0 \implies dF_M|_{E+\mathbb{R}X(M)} = \theta_M|_{E+\mathbb{R}X(M)} = d\theta_M|_{E+\mathbb{R}X(M)} = 0.$$

Il est facile de voir que cette propriété équivaut à ce que les propriétés suivantes soient satisfaites en tout point  $M$  de  $J^1(U, \mathbb{R})$  :

$$dF(X) = 0, \tag{82}$$

$$\theta(X) = 0, \tag{83}$$

$$X \lrcorner d\theta = \lambda\theta + \mu dF, \tag{84}$$

où  $\lambda = \lambda(M)$  et  $\mu = \mu(M)$  sont des réels. Nous ferons l'hypothèse que la fonction  $\mu$  dans (84) ne s'annule jamais. Alors (82) est une conséquence de (83) et (84), puisque ces propriétés entraînent que, en chaque point de  $J^1(U, \mathbb{R})$  :

$$0 = d\theta(X, X) = X \lrcorner d\theta(X) = \lambda\theta(X) + \mu dF(X) = 0 + \mu dF(X).$$

Après cette discussion, nous arrivons finalement à la définition suivante.

**Définition 5.1** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\theta = dy - p_i dx^i$  la forme de contact sur  $J^1(U, \mathbb{R})$ . Soit  $F : J^1(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction régulière. Un champ de Charpit–Lagrange est un champ de vecteur sur  $J^1(U, \mathbb{R})$  qui satisfait les deux conditions suivantes :*

$$X \lrcorner \theta = 0 \tag{85}$$

*et il existe deux fonctions  $\lambda, \mu : J^1(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\mu \neq 0$  partout et*

$$X \lrcorner d\theta = \lambda\theta + \mu dF. \tag{86}$$

Puisque  $\mu \neq 0$ , nous savons que les trois conditions (82), (83) et (84) sont satisfaites par un champ de Charpit–Lagrange. Mais en plus cette définition entraîne que  $X$  est une symétrie infinitésimale de (81), d'une part à cause de (82), et d'autre part parce que (85) et (86) entraînent que :

$$L_X\theta = X \lrcorner d\theta + d(X \lrcorner \theta) = \lambda\theta + \mu dF + 0 = \lambda\theta + \mu dF.$$

## 5.4 Existence d'un champ de vecteur de Charpit–Lagrange

Nous remarquons qu'étant donné un champ de vecteur  $X \in \mathcal{X}(J^1(U, \mathbb{R}))$ , deux fonctions régulières  $\lambda, \mu \in \Omega^0(J^1(U, \mathbb{R}))$  et une troisième fonction régulière  $s : J^1(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  qui ne s'annule pas, le triplet  $(sX, s\lambda, s\mu)$  satisfait (85) et (86) si et seulement si  $(X, \lambda, \mu)$  satisfait (85) et (86). Si un tel triplet existe, nous pouvons donc le normaliser et, en exploitant le fait que  $\mu$  ne s'annule pas, supposer que  $\mu = 1$  partout. Nous pouvons donc remplacer (86) par  $X \lrcorner d\theta = \lambda\theta + dF$ .

Posons  $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \psi_i \frac{\partial}{\partial p_i}$  et rappelons que  $\theta = dy - p_i dx^i$  et  $d\theta = -dp_i \wedge dx^i$ . Les relations (85) et  $X \lrcorner d\theta = \lambda\theta + dF$  nous donnent :

$$\varphi = p_i \xi^i$$

et

$$\xi^i dp_i - \psi_i dx^i = \lambda dy - \lambda p_i dx^i + \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i,$$

qui équivaut à :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x^i} - \lambda p_i + \psi_i \right) dx^i + \left( \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \right) dy + \left( \frac{\partial F}{\partial p_i} - \xi^i \right) dp_i = 0.$$

On en déduit  $\xi^i = \frac{\partial F}{\partial p_i}$ ,  $\varphi = p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}$ ,  $\lambda = -\frac{\partial F}{\partial y}$  et  $\psi_i = -p_i \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x^i}$ . Donc

$$X = \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial y} - \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (87)$$

et

$$X \lrcorner d\theta = dF - \frac{\partial F}{\partial y} \theta.$$

Notons que, pour tout  $M \in J^1(U, \mathbb{R})$ ,  $X$  est égal à  $K_M^{-1}(0, dF_M \bmod [\theta_M])$ , où  $K_M$  est l'application linéaire définie au lemme 5.1.

## 5.5 Généralisons notre définition d'une forme de contact

Comme nous venons de le remarquer, nous aurions pu définir le champ de Charpit–Lagrange normalisé comme étant l'unique champ de vecteur  $X$  tel que  $K(X) = (0, dF \bmod [\theta])$  partout et, pour cela, n'utiliser que la conclusion du lemme 5.1. Cela nous amène à la définition suivante.

**Définition 5.2** *Soit  $\mathcal{N}$  une variété et  $\theta \in \Omega^1(\mathcal{N})$ . On dira que  $\theta$  est une forme de contact (généralisée) si, en tout point  $M \in \mathcal{N}$ , l'application linéaire*

$$\begin{aligned} K_M : T_M \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \oplus (T_M^* \mathcal{N} / \mathbb{R} \theta_M) \\ V &\longmapsto (\theta_M(V), V \lrcorner d\theta_M \bmod [\theta_M]) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Pour éviter d'avoir à spécifier le point  $M \in \mathcal{N}$ , nous introduisons les notations suivantes. Nous considérons le sous-fibré vectoriel

$$[\theta] := \{(M, \lambda\theta_M); M \in \mathcal{N}, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset T^*\mathcal{N}, \quad (88)$$

nous notons  $\underline{\mathbb{R}} := \{(M, s); M \in \mathcal{N}, s \in \mathbb{R}\}$  le fibré trivial  $\mathcal{N} \times \mathbb{R}$  et

$$\underline{\mathbb{R}} \oplus_{\mathcal{N}} (T^*\mathcal{N}/[\theta]) := \{(M, (s, \alpha \bmod \theta_M)); M \in \mathcal{N}, s \in \mathbb{R}, \alpha \in T_M^*\mathcal{N}\}.$$

Nous définissons alors l'application

$$\begin{aligned} K : T\mathcal{N} &\longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \oplus_{\mathcal{N}} (T^*\mathcal{N}/[\theta]) \\ (M, V) &\longmapsto (M, (\theta_M(V), V \lrcorner d\theta_M \bmod [\theta_M])) = (M, K_M(V)) \end{aligned}$$

et nous dirons que  $K$  est un isomorphisme de fibré vectoriel si et seulement si, pour tout  $M \in \mathcal{N}$ ,  $K_M$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Cette propriété caractérise une forme de contact.

Une autre observation est que toutes les notions importantes que nous avons rencontrées sont invariantes si l'on change  $\theta$  en  $\rho\theta$ , où  $\rho$  est une fonction réelle qui ne s'annule jamais.

**Proposition 5.2** *Soit  $\mathcal{N}$  une variété,  $\theta \in \Omega^1(\mathcal{N})$  et  $F \in \Omega^0(\mathcal{N})$ . Soit  $\rho \in \Omega^0(\mathcal{N})$  une fonction qui ne s'annule jamais. Alors*

- $\theta$  est une forme de contact si et seulement si  $\rho\theta$  est une forme de contact ;
- Pour toute sous-variété  $\Gamma \subset \mathcal{N}$ ,

$$\begin{cases} \theta|_{\Gamma} = 0 \\ d\theta|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\rho\theta)|_{\Gamma} = 0 \\ d(\rho\theta)|_{\Gamma} = 0 \end{cases} ; \quad (89)$$

- Pour tout champ de vecteur  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ ,

$$\begin{cases} \exists \lambda, \mu \in \Omega^0(\mathcal{N}), \\ X \lrcorner \theta = 0 \\ X \lrcorner d\theta = \lambda\theta + \mu dF \end{cases} \iff \begin{cases} \exists \lambda', \mu' \in \Omega^0(\mathcal{N}), \\ X \lrcorner (\rho\theta) = 0 \\ X \lrcorner d(\rho\theta) = \lambda'(\rho\theta) + \mu' dF \end{cases} . \quad (90)$$

*Démonstration* — Considérons

$$\begin{aligned} K' : T\mathcal{N} &\longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \oplus (T^*\mathcal{N}/\mathbb{R}\theta) \\ (M, V) &\longmapsto (M, ((\rho\theta)(V), V \lrcorner d(\rho\theta) \bmod [\rho\theta])) \end{aligned}$$

Alors, comme  $V \lrcorner d(\rho\theta) = V \lrcorner (d\rho \wedge \theta + \rho d\theta) = d\rho(V)\theta - \theta(V)d\rho + \rho V \lrcorner d\theta$ , on en déduit que, matriciellement,

$$\begin{aligned} K'(V) &= \begin{pmatrix} \rho\theta(V) \\ \rho V \lrcorner d\theta - \theta(V)d\rho \bmod [\theta] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ -d\rho & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(V) \\ V \lrcorner d\theta \bmod [\theta] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ -d\rho & \rho \end{pmatrix} K(V) \end{aligned}$$

Donc  $K'$  est un isomorphisme si et seulement si  $K$  l'est, ce qui prouve la première assertion.

Les autres propriétés se montrent de même et sont d'une certaine façon la conséquence du fait que

$$\begin{pmatrix} \rho\theta \\ d(\rho\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ d\rho & \rho \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta \\ d\theta \end{pmatrix}$$

et du fait que la matrice  $\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ d\rho & \rho \end{pmatrix}$  est inversible (bien qu'à coefficients dans une algèbre extérieure), d'inverse  $\begin{pmatrix} \rho^{-1} & 0 \\ -\rho^{-2}d\rho & \rho^{-1} \end{pmatrix}$ .  $\square$

Ainsi la propriété d'être une forme de contact, les systèmes différentiels extérieurs du type (81) et les champs de Charpit–Lagrange sont invariants par les transformations  $\theta \mapsto \rho\theta$ . Il est donc naturel d'introduire la notion suivante.

**Définition 5.3** *Soit  $\mathcal{N}$  une variété. Une structure de contact sur  $\mathcal{N}$  est la donnée d'une classe d'équivalence de 1-formes de contact  $\theta$  sur  $\mathcal{N}$  pour la relation d'équivalence :*

$$\theta_1 \sim \theta_2 \iff \exists \rho \in \Omega^0(\mathcal{N}) \text{ tel que } \rho \neq 0 \text{ partout et } \theta_2 = \rho\theta_1.$$

Une variété munie d'une structure de contact  $(\mathcal{N}, [\theta])$  sera appelée une **variété de contact**.

Notons que la donnée d'une structure de contact  $[\theta]$  revient au même qu'un sous-fibré en droites du fibré cotangent  $T^*\mathcal{N}$  défini en (88) ou à la distribution d'hyperplans  $\text{Ker}\theta$  dans le fibré tangent  $T\mathcal{N}$ . Nous verrons dans la suite qu'une variété de contact est toujours de dimension impaire.

## 5.6 Réduction par les caractéristiques

Nous allons maintenant exploiter ce qui précède à la résolution d'une équation de la forme (74). Toutes les considérations qui suivent sont **locales**, c'est à dire ne sont valables en général que sur un voisinage ouvert d'un point que l'on aura choisi dans  $\mathcal{N}$ .

Soit  $(\mathcal{N}, [\theta])$  une variété de contact de dimension  $2n + 1$  (par exemple  $J^1(U, \mathbb{R})$  muni de  $\theta = dy - p_i dx^i$ , pour  $U \in \mathbb{R}^n$ ) et soit  $F \in \Omega^0(\mathcal{N})$  une fonction telle que  $dF \neq 0 \pmod{[\theta]}$  en chaque point. Cela définit un champ de Charpit–Lagrange  $X$ . Soit  $\Sigma \subset \mathcal{N}$  une hypersurface transverse au champ  $X$ , c'est à dire telle qu'en tout point  $M \in \Sigma$ ,  $T_M \Sigma \oplus \mathbb{R}X(M) = T_M \mathcal{N}$ .

**Lemme 5.2** [redressement d'un champ de vecteur] *Soit  $X$  un champ de vecteur défini sur une variété  $\mathcal{N}$  de dimension  $N$ , qui ne s'annule pas. Alors, pour tout point  $M_0 \in \mathcal{N}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}$  de  $M_0$  dans  $\mathcal{N}$  et une carte locale*

$$\begin{aligned} z : \mathcal{O} &\longrightarrow U \subset \mathbb{R}^N \\ M &\longmapsto (z^1, \dots, z^N)(M) \end{aligned}$$

telle que  $X = \frac{\partial}{\partial z^N}$  et

$$z^i(M \cdot e^{tX}) = z^i(M), \quad \forall i = 1, \dots, N-1. \quad (91)$$

*Démonstration* — Nous choisissons une hypersurface  $\Sigma \subset \mathcal{N}$  contenant  $M_0$  et transverse au champ  $X$ , munie d'une paramétrisation locale

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^{N-1} \supset B^{N-1}(0, r) &\longrightarrow \mathcal{O}_\Sigma \subset \Sigma \\ (t^1, \dots, t^{N-1}) &\longrightarrow \psi(t^1, \dots, t^{N-1}). \end{aligned}$$

Pourvu que nous choisissons l'image  $\mathcal{O}_\Sigma$  de  $\psi$  contenue dans un compact, il existe un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  ouvert contenant 0 et tel que l'application

$$\begin{aligned} B^{N-1}(0, r) \times I &\longrightarrow \mathcal{N} \\ (t^1, \dots, t^{N-1}, t^N) &\longmapsto \psi(t^1, \dots, t^{N-1}) \cdot e^{t^N X} \end{aligned}$$

soit bien définie. La différentielle de cette application prend la forme  $\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial \psi}{\partial t^i} dt^i + X(\psi) dt^N$  sur  $B^{N-1}(0, r) \times \{0\}$ , celle-ci est donc inversible sur  $B^{N-1}(0, r) \times \{0\}$  car  $X$  est transverse à  $\Sigma$ . On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale en un point de  $B^{N-1}(0, r) \times \{0\}$ . Si nous notons  $z$  l'application inverse obtenue, nous obtenons que  $X = \frac{\partial}{\partial z^N}$ .  $\square$

**Remarque 5.1** *Nous observons que, dans le lemme 5.2, il est possible de choisir librement les restrictions à une hypersurface transverse au champ  $X$  des  $n - 1$  premières coordonnées  $(z^1, \dots, z^{N-1})$  et que  $\Sigma$  a pour équation  $z^N = 0$  dans les nouvelles coordonnées.*

Le résultat suivant implique que, sans perte de généralité, nous pourrions supposer que le champ de Charpit–Lagrange satisfait la relation (86) avec  $\mu = 1$  et  $\lambda = 0$ .

**Lemme 5.3** *Soit  $(\mathcal{N}, [\theta])$  une variété de contact et  $F \in \Omega^0(\mathcal{N})$  une fonction telle que  $dF \neq 0 \pmod{\theta}$  en chaque point. Alors, au voisinage de chaque point, il existe un champ de Charpit–Lagrange  $X$  et une forme de contact  $\theta$  dans la classe  $[\theta]$  tels que*

$$X \lrcorner \theta = 0 \quad \text{et} \quad X \lrcorner d\theta = dF. \quad (92)$$

*Démonstration* — Soit  $\tilde{\theta}$  une forme de contact dans la classe  $[\theta]$  et  $\tilde{X}$  un champ de Charpit–Lagrange normalisé pour  $\tilde{\theta}$ , c'est à dire, tel que  $\tilde{\theta}(\tilde{X}) = 0$  et tel que  $\tilde{X} \lrcorner d\tilde{\theta} = \lambda \tilde{\theta} + dF$ . Nous cherchons  $\theta$  et  $X$  sous la forme

$$\theta = e^{-\Lambda} \tilde{\theta} \quad \text{et} \quad X = e^\Lambda \tilde{X},$$

où  $\Lambda$  est une fonction à valeur réelle définie sur un voisinage d'un point de  $\Sigma$ . Nous avons alors  $\theta(X) = e^{-\Lambda} \tilde{\theta}(e^\Lambda \tilde{X}) = \tilde{\theta}(\tilde{X}) = 0$ , si bien que la première des conditions dans (92) est automatiquement satisfaite. De plus  $d\theta = e^{-\Lambda}(d\tilde{\theta} - d\Lambda \wedge \tilde{\theta})$  et donc

$$\begin{aligned} X \lrcorner d\theta &= e^\Lambda \tilde{X} \lrcorner e^{-\Lambda}(d\tilde{\theta} - d\Lambda \wedge \tilde{\theta}) \\ &= \tilde{X} \lrcorner d\tilde{\theta} - d\Lambda(\tilde{X})\tilde{\theta} + \tilde{\theta}(\tilde{X})d\Lambda \\ &= (\lambda - d\Lambda(\tilde{X}))\tilde{\theta} + dF. \end{aligned}$$



Nous voyons par conséquent qu'il suffit de choisir  $\Lambda$  solution de  $d\Lambda(\tilde{X}) = \lambda$  pour conclure. A l'aide du lemme précédent, nous construisons une carte locale dans laquelle  $\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial z^{2n+1}}$ . Dans les coordonnées  $(z^1, \dots, z^{2n+1})$ , l'équation en  $\lambda$  s'écrit simplement  $\frac{\partial \Lambda}{\partial z^{2n+1}} = \lambda$  et a pour solution  $\Lambda(z^1, \dots, z^{2n+1}) = \Lambda_0(z^1, \dots, z^{2n}) + \int_0^{z^{2n+1}} \lambda(s) ds$ , où  $\Lambda_0$  est une fonction quelconque de  $2n$  variables.

Nous pouvons bien entendu supposer que  $\Lambda_0 = 0$ , on aura ainsi  $\Lambda = 0$  sur  $\Sigma$  et donc  $\theta = \tilde{\theta}$  et  $X = \tilde{X}$  sur  $\Sigma$ .  $\square$

A présent nous appliquons le lemme 5.2 avec le champ de vecteur  $X$  et la forme de contact  $\theta$  obtenus au lemme 5.3. Nous remarquons que :

(i) En préliminaire la restriction  $dF|_{\Sigma}$  ne s'annule jamais. En effet, pour tout point  $M \in \Sigma$ , comme  $dF_M \neq 0$ ,  $T_M \mathcal{N} = T_M \Sigma \oplus \mathbb{R}X(M)$  et  $dF_M(X(M)) = 0$ , il faut que  $dF_M|_{T_M \Sigma} \neq 0$ . Ainsi il est possible de compléter la fonction  $F|_{\Sigma}$  en un système de coordonnées locales sur  $\Sigma$ .

(ii) Ainsi, suivant la remarque 5.1, lorsque nous appliquons le lemme 5.2, nous pouvons choisir les coordonnées locales  $z^i$  sur  $\mathcal{N}$  de sorte que  $z^{2n}|_{\Sigma} = F|_{\Sigma}$ . Mais comme  $dF(X) = 0$ ,  $F(M \cdot e^{t^{2n+1}X}) = F(M)$ , pour tout  $M \in \mathcal{N}$  et donc en particulier pour  $M \in \Sigma$ . Dans ce dernier cas, cela entraîne que  $F(M \cdot e^{t^{2n+1}X}) = F(M) = z^{2n}(M) = z^{2n}(M \cdot e^{t^{2n+1}X})$ , en vertu de (91). Ainsi nous avons :

$$z^{2n} = F \text{ sur tout un ouvert de } \mathcal{N}. \quad (93)$$

(iii) Notons

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n+1} a_i(z) dz^i$$

la décomposition de  $\theta$  dans les coordonnées  $(z^1, \dots, z^{2n+1})$  fournies par le lemme 5.2. Alors

$$d\theta = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n+1} \left( \frac{\partial a_j}{\partial z^i} - \frac{\partial a_i}{\partial z^j} \right) dz^i \wedge dz^j.$$

Puisque  $X = \frac{\partial}{\partial z^{2n+1}}$ , les relations (92) s'écrivent

$$a_{2n+1} = 0 \quad (94)$$

et

$$-\sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{\partial a_{2n+1}}{\partial z^i} - \frac{\partial a_i}{\partial z^{2n+1}} \right) dz^i = dF.$$

Mais cette dernière relation se simplifie immédiatement à cause de (94) en :

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial a_i}{\partial z^{2n+1}} dz^i = dF. \quad (95)$$

A cause de (93), cela entraîne que  $\frac{\partial a_i}{\partial z^{2n+1}} = 0$ , si  $1 \leq i \leq 2n - 1$  et  $\frac{\partial a_{2n}}{\partial z^{2n+1}} = 1$ . Nous en déduisons :

**Proposition 5.3** Soit  $(\mathcal{N}, [\theta])$  une variété de contact de dimension  $2n + 1$ ,  $F \in \Omega^0(\mathcal{N})$  une fonction telle que  $dF \neq 0 \pmod{[\theta]}$  et  $\Sigma \subset \mathcal{N}$  une hypersurface transverse au champ de Charpit–Lagrange  $X$  associé à  $F$ . Soit  $(z^1, \dots, z^{2n})$  des coordonnées locales sur  $\Sigma$  telles que  $z^{2n} = F|_{\Sigma}$  et supposons que la restriction de  $\theta$  à  $\Sigma$  a l’expression  $\theta|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{2n} a_i dz^i$ , où les  $a_i$  sont des fonctions de  $(z^1, \dots, z^{2n})$ . Alors si, pour  $1 \leq i \leq 2n$ , nous étendons les fonctions  $a_i$  et  $z^i$  sur tout  $\mathcal{N}$  de façon à ce qu’elles soient invariantes par  $X$ , il existe une fonction  $z^{2n+1}$  sur un ouvert de  $\mathcal{N}$  telle que

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n-1} a_i dz^i + z^{2n+1} dz^{2n}, \quad \text{avec } z^{2n} = F. \quad (96)$$

*Démonstration* — Il suffit en effet de choisir  $z^{2n+1}$  qui coïncide avec  $a_{2n}$  sur  $\Sigma$  et qui est solution de  $dz^{2n+1}(X) = 1$ .  $\square$

(iv) Revenons au système différentiel extérieur (81) et considérons une solution  $\Gamma$  de ce système de dimension  $n$ . Le champ de Charpit–Lagrange est alors nécessairement tangent à  $\Gamma$ . Pour le montrer, il suffit de raisonner par l’absurde et supposer qu’il existe un point  $M \in \Gamma$  tel que  $X(M)$  ne soit pas dans  $T_M \Gamma$ . Alors  $T_M \Gamma \oplus \mathbb{R}X(M)$  serait de dimension  $n + 1$ , mais en même temps,  $\theta_M$  et  $d\theta_M$  s’annuleraient sur ce sous-espace, ce qui est impossible d’après le théorème 5.1. Cela signifie dans les coordonnées  $(z^1, \dots, z^{2n+1})$  que  $\frac{\partial}{\partial z^{2n+1}}$  est tangent à  $\Gamma$ . Donc  $\Gamma$  est une sous-variété cylindrique, localement identique à un produit  $\gamma \times I \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ , où  $\gamma$  est une sous-variété de dimension  $n - 1$  contenue dans  $\Sigma \cap F^{-1}(0)$ . Cette sous-variété est solution des équations

$$F|_{\gamma} = 0 \quad \text{et} \quad (\theta|_{\Sigma})|_{\gamma} = d(\theta|_{\Sigma})|_{\gamma} = 0. \quad (97)$$

Réciproquement, il est clair que, si  $\gamma$  est une sous-variété de dimension  $n - 1$  de  $\Sigma$  qui est solution de (97), alors  $\Gamma = \gamma \times \mathbb{R}$  est une solution locale de (81).

Nous avons ainsi établi le résultat suivant.

**Théorème 5.2** Soit  $(\mathcal{N}, [\theta])$  une variété de contact de dimension  $2n + 1$ ,  $F \in \Omega^0(\mathcal{N})$  une fonction telle que  $dF \neq 0 \pmod{[\theta]}$ . Alors, pour tout point de  $\mathcal{N}$ , on peut trouver un voisinage de ce point sur lequel il existe un champ de vecteur de Charpit–Lagrange  $X$  et une hypersurface  $\Sigma$  transverse à  $X$  tels que, une sous-variété  $\Gamma$  de  $\mathcal{N}$  de dimension  $n$  passant par ce point est solution de (81) si et seulement si l’intersection de  $\Gamma$  avec le voisinage est égale à  $\{M \cdot e^{tX}; M \in \gamma, t \in I\}$ , où  $\gamma$  est une sous-variété de  $\Sigma \cap F^{-1}(0)$  telle que  $(\theta|_{\Sigma})|_{\gamma} = d(\theta|_{\Sigma})|_{\gamma} = 0$  et où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$

Nous remarquons que le choix de  $\Sigma$  est arbitraire, pourvu que cette hypersurface soit transverse au champ  $X$ . A vrai dire,  $\Sigma$  est juste l’outil qui nous permet de munir de coordonnées une variété abstraite qui est réellement l’objet important dans la construction : le quotient  $\mathcal{O}/e^{\cdot X}$  d’un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{N}$  par la relation d’équivalence :  $M \sim M'$  si et seulement si  $\exists t \in \mathbb{R}$  tel que  $M' = M \cdot e^{tX}$ . Les classes d’équivalence de cette relation sont juste les trajectoires du flot de  $X$ . Ce quotient  $\mathcal{O}/e^{\cdot X}$  est muni d’une structure de variété, car il est en bijection avec chaque hypersurface  $\Sigma$  transverse à  $X$  (la bijection est obtenue en

prenant le point d'intersection d'une trajectoire avec  $\Sigma$ ) et la structure différentielle ainsi induite par cette bijection ne dépend pas de  $\Sigma$ . De même on peut définir sur  $\mathcal{O}/e^X$  une 1-forme  $\underline{\theta}$  et une fonction  $\underline{F}$  telles que  $\theta$  et  $F$  sont les pull-back de, respectivement,  $\underline{\theta}$  et  $\underline{F}$  par l'application quotient  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/e^X$ .

Le théorème 5.2 est beaucoup puissant qu'il n'y paraît. Apparemment, il nous apprend que nous pouvons réduire la dimension de la sous-variété inconnue d'une unité (en passant de  $\Gamma$  à  $\gamma$ ) et la dimension de la variété ambiante de deux unités (en passant de  $\mathcal{N}$  à  $\Sigma \cap F^{-1}(0)$ ), ce qui constitue déjà en soi un progrès.

Mais en réalité,  $\gamma$  est solution d'un problème très simple à résoudre, si l'on sait utiliser les bonnes coordonnées sur  $\Sigma \cap F^{-1}(0)$ .

## 5.7 Réduction à une variété de contact de codimension 2 et sous-variétés legendriennes

Considérons la sous-variété  $\mathcal{N}_{n-1} := \Sigma \cap F^{-1}(0)$  obtenue précédemment, équipée de la forme  $\theta_{n-1} := \theta|_{\mathcal{N}_{n-1}}$ .

**Lemme 5.4** *La variété  $(\mathcal{N}_{n-1}, [\theta_{n-1}])$  est une variété de contact.*

*Démonstration* — Nous devons montrer que  $\theta_{n-1}$  est une forme de contact. Pour cela considérons, pour  $M \in \mathcal{N}_{n-1}$ ,

$$(K_{n-1})_M : \begin{array}{ccc} T_M \mathcal{N}_{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus (T_M^* \mathcal{N}_{n-1} / [(\theta_{n-1})_M]) \\ V & \longmapsto & (\theta_{n-1}(V), V \lrcorner d\theta_{n-1} \bmod [(\theta_{n-1})_M]) \end{array}$$

(notant  $\theta_{n-1} = (\theta_{n-1})_M$  pour plus de concision) et montrons que le noyau de  $(K_{n-1})_M$  est réduit à  $\{0\}$ . Soit  $V \in \text{Ker}(K_{n-1})_M$ , alors il existe  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\begin{cases} V \in T_M \mathcal{N}_{n-1} \\ \theta_{n-1}(V) = 0 \\ V \lrcorner d\theta_{n-1} = \lambda \theta_{n-1} \end{cases} \iff \begin{cases} dF(V) = 0 \text{ et } V \in T_M \Sigma \\ \theta(V) = 0 \\ V \lrcorner d\theta = \lambda \theta + \mu dF + \nu dz^{2n+1}, \end{cases}$$

où nous avons utilisé le fait que  $T_M \mathcal{N}_{n-1} = \text{Ker} dF_M \cap T_M \Sigma$ . En utilisant  $X \lrcorner d\theta = \frac{\partial}{\partial z^{2n+1}} \lrcorner d\theta = dF$  (cf. (92)), nous déduisons de la dernière relation que :

$$dF(V) = \frac{\partial}{\partial z^{2n+1}} \lrcorner d\theta(V) = -V \lrcorner d\theta\left(\frac{\partial}{\partial z^{2n+1}}\right) = -\nu.$$

Donc, comme  $dF(V) = 0$ ,  $\nu = 0$  et ainsi  $V \lrcorner d\theta = \lambda \theta + \mu dF$ . Cela implique que  $K(V) = (0, \mu dF \bmod [\theta])$  et donc que  $V = \mu X$ . Mais, comme  $X$  est transverse à  $\Sigma$  et  $V$  est tangent à  $\Sigma$ ,  $\mu = 0$  et donc  $V = 0$ .  $\square$

La sous-variété  $\gamma$  obtenue précédemment est contenue dans  $\mathcal{N}_{n-1}$  et, de plus, comme  $\theta|_\gamma = d\theta|_\gamma = 0$ , elle satisfait également  $\theta_{n-1}|_\gamma = d\theta_{n-1}|_\gamma = 0$ . De plus  $\gamma$  est de dimension  $n - 1$ , c'est une sous-variété *legendrienne* de  $(\mathcal{N}_{n-1}, [\theta_{n-1}])$ .

**Définition 5.4** Soit  $(\mathcal{N}, [\theta])$  une variété de contact de dimension  $2n+1$ . Une sous-variété  $\Gamma$  de  $\mathcal{N}$  est dite **legendrienne** si  $\Gamma$  est de dimension  $n$  et si  $\theta|_{\Gamma} = d\theta|_{\Gamma} = 0$ .

Ainsi  $\gamma$  est une solution d'un problème presque identique que celui qui était posé sur  $\Gamma$ . En effet une solution  $\Gamma$  de (81) de dimension  $n$  n'est pas autre chose qu'une sous-variété legendrienne de  $\mathcal{N}$  qui est contenue dans  $\mathcal{M} = F^{-1}(0)$ . En fait  $\gamma$  est solution d'un problème plus simple, puisqu'on peut oublier la contrainte  $\gamma \subset \mathcal{M}$ , celle-ci étant une conséquence de l'inclusion  $\mathcal{N}_{n-1} \subset \mathcal{M}$ .

Reste à savoir à quoi ressemble une variété de contact en général pour comprendre le sens du système  $\theta_{n-1}|_{\gamma} = d\theta_{n-1}|_{\gamma} = 0$ .

## 5.8 La forme normale d'une variété de contact

**Théorème 5.3** Soit  $(\mathcal{N}, [\theta])$  une variété de contact de dimension  $2n+1$ . Alors, pour tout  $M \in \mathcal{N}$ , il existe des coordonnées locales  $(y, p_1, \dots, p_n, x^1, \dots, x^n)$  sur un voisinage de  $M$  et un représentant  $\theta_n$  de  $[\theta]$  tels que

$$\theta = dy - \sum_{i=1}^n p_i dx^i. \quad (98)$$

*Démonstration* — Nous procédons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ . Nous convenons que toute variété de dimension 1 munie d'une 1-forme qui ne s'annule pas est une variété de contact (correspondant au cas  $n = 0$ ). Il suffit dans ce cas de prendre  $\theta_0 = dy$ , où  $y$  est une coordonnée locale sur  $\mathcal{N}_0$ .

Supposons le résultat vrai pour toute variété de contact de dimension  $2n - 1$  et soit  $(\mathcal{N}_n, [\theta_n])$  une variété de contact de dimension  $2n + 1$  et  $M \in \mathcal{N}_n$ . En choisissant une fonction  $F \in \Omega^0(\mathcal{N})$  telle que  $dF \neq 0 \pmod{[\theta_n]}$  sur un voisinage de  $M$  et en appliquant le lemme 5.4, on peut trouver une hypersurface  $\Sigma_n \subset \mathcal{N}_n$  et une sous-variété  $\mathcal{N}_{n-1} := \Sigma_n \cap F^{-1}(0)$  telles que, si  $\theta_{n-1} := \theta_n|_{\mathcal{N}_{n-1}}$ , alors  $(\mathcal{N}_{n-1}, \theta_{n-1})$  est une variété de contact. Par l'hypothèse de récurrence,  $\mathcal{N}_{n-1}$  peut être munie de coordonnées locales  $(y, p_1, \dots, p_{n-1}, x^1, \dots, x^{n-1})$  dans lesquelles (quitte à multiplier  $\theta_{n-1}$  par une fonction définie sur  $\mathcal{N}_{n-1}$  qui ne s'annule pas),  $\theta_{n-1} = dy - \sum_{i=1}^{n-1} p_i dx^i$ .

Soit  $G$  une fonction telle que  $G^{-1}(0) = \Sigma_n$  et  $Y$  le champ de vecteur de Charpit-Lagrange tel que  $\theta_n(Y) = 0$  et  $Y \lrcorner d\theta_n = dG + \mu\theta_n$ . Appliquant le lemme 5.3 nous pouvons modifier  $\theta_n$  en dehors de  $F^{-1}(0)$  de façon à ce que  $\mu = 0$ .

En utilisant le lemme 5.2 sur  $\Sigma_n$ , on peut trouver des coordonnées  $(z^1, \dots, z^{2n})$  sur  $\Sigma_n$  telles que  $Y|_{\Sigma_n} = \frac{\partial}{\partial z^{2n}}$  sur  $\Sigma_n$  (donc en particulier  $dz^i(\frac{\partial}{\partial z^{2n}}) = 0$ , si  $1 \leq i \leq 2n - 1$ ) et  $(z^1, \dots, z^{2n-1})|_{\mathcal{N}_n} = (y, p_1, \dots, p_{n-1}, x^1, \dots, x^{n-1})$ . Dans la suite nous étendons les fonctions  $(y, p_1, \dots, p_{n-1}, x^1, \dots, x^{n-1})$  sur  $\Sigma_n$  en posant  $(y, p_1, \dots, p_{n-1}, x^1, \dots, x^{n-1}) := (z^1, \dots, z^{2n-1})$  sur  $\Sigma_n$ . Nous pouvons a priori décomposer

$$\theta_n|_{\Sigma_n} = \sum_{i=1}^{2n} a_j dz^j.$$

En procédant comme pour la preuve de la proposition 5.3, nous déduisons de  $\theta_n(Y) = 0$  que  $a_{2n} = 0$ . De  $Y \lrcorner d\theta_n = dG$ , nous déduisons que  $(Y \lrcorner d\theta_n)|_{\Sigma_n} = 0$  et donc  $\frac{\partial a_i}{\partial z^{2n}} = 0$ , pour  $i$  tel que  $1 \leq i \leq 2n - 1$ . Sachant que  $\theta_n|_{\mathcal{N}_{n-1}} = \theta_{n-1}$ , nous en déduisons que

$$\theta_n|_{\Sigma_n} = dy - \sum_{i=1}^{n-1} p_i dx^i.$$

Nous pouvons enfin appliquer la proposition 5.3 avec  $F$  et  $\Sigma_n$  pour en déduire que  $\theta_n = -\sum_{i=1}^{n-1} p_i dx^i + z^{2n+1} dF$ , qui est la forme voulue, avec  $F = x^n$  et  $z^{2n+1} = -p_n$ .  $\square$

Nous complétons ce résultat par le théorème suivant.

**Théorème 5.4** *Sur  $(\mathcal{M}, \theta)$  une variété de contact. Soit  $(x^1, \dots, x^n, y, p_1, \dots, p_n)$  des coordonnées locales dans lesquelles  $\theta = dy - \sum_{i=1}^n p_i dx^i$ . Alors pour tout point  $M$  autour duquel ces coordonnées sont définies et pour toute sous-variété legendrienne  $\Gamma \subset \mathcal{M}$  passant par  $M$ , il existe un ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$  contenant  $M$  sur lequel on peut choisir  $n$  fonctions coordonnées  $z^1, \dots, z^n$  telles que :*

- (i) pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , on a soit  $dz^i = dx^i$ , soit  $dz^i = dp_i$  ;
- (ii)  $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n|_{\Gamma \cap \mathcal{O}} \neq 0$ .

La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant.

**Lemme 5.5** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $2n+1$ ,  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n})$  une base de  $V$  et  $(dx^1, \dots, dx^n, dy, dp_1, \dots, dp_n)$  la base, duale, de  $V^*$ . Soit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  et soit  $\varphi \in V^*$  et  $\psi \in \Lambda^2 V^*$  définis par :*

$$\varphi = dy - \sum_{i=1}^n a_i dx^i \text{ et } \psi = - \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx^i.$$

*Soit  $E \subset V$  un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  tel que  $\varphi|_E = \psi|_E = 0$ . Alors il existe  $dz^1, \dots, dz^n \in V^*$  tels que :*

- (i) pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , on a soit  $dz^i = dx^i$ , soit  $dz^i = dp_i$  ;
- (ii)  $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n|_E \neq 0$ .

*Démonstration du lemme 5.5* — Nous montrons ce résultat par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , le résultat est trivial. Supposons le résultat connu pour  $n - 1$ , avec  $n \geq 1$ .

**a)** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $2n + 1$  et  $E \subset V$  un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  tel que  $\varphi|_E = \psi|_E = 0$ . Alors, parmi les 1-formes  $dx^1, \dots, dx^n, dp_1, \dots, dp_n$ , il existe au moins une 1-forme qui ne s'annule pas sur  $E$ . En effet, si ce n'était pas le cas, cela signifierait que toutes ces formes s'annulent sur  $E$  et, comme  $\varphi$  s'annule également sur  $E$ , on en déduirait que  $dy$  s'annulerait aussi sur  $E$ , ce qui est impossible puisque  $\dim E \geq 1$ .

Donc, sans perte de généralité, on peut supposer qu'au moins une des deux propriétés suivantes est vérifiée :  $dx^n|_E \neq 0$  ou  $dp_n|_E \neq 0$ .

**b)** Supposons que  $dx^n|_E \neq 0$ . Alors il existe  $u \in E$  tel que  $dx^n(u) = 1$ . Considérons l'hyperplan  $H := \{v \in V; dx^n(v) = 0\}$ . Alors, comme,  $u \notin H$ ,  $\dim(H \cap E) = n - 1$  et  $E = (H \cap E) \oplus \mathbb{R}u$ .

**c)** Soit  $\underline{V} := \{w \in V; dx^n(w) = dp_n(w) = 0\} \subset H$ . Cet espace est muni des formes  $\underline{\varphi} := \varphi|_{\underline{V}}$  et  $\underline{\psi} := \psi|_{\underline{V}}$ , qui ont pour expressions  $\varphi = dy - \sum_{i=1}^{n-1} a_i dx^i$  et  $\psi = -\sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dx^i$  dans la base  $(dx^1, \dots, dx^{n-1}, dy, dp_1, \dots, dp_{n-1})$ . Considérons la projection  $P : H \rightarrow \underline{V}$  définie par  $P(v) = v - dp_n(v) \frac{\partial}{\partial p_n}$ ,  $\forall v \in H$ . Comme  $dx^n|_H = 0$ , on a

$$\underline{\varphi}(P(v)) = \varphi(v) \text{ et } \underline{\psi}(P(v_1), P(v_2)) = \psi(v_1, v_2), \quad \forall v, v_1, v_2 \in H.$$

On en déduit que  $P(H \cap E)$  satisfait  $\underline{\varphi}|_{P(H \cap E)} = \underline{\psi}|_{P(H \cap E)} = 0$ .

**d)** Par ailleurs la restriction de  $P$  à  $H \cap E$  est un isomorphisme vers son image  $P(H \cap E)$ . En effet soit  $v \in H \cap E$ , alors  $v = P(v) + dp_n(v) \frac{\partial}{\partial p_n}$ . Comme en particulier  $v \in E$ , on a  $\psi(u, v) = 0$ , ce qui nous donne  $\sum_{i=1}^n dx^i(u) dp_i(v) - dp_i(u) dx^i(v) = 0$ , d'où l'on déduit  $dp_n(v) = \sum_{i=1}^{n-1} dp_i(u) dx^i(v) - dx^i(u) dp_i(v) = \sum_{i=1}^{n-1} (dp_i(u) dx^i - dx^i(u) dp_i)(P(v))$ . Donc

$$v = P(v) + \sum_{i=1}^{n-1} (dp_i(u) dx^i - dx^i(u) dp_i) (P(v)) \frac{\partial}{\partial p_n}.$$

Donc  $P|_{H \cap E}$  est un isomorphisme vers son image  $P(H \cap E)$ . Donc  $\dim P(H \cap E) = n - 1$ .

**e)** Ainsi  $P(H \cap E)$  satisfait l'hypothèse de récurrence au niveau  $n - 1$ . On en déduit qu'il existe  $dz^1, \dots, dz^{n-1}$  satisfaisant (i) et  $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^{n-1}|_{P(H \cap E)} \neq 0$ , ce qui entraîne  $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^{n-1}|_{H \cap E} \neq 0$ . On en déduit facilement que  $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^{n-1} \wedge dx^n|_E \neq 0$ .

Le cas où  $dp_n|_E \neq 0$  se traite de façon similaire.  $\square$

*Démonstration du théorème 5.4* — On applique le lemme 5.5 avec  $V = T_M \mathcal{M}$ ,  $E = T_M \Gamma$ ,  $\varphi = \theta_M$  et  $\psi = d\theta_M$ . On obtient qu'il existe des formes  $dz^1, \dots, dz^n$  satisfaisant la propriété (i) du lemme et telles que  $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n|_{T_M \Gamma} \neq 0$ . Par continuité cette propriété reste vraie sur un voisinage de  $M$  dans  $\Gamma$ .  $\square$

## 5.9 Comment décrire une sous-variété legendrienne quelconque

Nous sommes maintenant en mesure de décrire localement n'importe quelle sous-variété legendrienne  $\Gamma$  d'un variété de contact  $(\mathcal{N}, [\theta])$ .

Soit  $M \in \Gamma$ , alors, d'après le théorème 5.3, il existe des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n, y, p_1, \dots, p_n)$  sur un voisinage de  $M$  telles que l'on puisse choisir  $\theta = dy - p_i dx^i$ . Appliquons le théorème 5.4 : il existe un voisinage  $\mathcal{O}$  de  $M$  sur lequel il existe des fonctions  $z^1, \dots, z^n$  satisfaisant les propriétés (i) et (ii) de ce théorème. Quitte à renumérotter les indices des coordonnées  $x^i$ , on peut supposer que  $(z^1, \dots, z^n) = (x^1, \dots, x^k, p_{k+1}, \dots, p_n)$ , où  $1 \leq k \leq n$ , d'après (i) et  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \wedge dp_{k+1} \wedge \dots \wedge dp_n|_{\Gamma \cap \mathcal{O}} \neq 0$ . Raisonnant comme dans la preuve de la proposition 5.1, on en déduit que, quitte à choisir  $\mathcal{O}$  plus petit,  $\Gamma \cap \mathcal{O}$  (ou plus précisément son image dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  par la carte locale  $(x^1, \dots, x^n, y, p_1, \dots, p_n)$ ) est localement

le graphe d'une fonction des variables  $z = (z^1, \dots, z^n) := (x^1, \dots, x^k, p_{k+1}, \dots, p_n)$ . Cela signifie qu'il existe un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  et des applications  $\xi^{k+1}, \dots, \xi^n, v, \psi_1, \dots, \psi_k$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}$  telles que  $\Gamma \cap \mathcal{O}$  soit la solution des équations

$$\begin{cases} (x^1, \dots, x^n) &= \xi(z) := (z^1, \dots, z^k, \xi^{k+1}(z), \dots, \xi^n(z)) \\ y &= v(z) \\ (p_1, \dots, p_n) &= \psi(z) := (\psi_1(z), \dots, \psi_k(z), z^{k+1}, \dots, z^n) \end{cases}$$

Comme  $\Gamma$  est legendrienne, on doit avoir  $(\xi, v, \psi)^*(dy - p_i dx^i) = 0$ . Introduisons la fonction  $u$  définie par  $u(z) := v(z) - \sum_{i=k+1}^n z^i \xi^i(z)$ . Alors, comme

$$dy - p_i dx^i = d \left( y - \sum_{i=k+1}^n p_i x^i \right) - \sum_{i=1}^k p_i dx^i + \sum_{i=k+1}^n x^i dp_i,$$

on a :

$$\begin{aligned} (\xi, v, \psi)^*(dy - p_i dx^i) &= du - \sum_{i=1}^k \psi_i(z) dz^i + \sum_{i=k+1}^n \xi^i(z) dz^i \\ &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial u}{\partial z^i} - \psi_i \right) (z) dz^i + \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial z^i} + \xi^i \right) (z) dz^i. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(\psi_1, \dots, \psi_k) = \left( \frac{\partial u}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial z^k} \right) \text{ et } (\xi^{k+1}, \dots, \xi^n) = \left( -\frac{\partial u}{\partial z^{k+1}}, \dots, -\frac{\partial u}{\partial z^n} \right).$$

Finalement

$$\begin{cases} (x^1, \dots, x^n) &= \left( z^1, \dots, z^k, -\frac{\partial u}{\partial z^{k+1}}(z), \dots, -\frac{\partial u}{\partial z^n}(z) \right) \\ y &= u(z) + z^{k+1} \frac{\partial u}{\partial z^{k+1}}(z) \cdots + z^n \frac{\partial u}{\partial z^n}(z) \\ (p_1, \dots, p_n) &= \left( \frac{\partial u}{\partial z^1}(z), \dots, \frac{\partial u}{\partial z^k}(z), z^{k+1}, \dots, z^n \right). \end{cases} \quad (99)$$

## 5.10 Conclusion

Nous avons obtenu ainsi une méthode générale pour décrire **localement** toutes les solutions d'une équation du type (74), sous l'hypothèse :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \neq 0. \quad (100)$$

- (i) nous reformulons cette équation sous la forme du système différentiel extérieur (80) et nous calculons le champ de Charpit–Lagrange donné par la formule (87) ;

- (ii) nous choisissons une hypersurface  $\Sigma$  transverse à  $X$  ; sous l'hypothèse (100), on a  $X \lrcorner \omega \neq 0$ , donc, comme  $X$  est transverse à  $\Sigma$ ,  $X \lrcorner \omega|_{\Sigma} \neq 0$  ;
- (iii) à partir d'une fonction  $u$  de  $(n-1)$  variables  $(z^1, \dots, z^{n-1})$  et en utilisant (99), nous fabriquons une sous-variété  $\gamma \subset \Sigma \cap F^{-1}(0)$  legendrienne pour la forme de contact  $\theta|_{\Sigma \cap F^{-1}(0)}$  ; si nous choisissons  $(z^1, \dots, z^{n-1})$  de sorte que  $X \lrcorner \omega$  est proportionnel à  $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^{n-1}$ , alors la solution est particulièrement simple<sup>10</sup> et garantit que  $(X \lrcorner \omega|_{\Sigma})|_{\gamma} \neq 0$  ;
- (iv) nous obtenons une solution  $\Gamma$  de (80) en posant  $\Gamma = \{M \cdot e^{tX} ; M \in \gamma, t \in I\}$ , comme dans le théorème 5.2. La condition  $\omega|_{\Gamma} \neq 0$  est une conséquence de  $(X \lrcorner \omega|_{\Sigma})|_{\gamma} \neq 0$ .

---

10. elle correspond à  $k = n$  dans (99)



## 6 Systèmes pfaffiens

$$d\alpha^i = \beta_j^i \wedge \alpha^j$$

Application à  $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ .

## 7 La théorie de Cartan–Kähler

### 7.1 Le but recherché

Nous souhaitons résoudre au moins *localement* n'importe quelle équation aux dérivées partielles, à savoir une relation de la forme

$$F(x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x), \dots, \partial^k u(x)) = 0, \quad (101)$$

dans laquelle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $F$  est une fonction régulière —qui peut être à valeur réelle ou vectorielle— l'inconnue est une fonction  $u$  de la variable  $x$  et  $\partial^j u$  représente l'ensemble des dérivées partielles d'ordre  $j$  de  $u$  par rapport à  $x$ . Comme nous l'avons déjà vu dans certains exemples, il est possible de traduire l'équation (101) en lui associant une variété  $\mathcal{N}$  munie de 1-formes  $(\theta^{\alpha_1})_{\alpha_1 \in A_1}$ , de 2-formes  $(\varphi^{\alpha_2})_{\alpha_2 \in A_2}$ , de 3-formes  $(\psi^{\alpha_3})_{\alpha_3 \in A_3}$ , etc. et d'une  $m$ -forme  $\omega$  tels que les solutions de l'équation (101) correspondent localement aux sous-variétés  $\Gamma \subset \mathcal{N}$  qui sont solutions de :

$$\begin{cases} \theta^{\alpha_1}|_{\Gamma} = 0, & \text{pour } \alpha_1 \in A_1 \\ \varphi^{\alpha_2}|_{\Gamma} = 0, & \text{pour } \alpha_2 \in A_2 \\ \psi^{\alpha_3}|_{\Gamma} = 0, & \text{pour } \alpha_3 \in A_3 \\ & \text{etc.} \end{cases} \quad (102)$$

et de la condition d'indépendance

$$\omega|_{\Gamma} \neq 0. \quad (103)$$

Par exemple, si  $k = 2$ , si  $x$  désigne une variable dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  et si  $u$  une application de  $U$  vers  $\mathbb{R}^n$ , nous considérons l'espace des jets d'ordre 2 de  $U$  vers  $\mathbb{R}^n$  :

$$J^2(U, \mathbb{R}^n) := \{(x^a, u^i, p_a^i, p_{a_1 a_2}^i) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)\},$$

où  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des applications linéaires de  $\mathbb{R}^m$  vers  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , l'ensemble des applications bilinéaires symétriques de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  vers  $\mathbb{R}^n$ . Cet espace est muni des 1-formes de contact

$$\theta^i := dy^i - p_a^i dx^a, \quad \theta_a^i := dp_a^i - p_{ab}^i dx^b.$$

A toute application  $u$  de  $U$  vers  $\mathbb{R}^n$  nous pouvons associer son 2-jet  $j^2 u$ , l'application de  $U$  vers  $J^2(U, \mathbb{R}^n)$ , définie par  $j^2 u(x) = (x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x))$ . Cette application sera solution de (101) ssi l'image de  $j^2 u$  est contenue dans la sous-variété  $\mathcal{N}$  de  $J^2(U, \mathbb{R}^n)$

définie par les équations  $F(x^a, y^i, p_a^i, p_{ab}^i) = 0$ . Par abus de notation, nous notons encore  $\theta^i$  et  $\theta_a^i$  les restrictions de ces formes à  $\mathcal{N}$ . Nous pouvons alors ramener l'étude locale des solutions de (101) à celle des sous-variétés  $\Gamma$  de  $\mathcal{N}$  telles que  $\theta^i|_\Gamma = \theta_a^i|_\Gamma = 0$  et  $\omega|_\Gamma \neq 0$ .

Cette démarche se généralise si l'on remplace l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  par une variété  $\mathcal{M}$  de dimension  $m$ ,  $u$  par une application de  $\mathcal{M}$  vers une autre variété, ou par une section d'un fibré au-dessus de  $\mathcal{M}$ . Il est alors possible définir des espaces de jets adaptés, pour n'importe quel ordre et d'arriver à un système du même type.

## 7.2 Une précaution indispensable : fermer le système

Nous savons que, si  $\Gamma$  est solution de  $\theta^{\alpha_1}|_\Gamma = 0$ ,  $\varphi^{\alpha_2}|_\Gamma = 0$ ,  $\psi^{\alpha_3}|_\Gamma = 0$ , etc., alors les relations  $d\theta^{\alpha_1}|_\Gamma = 0$ ,  $d\varphi^{\alpha_2}|_\Gamma = 0$ ,  $d\psi^{\alpha_3}|_\Gamma = 0$ , etc. sont aussi satisfaites. Par ailleurs nous avons vu sur les exemples précédents que ces conditions jouent un rôle *essentiel* dans la résolution du système. Par conséquent, **nous ne devons jamais oublier d'inclure ces conditions** lorsque nous écrivons le système.

C'est pourquoi dans la suite, nous supposons que ces conditions sont déjà implicitement incluses dans le système. Cela signifie que, par exemple, les conditions  $d\theta^{\alpha_1}|_\Gamma = 0$  sont des conséquences algébriques des conditions  $\varphi^{\alpha_2}|_\Gamma = 0$ , les conditions  $d\varphi^{\alpha_2}|_\Gamma = 0$  sont des conséquences algébriques des conditions  $\psi^{\alpha_3}|_\Gamma = 0$ , etc. Un tel système est dit *fermé*. Si on vous propose d'étudier un système qui ne satisfait pas ces conditions, exigez tout en restant poli d'ajouter les 2-formes  $d\theta^{\alpha_1}$  à la liste des 2-formes  $\varphi^{\alpha_2}$ , les 3-formes  $d\varphi^{\alpha_2}$  aux 3-formes  $\psi^{\alpha_3}|_\Gamma$ , etc., afin d'obtenir un système fermé. Une fois cela fait, vous pouvez commencer l'étude du système.

Tout cela peut se formaliser comme suit.

**Définition 7.1** *Etant donnée une famille  $\mathcal{F} = \{\theta^{\alpha_1}, \varphi^{\alpha_2}, \psi^{\alpha_3}, \dots\} \subset \Omega^\bullet(\mathcal{N})$ , nous notons  $\mathcal{I}(\mathcal{F})$  l'idéal de  $(\Omega^\bullet(\mathcal{N}), +, \wedge)$  engendré par  $\mathcal{F}$ .*

Si la famille  $\mathcal{F}$  est finie,  $\mathcal{I}(\mathcal{F})$  est simplement égal à :

$$\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{\alpha \in A_1} \theta^{\alpha_1} \wedge \pi_\alpha + \sum_{\beta \in A_2} \varphi^{\alpha_2} \wedge \pi_\beta + \sum_{\gamma \in A_3} \psi^{\alpha_3} \wedge \pi_\gamma + \dots; \pi_\alpha, \pi_\beta, \pi_\gamma, \dots \in \Omega^\bullet(\mathcal{N}) \right\}.$$

Il est facile de montrer que le système (102) est équivalent à la condition  $\sigma|_\Gamma = 0$ ,  $\forall \sigma \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$ .

**Définition 7.2** *Nous dirons que le système est fermé si,  $\forall \sigma \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$ ,  $d\sigma \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$ .*

## 7.3 L'idée de départ

Une fois cette traduction faite, nous sommes face à un problème analogue à celui qui consiste à intégrer un champ de vecteur, avec deux différences essentielles :

- (i) Au lieu d'une condition sur le vecteur tangent ou la droite tangente à une trajectoire, nous imposons une condition sur le sous-espace tangent à une sous-variété de dimension quelconque  $p$ . Cela est tout à fait normal pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. L'objet géométrique dans lequel cette condition prend place est, en chaque point  $M \in \mathcal{N}$ , la **grassmannienne** des sous-espaces vectoriels de dimension  $p$  de  $T_M \mathcal{N}$  :

$$Gr_p(T_M \mathcal{N}) := \{E : \text{sous-espace vectoriel de } T_M \mathcal{N} \text{ de dimension } p\}.$$

- (ii) En général, en un point  $M$  de  $\Gamma$ , le système (102) ne détermine pas de façon unique la valeur l'espace tangent à la solution  $\Gamma$ , mais juste un sous-ensemble de  $Gr_p(T_M \mathcal{N})$ .

Pour résoudre ce problème l'idée très simple est de construire une famille de solutions de (102) de dimension croissante et emboîtées les unes dans les autres, en résolvant une suite de problèmes à une variable.

- Nous partons d'un point  $M_0 \in \mathcal{N}$  ;
- puis nous cherchons une courbe  $\Gamma_1$  contenant  $M_0$  qui soit solution du système (102). A ce niveau, il suffit juste d'écrire les équations  $\theta^{\alpha_1}|_{\Gamma_1} = 0$  et il n'est pas nécessaire d'écrire les équations  $\varphi^{\alpha_2}|_{\Gamma_1} = 0$ ,  $\psi^{\alpha_3}|_{\Gamma_1} = 0$ , etc., car ces équations sont vides, puisque les formes de degrés supérieur à 1 s'annulent forcément sur une courbe ;
- ensuite nous cherchons une surface  $\Gamma_2$  contenant  $\Gamma_1$  qui soit encore solution de (102), ce qui revient à résoudre  $\theta^{\alpha_1}|_{\Gamma_2} = 0$  et  $\varphi^{\alpha_2}|_{\Gamma_2} = 0$ , les autres équations étant vides ;
- et ainsi de suite.

Nous obtiendrons ainsi une suite

$$\{M_0\} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \cdots \subset \Gamma_p = \Gamma$$

de sous-variétés intégrales emboîtées de dimension croissante, que nous appellerons un *drapeau* de sous-variétés.

Si nous devons imposer une condition d'indépendance (103), nous pouvons procéder comme suit. En général,  $\omega$  est de la forme  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ , où les  $x^1, \dots, x^m$  sont les composantes d'une application  $x : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$  dont la différentielle est de rang  $m$  en tout point. Nous pouvons choisir de construire  $\Gamma_1$  de sorte qu'on ait :

$$dx^1|_{\Gamma_1} \neq 0, \text{ et } dx^2|_{\Gamma_1} = \cdots = dx^m|_{\Gamma_1} = 0,$$

ce qui revient à demander à ce que l'image de  $\Gamma_1$  par l'application  $x = (x^1, \dots, x^m) : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$  soit contenue dans une droite d'équation parallèle à l'axe des  $x^1$ . Puis nous pouvons construire  $\Gamma_2$  de façon à avoir :

$$dx^1 \wedge dx^2|_{\Gamma_2} \neq 0, \text{ et } dx^3|_{\Gamma_2} = \cdots = dx^m|_{\Gamma_2} = 0,$$

et ainsi de suite.

Notons qu'il peut être commode de procéder ainsi même si le problème que l'on cherche à résoudre ne comporte pas de condition d'indépendance comme (102), car en choisissant

un système de fonctions  $(x^1, \dots, x^m)$  qui sont transverses aux formes  $\theta^{\alpha_1}, \varphi^{\alpha_2}, \psi^{\alpha_3}, \dots$ , cela permet de représenter la solution sous forme d'un graphe d'une fonction de ces variables.

Supposons sans perte de généralité que  $x(M_0) = 0$ . La courbe  $\Gamma_1$  recherchée peut être paramétrisée par une application  $\gamma_1$  définie sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathcal{N}$  telle que  $\gamma_1(0) = M_0$  et  $x \circ \gamma_1(x^1) = (x^1, 0, \dots, 0)$ . Les conditions  $\theta^{\alpha_1}|_{\Gamma_1} = 0$  forment un système de contraintes sur le vecteur  $\frac{\partial \gamma_1}{\partial x^1}$ . On peut donc voir la construction de  $\Gamma_1$  comme la résolution d'un problème analogue à celui d'intégrer un champ de vecteur, la différence étant ici, qu'au lieu de prescrire la valeur du vecteur  $\frac{\partial \gamma_1}{\partial x^1}$  en chaque point, on lui impose d'appartenir à un sous-ensemble de l'espace tangent.

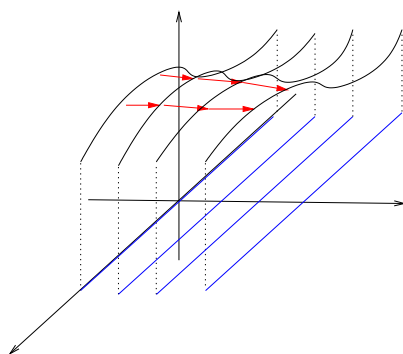


FIGURE 1 – La construction de la solution  $\Gamma_2$  à partir de la solution  $\Gamma_1$ .

La surface  $\Gamma_2$  est l'image d'un plongement  $\gamma_2$  définie sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $\mathcal{N}$  tel que  $\gamma_2(x^1, 0) = \gamma_1(x^1)$ , cette condition jouant le rôle de « condition initiale ». Les conditions  $\theta^{\alpha_1}|_{\Gamma_2} = 0$  et  $\varphi^{\alpha_2}|_{\Gamma_2} = 0$  imposent des contraintes sur les plans tangents à  $\Gamma_2$ . L'idée est de décomposer la surface en une infinité de lignes, d'équation  $x^2 = \text{Constante}$ . On passe d'une ligne à une autre ligne *infinitement proche* en déplaçant chacun de ses points suivant le vecteur  $\frac{\partial \gamma_2}{\partial x^2}$  (noter que, si l'on se déplace suivant un vecteur de la forme  $\frac{\partial \gamma_2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \gamma_2}{\partial x^1}$ , cela ne change pas la dynamique de la courbe). Nous aurons besoin pour cela d'un théorème de Cauchy pour des équations ordinaires dans lesquelles la fonction inconnue est une courbe et sa variation infinitésimale par rapport au temps  $x^2$  est définie par la donnée de  $\frac{\partial \gamma_2}{\partial x^2}$  le long de cette courbe. Ce sera le théorème de Cauchy–Kowalevski. Pour être appliqué, ce résultat nécessite de faire des hypothèses de régularité très fortes, à savoir que les données doivent être analytiques réelles, ce qui est malheureusement une limitation sévère de la théorie.

## 7.4 Quelques notions sur les grassmanniennes

Comme nous l'avons vu, si  $V$  est un espace vectoriel et  $p \in \mathbb{N}$  un entier plus petit que la dimension de  $V$ , alors la grassmannienne  $Gr_p(V)$  est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $p$  de  $V$ .

Supposons que  $V$  est de dimension finie, égale à  $n$ . Alors nous allons voir que  $Gr_p(V)$  a une structure de variété de dimension  $p(n-p)$ . Considérons pour cela un système de coordonnées  $(z^1, \dots, z^n)$  dans une base de  $V$ . Alors une base de  $\Lambda^p V^*$  est la famille  $(dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$ . Pour tout  $E \subset Gr_p(V)$ , il existe  $I = (i_1, \dots, i_p)$  tel que  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$  et  $dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p}|_E \neq 0$ . Donc, si nous posons

$$Gr_I(V) := \{E \in Gr_p(V); dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p}|_E \neq 0\}, \text{ pour } I = (i_1, \dots, i_p),$$

alors  $Gr_p(V) = \cup_I Gr_I(V)$ . Notons  $(x^1, \dots, x^p) := (z^{i_1}, \dots, z^{i_p})$  et soit  $(y^1, \dots, y^{n-p})$  des coordonnées supplémentaires, c'est à dire telles que  $\{x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{n-p}\} = \{z^1, \dots, z^n\}$ . Alors,  $\forall E \in Gr_I(V)$ ,  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p|_E \neq 0$ , donc il existe une unique base  $(u_1, \dots, u_p)$  de  $E$  telle que  $dx^i(u_j) = \delta_j^i$ ,  $\forall i, j$ . Cela définit une application linéaire  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{n-p})$  qui, au  $i$ -ème vecteur de base  $e_i$  de  $\mathbb{R}^p$ , associe le vecteur  $(dy^1(u_i), \dots, dy^{n-p}(u_i))$ . Le sous-espace  $E$  peut alors être identifié avec le graphe de  $A$ . Dans les coordonnées canoniques sur  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^{n-p}$ ,  $A$  est définie par une matrice  $p \times (n-p)$  :

$$\begin{pmatrix} dy^1(u_1) & \dots & dy^1(u_p) \\ \vdots & & \vdots \\ dy^{n-p}(u_1) & \dots & dy^{n-p}(u_p) \end{pmatrix},$$

que l'on peut identifier avec un élément de  $\mathbb{R}^{p(n-p)}$ . Cela nous fournit une bijection

$$Gr_I(V) \longrightarrow \mathbb{R}^{p(n-p)}.$$

que nous pouvons utiliser comme carte locale sur  $Gr_p(V)$ . Ainsi la grassmannienne  $Gr_p(V)$  est munie d'une structure de variété de dimension  $p(n-p)$ . On peut démontrer que, sur une intersection  $Gr_I(V) \cap Gr_J(V)$ , les applications de changement de cartes sont régulières (ce sont des applications rationnelles), cette variété est donc analytique réelle.

## 7.5 Une première difficulté

Lorsque nous résolvons un problème de Cauchy pour prouver, par exemple, l'existence d'une surface  $\Gamma_2$  en construisant une famille d'applications  $[\gamma_2(\cdot, x^2) : x^1 \mapsto \gamma_2(x_1, x_2)]$  dépendant de  $x^2$ , les équations que doit satisfaire  $\frac{\partial \gamma_2}{\partial x^2}$  sont  $\theta^{\alpha_1}(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x^2}) = 0$  et  $\frac{\partial \gamma_2}{\partial x^1} \lrcorner \varphi^{\alpha_2}(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x^2}) = 0$ . Les coefficients des premières équations sont des fonctions dépendant uniquement du point  $\gamma_2(x^1, x^2)$  uniquement, alors que les deuxièmes équations dépendent de  $\gamma_2(x^1, x^2)$  et de  $\frac{\partial \gamma_2}{\partial x^1}(x^1, x^2)$ .

Le seul résultat qui permet de prouver l'existence de ce type d'équation en général est le théorème de Cauchy–Kowalevski.

**Théorème 7.1** *Théorème de Cauchy–Kowalevski — à faire*

Les hypothèses d'analyticité dans ce théorème sont la raison pour laquelle nous devons dans la suite supposer que toutes les données sont de classe  $\mathcal{C}^\omega$ , c'est à dire *analytiques*. Cette hypothèse est nécessaire en général, à cause de l'exemple suivant.

*A faire* — modéliser  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ , puis traduire l'algorithme en EDP pour mettre en évidence le fait qu'on doit travailler avec des données analytiques

## 7.6 Un exemple : les équations de Maxwell

Soit  $\mathbb{M}$  l'espace-temps de Minkowski. On le modélise par un espace affine réel de dimension 4 associé à un espace vectoriel  $\vec{\mathbb{M}}$  muni d'une forme bilinéaire symétrique de signature  $(+, -, -, -)$ , le produit scalaire de Minkowski  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dans des coordonnées  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  « orthonormées » pour ce produit scalaire, si  $u, v \in \vec{\mathbb{M}}$ , on a  $\langle u, v \rangle = u^0 v^0 - u^1 v^1 - u^2 v^2 - u^3 v^3$ , où  $u^\mu := x^\mu(u)$ ,  $v^\mu := x^\mu(v)$ ,  $\forall \mu = 0, 1, 2, 3$ . Nous munissons  $\mathbb{M}$  de la forme volume  $\omega := dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ . Ici  $x^0 = t$  représente la coordonnée de temps,  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$  est la composante en espace. Etant donné un choix de coordonnées orthonormées  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  sur  $\mathbb{M}$ , le champ électromagnétique peut se représenter par la donnée d'une application  $(E, B) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $E$  représentant le champ électrique et  $B$  le champ magnétique, dans le référentiel associé à ces coordonnées.

Nous avons vu à la section 3.4.5 que les équations de Maxwell avec source  $(\rho, \vec{j})$  (où  $\rho$  est la densité volumique de charge électrique et  $\vec{j} = (j^1, j^2, j^3)$  est la densité de courant électrique) peuvent s'écrire :

$$dF = 0 \text{ et } d(\star F) = 4\pi J, \quad (104)$$

où

$$F = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 + (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge dx^0,$$

$$\star F := E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2 - (B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3) \wedge dx^0$$

et  $J := j \lrcorner \omega$ , avec  $j = \rho \frac{\partial}{\partial x^0} + j^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + j^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + j^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$ . Par conséquent le champ électromagnétique s'interprète comme les composantes d'une 2-forme sur l'espace de Minkowski. Nous voyons par ailleurs qu'une condition nécessaire à l'existence d'une solution est que  $dJ = 0$ , puisque  $dd(\star F) = 0$ . Cette condition équivaut à la relation  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$  et traduit la *conservation de la charge électrique*, une loi essentielle de la physique.

### 7.6.1 Ecriture sous forme d'un système différentiel extérieur

Considérons la variété  $\mathbb{M} \times \Lambda^2 \vec{\mathbb{M}}^*$ , que nous identifions, via les coordonnées  $x^\mu$  sur  $\mathbb{M}$  et la base  $(dx^\mu \wedge dx^\nu)_{\mu < \nu}$  de  $\Lambda^2 \vec{\mathbb{M}}^*$ , avec

$$\mathbb{R}^4 \times \Lambda(\mathbb{R}^4)^* \simeq \left\{ \left( x^0, x^1, x^2, x^3, \begin{pmatrix} 0 & z_{01} & z_{02} & z_{03} \\ z_{10} & 0 & z_{12} & z_{13} \\ z_{20} & z_{21} & 0 & z_{23} \\ z_{30} & z_{31} & z_{32} & 0 \end{pmatrix} \right); x^\mu, z_{\mu\nu} \in \mathbb{R}, z_{\mu\nu} + z_{\nu\mu} = 0 \right\}.$$

A tout champ électromagnétique  $F \simeq (E, B)$  sur  $\mathbb{M}$ , nous pouvons associer son graphe

$$\Gamma := \left\{ \left( x, \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} (x) \right); x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R} \right\},$$

qui est une sous-variété de  $\mathbb{M} \times \Lambda^2 \vec{\mathbb{M}}^*$  telle que  $\omega|_{\Gamma} \neq 0$ ;  $\Gamma$  est l'image de l'application  $j^0 F$  qui, à  $x \in \mathbb{M}$ , associe  $(x, F_x) \in \mathbb{M} \times \Lambda^2 \vec{\mathbb{M}}^*$ .

Nous considérons les 2-formes sur  $\mathbb{M} \times \Lambda^2 \vec{\mathbb{M}}^*$  :

$$\Phi := z_{01} dx^0 \wedge dx^1 + z_{02} dx^0 \wedge dx^2 + z_{01} dx^0 \wedge dx^2 + z_{23} dx^2 \wedge dx^3 + z_{31} dx^3 \wedge dx^1 + z_{12} dx^1 \wedge dx^2$$

et

$$\Psi := z_{23} dx^0 \wedge dx^1 + z_{31} dx^0 \wedge dx^2 + z_{12} dx^0 \wedge dx^2 - z_{01} dx^2 \wedge dx^3 - z_{02} dx^3 \wedge dx^1 - z_{03} dx^1 \wedge dx^2.$$

Alors  $F$  est solution des équations de Maxwell ssi  $(j^0 F)^* d\Phi = (j^0 F)^*(d\Psi - 4\pi J) = 0$ . Ce système revient donc au système différentiel extérieur suivant :

$$d\Phi|_{\Gamma} = (d\Psi - 4\pi J)|_{\Gamma} = 0, \quad \omega|_{\Gamma} \neq 0. \quad (105)$$

A nouveau, nous voyons que la condition  $d(J \lrcorner \omega) = 0$  est essentielle, car elle est nécessaire et suffisante pour que le système soit fermé.

### 7.6.2 Déroulement de l'algorithme

Tâchons de résoudre le système de Maxwell (105) suivant la stratégie décrite au paragraphe 7.3. Nous cherchons les drapeaux de sous-variétés  $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_3 \subset \Gamma_4$  (où  $\dim \Gamma_p = p$ ) qui sont solutions de (105). Chaque sous-variété  $\Gamma_p$  est le graphe d'une application  $F_p$  à valeurs dans  $\Lambda^2 \vec{\mathbb{M}}^*$  sur un sous-espace de dimension  $p$  de  $\mathbb{M} \simeq \mathbb{R}^4$ . Nous pouvons convenir d'imposer que :

- $F_0$  est définie sur  $\{(0, 0, 0, 0)\}$ ;
- $F_1$  est définie sur la droite d'équation  $x^2 = x^3 = x^0 = 0$ ;
- $F_2$  est définie sur le plan d'équation  $x^3 = x^0 = 0$ ;
- $F_3$  est définie sur l'hyperplan d'équation  $x^0 = 0$ ;
- $F_4$  est définie sur  $\mathbb{R}^4$ .

Le système (105) n'impose aucune contrainte sur  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , pour des raisons de dimension et parce que  $d\Phi$  et  $d\Psi - 4\pi J$  sont des 3-formes. Sur  $\Gamma_3$ , le système nous donne les conditions :

$$\frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3} = 0 \text{ et } \frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} = 4\pi\rho. \quad (106)$$

Les données initiales sont les valeurs de  $E$  et  $B$  sur le plan d'équation  $x^3 = x^0 = 0$ . Suivant la démarche décrite au paragraphe 7.3, nous pouvons choisir librement les valeurs de  $B^1, B^2, E^1$  et  $E^2$  sur l'hyperplan d'équation  $x^0 = 0$  et alors les valeurs de  $B^3$  et  $E^3$  sont données par :

$$B^3(x^1, x^2, x^3, 0) = B^3(x^1, x^2, 0, 0) - \int_0^{x^3} \left( \frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} \right) (x^1, x^2, s, 0) ds$$

et

$$E^3(x^1, x^2, x^3, 0) = E^3(x^1, x^2, 0, 0) + \int_0^{x^3} \left( 4\pi\rho - \frac{\partial E^1}{\partial x^1} - \frac{\partial E^2}{\partial x^2} \right) (x^1, x^2, s, 0) ds.$$

Lorsque nous passons de  $\Gamma_3$  à  $\Gamma_4$ , les équations (105) nous imposent les relations

$$\frac{\partial B}{\partial x^0} = -\text{rot}E \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial x^0} = \text{rot}B - 4\pi\vec{j}, \quad (107)$$

qui nous permettent en principe de déterminer les valeurs de  $E$  et  $B$  connaissant leurs valeurs sur l'hyperplan d'équation  $x^0 = 0$ , par exemple en utilisant le théorème de Cauchy–Kowalevski.

Cependant une difficulté apparaît ici : nous n'avons pas tenu compte des autres équations  $\text{div}B = 0$  et  $\text{div}E = 4\pi\rho$  pour étendre les fonctions  $E$  et  $B$  en dehors de l'hyperplan  $\{x^0 = 0\}$ . Or ces relations, que nous avons pu imposer sans difficulté sur l'hyperplan  $\{x^0 = 0\}$ , doivent être satisfaites partout pour obtenir une solution des équations de Maxwell.

Nous sommes ici sauvés par une propriété miraculeuse des équations de Maxwell. Dérivons  $\text{div}B$  par rapport à  $x^0$  et utilisons (107) :

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (\text{div}B) = \text{div} \left( \frac{\partial B}{\partial x^0} \right) = \text{div} (-\text{rot}E) = 0$$

et, de même, pour  $\text{div}E$  :

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (\text{div}E) = \text{div} \left( \frac{\partial E}{\partial x^0} \right) = \text{div} (\text{rot}B - 4\pi\vec{j}) = -4\pi\text{div}\vec{j},$$

d'où nous déduisons

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (\text{div}E - 4\pi\rho) = -4\pi \left( \text{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial x^0} \right).$$

Cette dernière quantité s'annule, à cause de la loi de conservation de la charge électrique. Par conséquent, si nous choisissons  $E$  et  $B$  solutions de (107), nous en déduisons que  $\text{div}B$  et  $\text{div}E - 4\pi\rho$  ne dépendent pas de  $x^0$ . Comme ces quantités s'annulent pour  $x^0 = 0$ , elles sont donc nulles partout et nous avons obtenu une solution des équations de Maxwell.

La propriété miraculeuse que nous avons utilisée est que  $d(J \lrcorner \omega) = 0$ , qui équivaut ici au fait que le système est fermé. Elle nous a permis de résoudre notre système suivant la méthode décrite au paragraphe 7.3 en choisissant à chaque nouvelle intégration d'utiliser une partie des équations seulement, à savoir celles qui nous donnaient des informations sur les dérivées par rapport à la nouvelle variable ajoutée (et que Cartan appelle *équations principales*) : nous avons utilisé (106) pour ajouter la variable  $x^3$  et (107) pour ajouter la variable  $x^0$ . Néanmoins les relations que nous avons ignorées dans ces étapes d'intégration se propagent malgré tout.

Suivant Cartan, nous dirons qu'un système qui possède une telle propriété est *involutif*. Pour qu'un système soit involutif, il est nécessaire qu'il soit fermé. Néanmoins cette condition n'est pas suffisante, comme nous allons le voir dans des exemples un peu plus complexes.



### 7.6.3 Un décompte des degrés de liberté : généralités

Etant donné un point  $M \in \mathcal{M}$ , nous appelons un *élément intégral du système (102)* en  $M$  un sous-espace vectoriel  $E$  de  $T_M\mathcal{M}$  tel que  $\sigma_M|_E = 0, \forall \sigma \in \mathcal{I}$  (voir paragraphe 7.2), ce qui équivaut aux conditions :

$$\theta_M^{\alpha_1}|_E = \varphi_M^{\alpha_2}|_E = \psi_M^{\alpha_3}|_E = \dots = 0. \quad (108)$$

Pour tout  $p$ , nous notons  $Gr_p(\mathcal{I}, T_M\mathcal{M})$  l'ensemble des éléments intégraux de dimension  $p$  de (102) en  $M$ . Dans la suite nous supposons que  $Gr_p(\mathcal{I}, T_M\mathcal{M})$  est une sous-variété de  $Gr_p(T_M\mathcal{M})$  ou, à défaut, nous supposons qu'un ouvert de  $Gr_p(\mathcal{I}, T_M\mathcal{M})$  est une sous-variété.

Des informations cruciales pour reconnaître si un système est involutif peuvent être obtenues en analysant comment, en un point  $M \in \mathcal{M}$ , les équations (108) déterminent un élément intégral  $E$  de dimension  $p$  en  $M$ . Une première façon de le faire consiste à déterminer directement le nombre de degrés de liberté autorisés par les équations (108), c'est à dire la dimension de  $Gr_p(\mathcal{I}, T_M\mathcal{M})$ . Une deuxième façon de le faire consiste à suivre les étapes de la construction d'un élément intégral de dimension  $p$  en fabriquant un drapeau d'éléments intégraux

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_p,$$

dans lequel  $\dim E_k = k$ , pour tout  $k$ . Cette construction commence par le choix de  $E_0$  et s'opère en résolvant des systèmes linéaires, appelés *systèmes polaires* par Elie Cartan, pour passer d'un élément  $E_k$  à un élément  $E_{k+1}$ .

Le rang de ces systèmes linéaires croît avec  $k$ , puisqu'à chaque nouvelle étape on ajoute de nouvelles équations aux précédentes. Pour cette raison, suivant Cartan, nous noterons

- $s_0$  : le rang du premier système polaire ;
- $s_0 + s_1$  : le rang du deuxième système polaire ;
- $s_0 + s_1 + s_2$  : le rang du troisième système polaire ;
- etc.

Chaque entier  $s_k$  est appelé *caractère*. Nous considérerons également les systèmes linéaires homogènes associés, appelés *système polaires réduits*. Les rangs des systèmes polaires réduits seront notés respectivement  $s'_0, s'_0 + s'_1, s'_0 + s'_1 + s'_2, \dots$ . Les entiers  $s'_k$  sont appelés *caractères réduits*.

### 7.6.4 Un décompte des degrés de liberté : les équations de Maxwell

Voyons ce que cela donne pour le système de Maxwell et pour l'ensemble des éléments intégraux  $E_4$  de dimension 4 qui satisfont la condition  $\omega|_{E_4} \neq 0$ . Nous identifions l'espace tangent à un point quelconque de  $\mathbb{M} \times \Lambda^2 \vec{\mathbb{M}}^*$  à  $\mathbb{R}^4 \times \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ . Les équations (108) s'écrivent dans ce cas

$$d\Phi|_E = (d\Psi - 4\pi J)|_E = 0. \quad (109)$$

D'une part, tout élément  $E \in Gr_4(\mathbb{R}^4 \times \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*)$  tel que  $\omega|_E \neq 0$  est le graphe d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  vers  $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$  ou encore, l'image d'une application linéaire  $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ , qui se décompose sous la forme  $u = u_0 dt^0 + u_1 dt^1 + u_2 dt^2 + u_3 dt^3$  (en utilisant les coordonnées  $(t^0, t^1, t^2, t^3)$  sur l'espace de départ), avec :

$$u_a = \frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{1}{2} \sum_{b,c=0}^3 p_{bc,a} \frac{\partial}{\partial z^{bc}}. \quad (110)$$

Donc  $u$  (c'est à dire  $E$ ) dépend a priori des 24 coefficients  $p_{ab,c} = -p_{bc,a}$ . L'image de  $u$  est alors un élément intégral ssi  $u^* d\Phi = u^*(d\Psi - 4\pi J) = 0$ , ce qui se traduit par le système de 8 équations linéaires indépendantes sur les coefficients  $p_{ab,c}$  contenu dans les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_{12,3} + p_{23,1} + p_{31,2})dt^{123} + (p_{01,2} + p_{20,1} + p_{12,0})dt^{012} \\ + (p_{01,3} + p_{30,1} + p_{13,0})dt^{013} + (p_{02,3} + p_{30,2} + p_{23,0})dt^{023} = 0 \\ - (p_{01,1} + p_{02,2} + p_{03,3} + 4\pi\rho)dt^{123} + (p_{10,0} - p_{12,2} - p_{13,3} + 4\pi j^1)dt^{023} \\ + (p_{20,0} - p_{21,1} - p_{23,3} + 4\pi j^2)dt^{031} + (p_{30,0} - p_{31,1} - p_{32,2} + 4\pi j^3)dt^{012} = 0, \end{array} \right. \quad (111)$$

où  $dt^{abc} = dt^a \wedge dt^b \wedge dt^c$ ,  $\forall a, b, c = 0, 1, 2, 3$ . Donc  $\dim Gr_4(\mathcal{I}, \mathbb{R}^4 \times \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*) = 24 - 8 = 16$ .

D'autre part, nous déterminons un drapeau  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset E_4$  d'éléments intégraux. Nous choisissons  $E_1 = \mathbb{R}u_1$ ,  $E_2 = \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2$ ,  $E_3 = \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 \oplus \mathbb{R}u_3$  et  $E_4 = \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 \oplus \mathbb{R}u_3 \oplus \mathbb{R}u_0$ , où  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$  sont de la forme (110).

Pour passer d'un élément intégral  $E_a$  à l'élément  $E_{a+1}$  nous devons chercher un vecteur  $u_{a+1}$  à ajouter à la base  $(u_1, \dots, u_a)$ , de sorte que  $E_{a+1}$  soit encore solution de (109) (nous convenons ici que  $a \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , si bien que  $3+1=0$ ). Pour  $E_1$  et  $E_2$ , ces équations ne donnent aucune contrainte. Donc  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 0$ . Nous pouvons ainsi choisir les coefficients  $p_{ab,1}$  et  $p_{ab,2}$  librement. Pour le choix de  $u_3$ , nous devons nous assurer que  $d\Phi(u_1, u_2, u_3) = 0$  et  $(d\Psi - 4\pi J)(u_1, u_2, u_3) = 0$ . Autrement dit  $u_3$  est solution d'un système d'équations linéaires, appelé *système polaire* :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \wedge u_2 \lrcorner d\Phi(u_3) = 0 \\ u_1 \wedge u_2 \lrcorner (d\Psi - 4\pi J)(u_3) = 0, \end{array} \right. \quad (112)$$

où  $u_1 \wedge u_2 \lrcorner \alpha := u_2 \lrcorner (u_1 \lrcorner \alpha)$ , pour toute forme  $\alpha$ . Enfin, une fois  $u_3$  choisi parmi les solutions de (112), nous cherchons  $u_0$  solution du système polaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \wedge u_2 \lrcorner d\Phi(u_0) = 0 \\ u_2 \wedge u_3 \lrcorner d\Phi(u_0) = 0 \\ u_3 \wedge u_1 \lrcorner d\Phi(u_0) = 0 \\ u_1 \wedge u_2 \lrcorner (d\Psi - 4\pi J)(u_0) = 0 \\ u_2 \wedge u_3 \lrcorner (d\Psi - 4\pi J)(u_0) = 0 \\ u_3 \wedge u_1 \lrcorner (d\Psi - 4\pi J)(u_0) = 0. \end{array} \right. \quad (113)$$

Un calcul donne :

$$\begin{aligned}
u_1 \wedge u_2 \lrcorner d\Phi &= dp_{12} - p_{12,1}dx^1 - p_{12,2}dx^2 + (p_{01,2} - p_{02,1})dx^0 + (p_{31,2} - p_{32,1})dx^3 \\
u_2 \wedge u_3 \lrcorner d\Phi &= dp_{23} - p_{23,2}dx^2 - p_{23,3}dx^3 + (p_{02,3} - p_{03,2})dx^0 + (p_{12,3} - p_{13,2})dx^1 \\
u_3 \wedge u_1 \lrcorner d\Phi &= dp_{31} - p_{31,1}dx^1 - p_{31,3}dx^3 + (p_{03,1} - p_{01,3})dx^0 + (p_{23,1} - p_{21,3})dx^2 \\
u_1 \wedge u_2 \lrcorner d\Psi &= -dp_{03} + p_{03,1}dx^1 + p_{03,2}dx^2 - (p_{01,1} + p_{02,2})dx^3 - (p_{31,1} + p_{32,2})dx^0 \\
u_2 \wedge u_3 \lrcorner d\Psi &= -dp_{01} + p_{01,2}dx^2 + p_{01,3}dx^3 - (p_{02,2} + p_{03,3})dx^1 - (p_{12,2} + p_{13,3})dx^0 \\
u_3 \wedge u_1 \lrcorner d\Psi &= -dp_{02} + p_{02,1}dx^1 + p_{02,3}dx^3 - (p_{01,1} + p_{03,3})dx^2 - (p_{12,2} + p_{13,3})dx^0
\end{aligned}$$

et par ailleurs,  $u_1 \wedge u_2 \lrcorner 4\pi J = 4\pi(\rho dx^3 - j^3 dx^0)$ ,  $u_2 \wedge u_3 \lrcorner 4\pi J = 4\pi(\rho dx^1 - j^1 dx^0)$  et  $u_3 \wedge u_1 \lrcorner 4\pi J = 4\pi(\rho dx^2 - j^2 dx^0)$ .

Nous pouvons donc réécrire le système polaire (112) sous la forme

$$\begin{cases} dp_{12} = p_{12,1}dx^1 + p_{12,2}dx^2 - (p_{01,2} - p_{02,1})dx^0 - (p_{31,2} - p_{32,1})dx^3 \\ dp_{03} = p_{03,1}dx^1 + p_{03,2}dx^2 - (p_{01,1} + p_{02,2} - 4\pi\rho)dx^3 - (p_{31,1} + p_{32,2} + j^3)dx^0 \end{cases} \quad (114)$$

dans lequel il est *sous-entendu* que toutes les 1-formes doivent être évaluées en  $u_3$ . Le rang de ce système est 2, donc  $s_2 = 2 - s_0 - s_1 = 2$ . De même nous écrivons le système polaire (113) sous la forme

$$\begin{cases} dp_{12} = p_{12,1}dx^1 + p_{12,2}dx^2 - (p_{01,2} - p_{02,1})dx^0 - (p_{31,2} - p_{32,1})dx^3 \\ dp_{23} = p_{23,2}dx^2 + p_{23,3}dx^3 - (p_{02,3} - p_{03,2})dx^0 - (p_{12,3} - p_{13,2})dx^1 \\ dp_{31} = p_{31,1}dx^1 + p_{31,3}dx^3 - (p_{03,1} - p_{01,3})dx^0 - (p_{23,1} - p_{21,3})dx^2 \\ dp_{03} = p_{03,1}dx^1 + p_{03,2}dx^2 - (p_{01,1} + p_{02,2} - 4\pi\rho)dx^3 - (p_{31,1} + p_{32,2} + j^3)dx^0 \\ dp_{01} = p_{01,2}dx^2 + p_{01,3}dx^3 - (p_{02,2} + p_{03,3} - 4\pi\rho)dx^1 - (p_{12,2} + p_{13,3} + j^1)dx^0 \\ dp_{02} = p_{02,1}dx^1 + p_{02,3}dx^3 - (p_{01,1} + p_{03,3} - 4\pi\rho)dx^2 - (p_{21,1} + p_{23,3} + j^2)dx^0, \end{cases} \quad (115)$$

avec, cette fois-ci, la convention que les 1-formes doivent être évaluées en  $u_0$ . Le rang de ce système est 6, donc  $s_3 = 6 - s_0 - s_1 - s_2 = 4$ .

Les présentations (114) et (115) font apparaître, à gauche, les différentielles dont les valeurs sur respectivement les vecteurs  $u_3$  et  $u_0$  sont les inconnues et, à droite, les différentielles  $dx^a$ , dont les valeurs sur les vecteurs  $u_3$  et  $u_0$  ont été fixées à l'avance par normalisation. Les coefficients des  $dx^a$  sont constitués des coordonnées des vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  pour le système (112) et  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  pour le système (113), c'est à dire des vecteurs qui ont déjà été fixées aux étapes précédentes.

Considérons les systèmes linéaires homogènes associés, c'est à dire les *systèmes polaires réduits*. Ceux-ci s'obtiennent simplement en remplaçant toutes les formes  $dx^a$  dans ces équations par zéro. Comme  $s_0 = s_1 = 0$ , on a déjà  $s'_0 = s'_1 = 0$ . Le système polaire réduit issu de (112) est simplement

$$\begin{cases} dp_{12} = 0 \\ dp_{03} = 0 \end{cases} \quad \text{pour } u_3 \quad (116)$$

et est de rang 2. Donc  $s'_2 = 2$ . Le système polaire réduit issu de (113) est

$$\begin{cases} dp_{12} = dp_{23} = dp_{31} = 0 \\ dp_{03} = dp_{01} = dp_{02} = 0 \end{cases} \quad \text{pour } u_0 \quad (117)$$

et est de rang 6. Donc  $s'_3 = 4$ .

Notons que le nombre  $2 + 6 = 8$  de contraintes qui définissent l'élément intégral  $E_4$  obtenu en (111) peut être calculé en sommant les rangs des systèmes polaires (114) et (115) :

$$\begin{array}{rcl}
s_0 & & 0 \\
+ s_0 + s_1 & & + 0 + 0 \\
+ s_0 + s_1 + s_2 & & + 0 + 0 + 2 \\
+ s_0 + s_1 + s_2 + s_3 & = & + 0 + 0 + 2 + 4 = 6
\end{array}$$

Par ailleurs nous retrouvons ce nombre  $2 + 6 = 8$  en sommant les rangs des deux systèmes polaires *réduits* (116) et (117) :

$$\begin{array}{rcl}
s'_0 & & 0 \\
+ s'_0 + s'_1 & & + 0 + 0 \\
+ s'_0 + s'_1 + s'_2 & & + 0 + 0 + 2 \\
+ s'_0 + s'_1 + s'_2 + s'_3 & = & + 0 + 0 + 2 + 4 = 6
\end{array}$$

En règle générale, la somme des rangs des systèmes polaires réduits ne dépasse pas le nombre de contraintes indépendantes contenues dans les conditions (108) qui définissent l'élément intégral, puisque les systèmes polaires réduits sont des simplifications des systèmes polaires. Ici nous remarquons que ces deux nombres sont en fait égaux. Cartan a remarqué que cette propriété est caractéristique des systèmes *involutifs* et l'a utilisé pour mettre au point un *test* pour décider si un système est involutif.

En effet nous verrons qu'il peut arriver que la somme des rangs des systèmes polaires réduits soit strictement inférieure au nombre de contraintes imposées réellement sur l'élément polaire, c'est à dire à la codimension de  $Gr_p(\mathcal{I}, T_M\mathcal{M})$  dans  $Gr_p(T_M\mathcal{M})$ . Cela implique qu'au moins un des systèmes polaires réduit a un rang strictement inférieur au rang du système polaire dont il est la réduction. Cela est le signe que le système polaire en question n'admet de solutions que si son membre de droite satisfait certaines relations supplémentaires, qui n'avaient pas été prises en compte dans les systèmes polaires précédents. Cette situation implique que le système n'est pas involutif.

Pour récapituler nous pouvons représenter le décompte des rangs des systèmes polaires réduits sur un tableau dont chaque case est associée à un degré de liberté de la grassmannienne  $Gr_p(\mathcal{I}; T_M\mathcal{M})$ . Par exemple, pour les équations de Maxwell, nous pouvons nous figurer que les degrés de liberté de  $Gr_4(\mathcal{I}, \mathbb{R}^4 \times \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*)$  sont répartis comme suit :

$p_{12,1}$	$p_{03,1}$	$p_{01,1}$	$p_{02,1}$	$p_{23,1}$	$p_{31,1}$
$p_{12,2}$	$p_{03,2}$	$p_{01,2}$	$p_{02,2}$	$p_{23,2}$	$p_{31,2}$
$p_{12,3}$	$p_{03,3}$	$p_{01,3}$	$p_{02,3}$	$p_{23,3}$	$p_{31,3}$
$p_{12,0}$	$p_{03,0}$	$p_{01,0}$	$p_{02,0}$	$p_{23,0}$	$p_{31,0}$

ou encore

$dp_{12}$	$dp_{03}$	$dp_{01}$	$dp_{02}$	$dp_{23}$	$dp_{31}$	$u_1$
$dp_{12}$	$dp_{03}$	$dp_{01}$	$dp_{02}$	$dp_{23}$	$dp_{31}$	$u_2$
$dp_{12}$	$dp_{03}$	$dp_{01}$	$dp_{02}$	$dp_{23}$	$dp_{31}$	$u_3$
$dp_{12}$	$dp_{03}$	$dp_{01}$	$dp_{02}$	$dp_{23}$	$dp_{31}$	$u_0$

où chaque 1-forme dans le tableau doit être évaluée contre le vecteur  $u_a$  situé sur la même ligne. Nous marquons alors d'une croix chaque case de ce tableau qui correspond à une *équation polaire réduite*, ce qui nous donne, à partir de (116) et (117) :

×	×				
×	×	×	×	×	×

Le nombre de cases vides est en général inférieur ou égal à la dimension de  $Gr_4(\mathcal{I}, \mathbb{R}^4 \times \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*)$ . Ici nous constatons qu'il est égal à cette dimension, c'est à dire à 16. Cela caractérise un système involutif.

## 7.7 Un système idiot d'équations à deux variables

Nous nous intéressons au système d'équations aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^1} = \frac{\partial f^2}{\partial x^1} \end{array} \right. \quad (118)$$

dans lequel  $(f^1, f^2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ .

### 7.7.1 Les solutions du système (118)

Si nous posons  $(y^1, y^2) = \frac{1}{2}(x^1 + x^2, x^1 - x^2)$ , alors les deux premières équations du système (118) sont équivalentes à  $\frac{\partial f^1}{\partial y^2} = \frac{\partial f^2}{\partial y^1} = 0$ . Nous en déduisons immédiatement qu'il existe deux fonctions d'une variable  $g$  et  $h$  telles que

$$f^1(x^1, x^2) = g(x^1 + x^2) \text{ et } f^2(x^1, x^2) = h(x^1 - x^2).$$

Reportant cela dans la dernière équation, nous obtenons  $g'(x^1 + x^2) = h'(x^1 - x^2), \forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}$ . Une telle relation n'a lieu que si les fonctions  $g'$  et  $h'$  sont constantes. Donc il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telles que  $g'(t) = h'(t) = c, \forall t \in \mathbb{R}$  et il existe des constantes  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$  telles que  $g(t) = ct + a$  et  $h(t) = ct + b, \forall t \in \mathbb{R}$ . Ainsi

$$f^1(x^1, x^2) = c(x^1 + x^2) + a \text{ et } f^2(x^1, x^2) = c(x^1 - x^2) + b. \quad (119)$$

L'ensemble des solutions de ce système n'est donc pas très riche, d'où le qualificatif dans le titre.

### 7.7.2 Formulation géométrique

Traduisons le système (118) sous la forme d'un système différentiel extérieur. Introduisons l'espace de jet  $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) := \{(x^1, x^2, y^1, y^2, p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2) \in \mathbb{R}^8\}$  muni des formes de contact

$$\theta^1 := dy^1 - p_1^1 dx^1 - p_2^1 dx^2 \text{ et } \theta^2 := dy^2 - p_1^2 dx^1 - p_2^2 dx^2$$

et de la forme  $\omega := dx^1 \wedge dx^2$ . Toute application  $f = (f^1, f^2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se représente par une surface  $\Gamma = j^1 f(\mathbb{R}^2)$  dans  $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  qui satisfait  $\theta^1|_\Gamma = \theta^2|_\Gamma = 0$  et  $\omega|_\Gamma \neq 0$ . De plus,  $f$  est solution de (118) ssi  $\Gamma$  prend ses valeurs dans la sous-variété  $\mathcal{N} \subset J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  définie par les relations :

$$\begin{cases} p_1^1 - p_2^1 & = & 0 \\ p_1^2 + p_2^2 & = & 0 \\ p_1^1 & = & p_1^2 \end{cases}$$

Nous allons donc travailler dans  $\mathcal{N}$ , avec les coordonnées  $(x^1, x^2, y^1, y^2, p)$ , où  $p := p_1^1 = p_2^1 = p_1^2 = -p_2^2$ . Cette variété est munie des 1-formes  $\theta^1|_{\mathcal{N}}$  et  $\theta^2|_{\mathcal{N}}$  que, par abus de notation, nous noterons  $\theta^1$  et  $\theta^2$  respectivement, pour alléger les notations. Dans les coordonnées  $(x^1, x^2, y^1, y^2, p)$ , nous avons

$$\theta^1 := dy^1 - p(dx^1 + dx^2) \text{ et } \theta^2 := dy^2 - p(dx^1 - dx^2). \quad (120)$$

Pour fermer le système, nous ajoutons à ces formes

$$d\theta^1 := -dp \wedge (dx^1 + dx^2) \text{ et } d\theta^2 := -dp \wedge (dx^1 - dx^2). \quad (121)$$

Ainsi nous devons étudier le système

$$\begin{cases} \Gamma & \subset & \mathcal{N} \\ \dim \Gamma & = & 2 \\ \omega|_\Gamma & \neq & 0 \\ \theta^1|_\Gamma & = & \theta^2|_\Gamma = 0 \\ d\theta^1|_\Gamma & = & d\theta^2|_\Gamma = 0 \end{cases} \quad (122)$$

### 7.7.3 Déroulement de l'algorithme

Suivons la construction d'un drapeau de sous-variétés intégrales  $\{M_0\} \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2$ . Pour  $M_0$ , nous choisissons sans perte de généralité d'imposer que  $(x^1, x^2)(M_0) = (0, 0)$ , nous avons alors  $(x^1, x^2, y^1, y^2, p)(M_0) = (0, 0, a, b, c)$  en général.

Nous construisons ensuite  $\Gamma_1$ . Nous choisissons d'imposer que  $dx^1|_{\Gamma_1} \neq 0$  et  $x^2|_{\Gamma_1} = 0$ . Nous représentons  $\Gamma_1$  comme étant l'image d'une application  $\gamma_1 : t^1 \mapsto (t^1, 0, f^1(t^1), f^2(t^1), g(t^1))$ . Cette courbe sera intégrale ssi  $\gamma_1^* \theta^1 = \gamma_1^* \theta^2 = 0$ . Cela nous donne les conditions

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_1^* \theta^1|_{t^1} = df_{t^1}^1 - g(t^1) dt^1 = \left( \frac{df^1}{dt^1}(t^1) - g(t^1) \right) dt^1 \\ 0 &= \gamma_1^* \theta^2|_{t^1} = df_{t^1}^2 - g(t^1) dt^1 = \left( \frac{df^2}{dt^1}(t^1) - g(t^1) \right) dt^1. \end{aligned}$$

Les solutions de ce système sont obtenues en choisissant n'importe quelle fonction  $g$  de la variable  $t^1$  satisfaisant la condition  $g(0) = c$  (pour que  $M_0 \in \Gamma_1$ ) et en prenant

$$f^1(t^1) = a + \int_0^{t^1} g(s)ds \text{ et } f^2(t^1) = b + \int_0^{t^1} g(s)ds.$$

Nous cherchons enfin à construire la surface  $\Gamma_2$  comme solution d'un problème de Cauchy avec  $\Gamma_1$  comme condition initiale et en déformant une courbe au cours du temps  $x^2$ . Nous devons donc expliciter à partir des condition (122) les dérivées des coordonnées d'un point de cette courbe par rapport à  $x^2$ . Représentons cette surface comme l'image du plongement de l'application  $\gamma_2 : (t^1, t^2) \mapsto (t^1, t^2, f^1(t^1, t^2), f^2(t^1, t^2), g(t^1, t^2))$ , de sorte que la condition  $\omega|_{\Gamma_2} \neq 0$  est automatiquement satisfaite.

Les conditions (122) nous donnent :

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_2^* \theta^1_{(t^1, t^2)} = df^1_{(t^1, t^2)} - g_{(t^1, t^2)}(dt^1 + dt^2) = \left( \frac{\partial f^1}{\partial t^1} - g \right)_{(t^1, t^2)} dt^1 + \left( \frac{\partial f^1}{\partial t^2} - g \right)_{(t^1, t^2)} dt^2 \\ 0 &= \gamma_2^* \theta^2_{(t^1, t^2)} = df^2_{(t^1, t^2)} - g_{(t^1, t^2)}(dt^1 - dt^2) = \left( \frac{\partial f^2}{\partial t^1} - g \right)_{(t^1, t^2)} dt^1 + \left( \frac{\partial f^2}{\partial t^2} + g \right)_{(t^1, t^2)} dt^2 \\ 0 &= \gamma_2^* d\theta^1_{(t^1, t^2)} = -dg_{(t^1, t^2)} \wedge (dt^1 + dt^2) = \left( \frac{\partial g}{\partial t^2} - \frac{\partial g}{\partial t^1} \right)_{(t^1, t^2)} dt^1 \wedge dt^2 \\ 0 &= \gamma_2^* d\theta^2_{(t^1, t^2)} = -dg_{(t^1, t^2)} \wedge (dt^1 - dt^2) = \left( \frac{\partial g}{\partial t^2} + \frac{\partial g}{\partial t^1} \right)_{(t^1, t^2)} dt^1 \wedge dt^2 \end{aligned}$$

Nous en déduisons le système d'équations dans lequel les inconnues sont  $\frac{\partial}{\partial t^2}(f^1, f^2, g)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f^1}{\partial t^2}(t^1, t^2) = g(t^1, t^2) \\ \frac{\partial f^2}{\partial t^2}(t^1, t^2) = -g(t^1, t^2) \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial t^2}(t^1, t^2) = \frac{\partial g}{\partial t^1}(t^1, t^2) \\ \frac{\partial g}{\partial t^2}(t^1, t^2) = -\frac{\partial g}{\partial t^1}(t^1, t^2) \end{array} \right. \quad (123)$$

Et là, nous avons un problème avec les deux équations à droite dans (123) car les membres de gauche y sont les mêmes et les membres de droite sont opposés. Ces deux équations n'admettent donc pas de solution en général, *sauf si*  $\frac{\partial g}{\partial t^1} = 0$ .

En particulier, pour  $t^2 = 0$ , cette condition signifie que  $\frac{\partial g}{\partial t^1}(t^1, 0) = 0$ . Or nous n'avons pas réalisé en suivant mécaniquement notre algorithme qu'il fallait imposer cette condition en construisant  $\Gamma_1$ . Cette algorithme ne fonctionne donc pas, bien que le système (118) admette des solutions, comme nous l'avons vu. Pourtant notre système est bien fermé. Mais il n'est *pas involutif*.

Si nous analysons d'où vient le problème, nous voyons dans le système (123) que l'existence de  $\frac{\partial}{\partial t^2}(f^1, f^2, g)$  force  $(f^1, f^2, g, \frac{\partial f^1}{\partial t^1}, \frac{\partial f^2}{\partial t^1}, \frac{\partial g}{\partial t^1})$  à satisfaire des conditions qui n'avaient pas été prises en compte lorsque nous avons résolu le problème à une variable  $t^1$ . En fait nous voyons bien que si (123) a lieu, alors  $\frac{\partial g}{\partial t^1} = \frac{\partial g}{\partial t^2} = 0$  et donc  $g$  est constant, ce dont nous nous étions aperçu dès le début au paragraphe 7.7.1.

Un remède à cela sera d'ajouter la condition  $dp|_{\Gamma} = 0$  au système (122), puisque, de toute manière, cette condition doit être vérifiée par toutes les solutions de ce système.

#### 7.7.4 Etude des éléments intégraux

Les difficultés rencontrées précédemment peuvent être décelées dans l'étude d'un drapeau  $\{0\} \subset E_1 \subset E_2 \subset T_M \mathcal{N}$  d'éléments intégraux en un point  $M \in \mathcal{N}$ , c'est à dire satisfaisant les conditions

$$\theta^1|_{E_a} = \theta^2|_{E_a} = d\theta^1|_{E_a} = d\theta^2|_{E_a} = 0 \quad (124)$$

pour  $a = 1$  ou  $2$ , avec les normalisations  $dx^1|_{E_1} \neq 0$  et  $dx^2|_{E_1} = 0$  pour  $E_1$  et  $dx^1 \wedge dx^2|_{E_2} \neq 0$  pour  $E_2$ . Nous cherchons  $E_1$  sous la forme  $E_1 = \mathbb{R}u_1$ , avec  $dx^1(u_1) = 1$  et  $dx^2(u_1) = 0$  et  $E_2$  sous la forme  $E_2 = \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2$ , avec  $dx^1(u_2) = 0$  et  $dx^2(u_2) = 1$ .

Les conditions (124) pour  $a = 1$  donnent que  $u_1$  doit être une solution du premier système polaire  $\theta^1(u_1) = \theta^2(u_1) = 0$ , qui se traduit par :

$$\begin{cases} dy^1 = p(dx^1 + dx^2) \\ dy^2 = p(dx^1 - dx^2) \end{cases} \text{ pour } u_1, \text{ soit } \begin{cases} dy^1(u_1) = p \\ dy^2(u_1) = p \end{cases} \quad (125)$$

Pour  $a = 2$ , nous obtenons de même que  $u_2$  doit être une solution du deuxième système polaire  $\theta^1(u_2) = \theta^2(u_2) = u_1 \lrcorner d\theta^1(u_2) = u_1 \lrcorner d\theta^2(u_2) = 0$ , ce qui nous donne :

$$\begin{cases} dy^1 = p(dx^1 + dx^2) \\ dy^2 = p(dx^1 - dx^2) \\ dp = dp(u_1)(dx^1 + dx^2) \\ dp = dp(u_1)(dx^1 - dx^2) \end{cases} \text{ pour } u_2, \text{ soit } \begin{cases} dy^1(u_2) = p \\ dy^2(u_2) = -p \\ dp(u_2) = dp(u_1) \\ dp(u_2) = -dp(u_1) \end{cases} \quad (126)$$

Nous retrouvons la difficulté rencontrée précédemment dans les deux dernières équations, lesquelles entraînent que  $dp(u_1) = 0$  et, par suite, que  $dp(u_2) = 0$  aussi. Ainsi  $dp|_{E_2} = 0$ . Le test de Cartan permet de diagnostiquer l'existence de ce problème simplement en étudiant les rangs des deux systèmes polaires précédents et en les comparant avec ceux des systèmes polaires réduits. Rappelons que ceux-ci sont obtenus simplement en remplaçant  $dx^1$  et  $dx^2$  par 0 dans les systèmes (125) et (126). Cela nous donne donc :

$$\begin{cases} dy^1 = 0 \\ dy^2 = 0 \end{cases} \quad (127)$$

pour le premier système polaire réduit, et

$$\begin{cases} dy^1 = 0 \\ dy^2 = 0 \\ dp = 0 \\ dp = 0 \end{cases} \quad (128)$$

pour le deuxième système polaire réduit.

Le rang du premier système polaire (125) est  $s_0 = 2$ , celui du deuxième système polaire (126) est (génériquement, si  $dp(u_1) \neq 0$ )  $s_0 + s_1 = 4$ . Les solutions de ces deux systèmes fournissent les bases des plans intégraux  $E_2$  en un point  $M$ , et donc décrivent



l'ensemble  $Gr_2(\mathcal{I}, T_M\mathcal{N})$ . Cet ensemble est un sous-ensemble défini par un système de  $s_0 + (s_0 + s_1) = 2 + 4 = 6$  équations indépendantes à l'intérieur de la grassmannienne  $Gr_2(T_M\mathcal{N})$ , qui est de dimension  $2 \times (5 - 2) = 6$ . Il est donc de dimension nulle (en effet, c'est un point dans la grassmannienne  $Gr_2(T_M\mathcal{N})$ , qui correspond au plan engendré par  $u_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + p(\frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial}{\partial y^2})$  et  $u_2 = \frac{\partial}{\partial x^1} + p(\frac{\partial}{\partial y^1} - \frac{\partial}{\partial y^2})$ ).

Le rang du premier système polaire réduit (127) est  $s'_0 = 2$ , celui du deuxième système polaire réduit (128) est  $s'_0 + s'_1 = 3$ . La somme totale des contraintes contenues dans ces deux systèmes polaires réduits est 5, qui est strictement inférieur au nombre 6 de contraintes imposées sur un plan intégral par les deux systèmes polaires. C'est le symptôme du problème vu précédemment, que le système n'est pas involutif.

Dit autrement, en représentant les degrés de liberté de la grassmannienne  $Gr_2(\mathbb{R}^5)$  par les cases d'un tableau  $2 \times 3$ , et en cochant deux cases sur la première ligne pour décompter le rang  $s'_0$  du premier système polaire et trois case sur la deuxième ligne pour décompter le rang  $s'_0 + s'_1$  du deuxième système polaire comme suit :

×	×	
×	×	×

nous observons que le nombre de cases restées vides est 1, qui est strictement supérieur à la dimension de  $Gr_2(\mathcal{I}, T_M\mathcal{N})$ .

### 7.7.5 Le remède du Docteur Cartan

Il est néanmoins possible de se ramener à un système involutif, en ajoutant au système (118) une relation supplémentaire :  $dp|_\Gamma = 0$ . Le nouveau système ainsi obtenu est appelé un *prolongement* du système (118). En effet, nous avons vu que les éléments intégraux  $E$  de ce système satisfont la condition  $dp|_E = 0$ . En imposant cette condition dès le départ, nous ne changeons donc pas le problème. En refaisant l'algorithme avec cette condition supplémentaire, on voit facilement que les difficultés rencontrées sont effacées. Si nous effectuons le test de Cartan pour le système prolongé, le premier système polaire (125) est remplacé par

$$\begin{cases} dy^1 = p(dx^1 + dx^2) \\ dy^2 = p(dx^1 - dx^2) \\ dp = 0 \end{cases} \text{ pour } u_1, \text{ soit } \begin{cases} dy^1(u_1) = p \\ dy^2(u_1) = p \\ dp(u_1) = 0 \end{cases} \quad (129)$$

et son rang est  $s_0 = 3$ . Le deuxième système polaire (126) est remplacé par

$$\begin{cases} dy^1 = p(dx^1 + dx^2) \\ dy^2 = p(dx^1 - dx^2) \\ dp = 0 \end{cases} \text{ pour } u_2, \text{ soit } \begin{cases} dy^1(u_2) = p \\ dy^2(u_2) = -p \\ dp(u_2) = 0 \end{cases} \quad (130)$$

et son rang est  $s_0 + s_1 = 3$ . On retrouve un total de  $3 + 3 = 6$  contraintes sur un plan intégral, ce qui ne change pas par rapport à avant.

En revanche le premier système polaire réduit devient maintenant

$$dy^1 = dy^2 = dp = 0,$$

son rang est  $s'_0 = 3$ , le deuxième système polaire réduit est exactement le même et a donc le même rang  $s'_0 + s'_1 = 3$ . Si on coche ces valeurs dans le tableau :

×	×	×
×	×	×

il ne reste aucune case vide, ce qui correspond bien à la dimension de  $Gr_2(\mathcal{I}, T_M\mathcal{N})$ . Le test de Cartan confirme le fait que le système est involutif.

## 8 Annexe

### 8.1 Un système de notation non standard

Dans <sup>(11)</sup>, M. Kawski et H. Sussmann introduisent un système de notation original pour la géométrie différentielle (mais malheureusement inutilisé par l'ensemble des géomètres). Ce système est particulièrement judicieux pour manipuler des champs de vecteur et des difféomorphismes. Expliquons-en le principe rapidement. Nous continuons à noter  $M$  un point d'une variété  $\mathcal{M}$ ,  $f$  une fonction à valeurs réelles sur  $\mathcal{M}$ ,  $g$  une fonction sur  $\mathcal{N}$ ,  $\varphi$  une application de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$ ,  $X, Y$  des champs de vecteurs sur  $\mathcal{M}$ ,  $\alpha$  une  $p$ -forme sur  $\mathcal{N}$ , etc. Mais les « évaluations » sont notées différemment :

Notation standard	Notation Kawski–Sussmann	
$f(M)$	$Mf$	$\in \mathbb{R}$
$\varphi(M)$	$M\varphi$	$\in \mathcal{N}$
$g \circ \varphi$	$\varphi g$	$\in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$
$X(M)$	$MX$	$\in T_M\mathcal{M}$
$\varphi_*X$	$\varphi^{-1}X\varphi$	$\in \mathcal{X}(\mathcal{N})$
$d\varphi_M(v)$	$(M; v)\varphi$	$\in T_{\varphi(M)}\mathcal{N}$
$\alpha_N(v_1, \dots, v_p)$	$(N; v_1, \dots, v_p)\alpha$	$\in \mathbb{R}$
$\varphi^*\alpha$	$\varphi\alpha$	$\in \Omega^p(\mathcal{M})$
$e^{tX}(M)$	$Me^{tX}$	$\in \mathcal{M}$

Quel est l'intérêt ? L'ordre d'écriture de gauche à droite coïncide avec l'ordre dans lequel on effectue les opérations et toutes les règles à respecter sont implicitement contenues dans le fait que les opérations sont associatives. Voici des exemples :

— la définition standard de  $\varphi^*\alpha$  qui est :

$$(\varphi^*\alpha)_M(v_1, \dots, v_p) := \alpha_{\varphi(M)}(d\varphi_M(v_1), \dots, d\varphi_M(v_p)),$$

devient celle de  $\varphi\alpha$ , qui est :

$$(M; v_1, \dots, v_p)(\varphi\alpha) = ((M; v_1, \dots, v_p)\varphi)\alpha \quad \text{que l'on peut noter } (M; v_1, \dots, v_p)\varphi\alpha.$$

— la définition standard de  $\varphi_*X$ , qui est :

$$(\varphi_*X)(N) := d\varphi_{\varphi^{-1}(N)}(X(\varphi^{-1}(N)))$$

devient celle de  $\varphi^{-1}X\varphi$ , qui est :

$$N(\varphi^{-1}X\varphi) := ((N\varphi^{-1})X)\varphi \quad \text{que l'on peut noter } N\varphi^{-1}X\varphi.$$

---

11. M. Kawski, H. Sussmann, *Noncommutative power series and formal Lie-algebraic techniques in nonlinear control theory*, European Consort. Math. Indus. Teubner, Stuttgart, 1997.

Un autre exemple : la relation (45), d'aspect un peu compliqué, peut se réécrire :

$$Me^{tX}\Psi = M\Psi e^{t\Psi^{-1}X\Psi}$$

ou encore :

$$e^{t\Psi^{-1}X\Psi} = \Psi^{-1}e^{tX}\Psi.$$

Nous n'utiliserons pas ce langage, essentiellement pour la bonne (ou plutôt la mauvaise) raison qu'il n'est pas le formalisme standard. Dommage !

## 8.2 Résultats sur le flot d'un champ de vecteur

Commençons par rappeler ce qu'est un champ de vecteur (*cf* paragraphe 4.6.2). Un champ de vecteur  $X$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un ouvert  $\Omega$  d'un espace affine  $E^m$  est une application  $X : \Omega \longrightarrow \vec{E}^m$  de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Les champs de vecteurs sont naturellement liés à des problèmes d'évolution. Par exemple dans un fluide en mouvement, la vitesse des molécules du fluide qui se trouvent au point  $x \in \Omega$  à l'instant  $t$  est représentée par un vecteur  $X(t, x)$  et l'application  $x \longmapsto X(t, x)$  est un champ de vecteur qui décrit l'état instantané des vitesses des molécules. La trajectoire d'une molécule au cours du temps est décrite par un chemin  $\gamma : I \longrightarrow \Omega$  (où  $I$  est l'intervalle de temps considéré) tel que  $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(t, \gamma(t))$  pour tout instant  $t$ .

De même, à toute solution  $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$  (où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ) de l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) = F\left(u(t), \frac{du}{dt}(t)\right),$$

correspond une solution  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$  de l'équation  $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t))$ , où

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ F(x, y) \end{pmatrix}.$$

### 8.2.1 Résultat d'existence locale

Nous allons voir que, sous des hypothèse relativement générale, le type d'équation évoqué précédemment admet toujours une solution au moins pour un intervalle de temps suffisamment court. C'est le théorème de Cauchy–Lipschitz, qui nous fournit donc une solution locale.

**Théorème 8.1** *Soit  $\Omega$  un domaine ouvert de  $E^m$  et soit  $X$  un champ de vecteur de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ , sur  $\Omega$ . Alors pour tout point  $a \in \Omega$ , il existe un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et un voisinage  $U_a$  de  $a$  dans  $\Omega$ , tels qu'il existe une unique application  $\Phi : I \times U_a \longrightarrow \Omega$  de classe  $\mathcal{C}^k$  satisfaisant*

$$— \forall x \in U_a, \Phi(0, x) = x$$

—  $\forall x \in U_a, \forall t \in I,$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = X(\Phi(t, x)). \quad (131)$$

**Preuve** Notons

$$E_0 := \{c \in \mathcal{C}^0([0, 1], \vec{E}^m) / c(0) = 0\}$$

et remarquons que  $E_0$  est un espace de Banach pour la norme

$$\|c\| := \sup_{s \in [0, 1]} |c(s)|.$$

L'idée est de rechercher pour tout  $(T, x)$  proche de  $(0, a)$  un chemin (qui sera en fait dérivable)  $c = G(T, x) \in E_0$  tel que  $\gamma(t) := x + c\left(\frac{t}{T}\right)$  soit une solution de

$$\gamma(0) = x \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)).$$

La première condition est automatiquement vérifiée, car  $c \in E_0$ . La deuxième condition est équivalente à

$$\frac{dc}{ds}(s) = T X(x + c(s)), \quad \forall s \in [0, 1].$$

Enfin il est préférable de réécrire cette équation sous une forme intégrale

$$c(s) - T \int_0^s X(x + c(\tau)) d\tau = 0, \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (132)$$

On remarque que

$$C(s) := c(s) - T \int_0^s X(x + c(\tau)) d\tau \quad (133)$$

définit un chemin  $C \in E_0$ .

Ainsi (132) se reformule en disant que l'on cherche un chemin  $c \in E_0$  tel que

$$F(T, x, c) = 0, \quad (134)$$

où

$$F : \mathbb{R} \times \Omega \times E_0 \longrightarrow E_0 \\ (T, x, c) \longmapsto C, \text{ défini par (133).}$$

Une solution évidente de (134) est  $(T, x, c) = (0, a, 0)$ . Le théorème des fonctions implicites va nous donner une famille de solutions de la forme  $(T, x, G(T, x))$ , pour  $(T, x)$  proche de  $(0, a)$ . Pour cela, nous devons vérifier

— que  $dF_{(0, a, 0)}$  est inversible par rapport à la dernière « variable »  $c \in T_0 E_0 \simeq E_0$ . Or un calcul simple donne que

$$dF_{(0, a, 0)} = dc,$$

c'est à dire que «  $\frac{\partial F}{\partial c}$  » =  $\text{Id}_{E_0}$

— que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Cela se vérifie aisément.

Donc, par le théorème des fonctions implicites, nous concluons qu'il existe un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et un voisinage  $U_a$  de  $a$  dans  $\Omega$  tels qu'il existe une application  $G : I \times U_a \rightarrow E_0$  de classe  $\mathcal{C}^k$  satisfaisant  $G(0, a) = 0$  et  $F(T, x, G(T, x)) = 0$ . De plus  $c = G(T, x)$  satisfait (132), ce qui entraîne que  $c$  est en fait un chemin de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Qu'avons-nous obtenu? Pour tout  $x \in U_a$  et tout  $T \in I$ , l'application  $\Phi_T(t, x) := x + G(x, T)(\frac{t}{T})$  est une solution de (131) définie sur l'intervalle  $[0, T]$  (avec la convention que si  $T < 0$ ,  $[0, T] = [-|T|, 0]$ ). Pouvons-nous étendre cette solution sur l'intervalle  $I$ ? Il faut pour cela recoller les diverses solutions  $\Phi_T$  en une solution  $\Phi$  définie sur  $I$ . Nous utilisons pour cela le Lemme d'unicité qui va suivre. En vertu de ce Lemme, si  $0 < T < T'$ ,  $\Phi_T$  coïncide avec  $\Phi_{T'}$  sur  $[0, T]$ . On peut donc définir  $\Phi$  sur  $[0, T]$  par  $\Phi(t, x) := \Phi_{T'}(t, x)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall T' \in I$  tel que  $T' \geq T$ . On définit de même  $\Phi(t, x)$  pour  $t \in [-|T|, 0]$  et  $T < 0$ . Ainsi  $\Phi$  est défini sur  $I$ .  $\square$

**Lemme 8.1** Soit  $X : \Omega \rightarrow \vec{E}^m$  un champ de vecteur de classe  $\mathcal{C}^1$  (en fait lipschitzien suffirait), et soit  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow \Omega$  deux solutions  $\mathcal{C}^1$  de

$$\gamma(0) = x \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)), \quad \forall t \in [0, T],$$

alors  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

**Preuve** Nous utilisons n'importe quel produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\vec{E}^m$  et notons  $|\xi| := \langle \xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}}$ . Comme  $[0, T]$  est compact et  $\gamma_1, \gamma_2$  sont continus, leurs images sont contenues dans un compact  $K \subset \Omega$ . La restriction de  $X$  à  $K$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz  $M$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|^2 &= 2 \langle \gamma_1(t) - \gamma_2(t), X(\gamma_1(t)) - X(\gamma_2(t)) \rangle \\ &\leq 2M |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|^2. \end{aligned}$$

Posons  $\lambda(t) := |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|^2$ . L'inégalité  $\frac{d\lambda}{dt}(t) \leq 2M\lambda(t)$  entraîne

$$\frac{d}{dt} (\lambda(t)e^{-2Mt}) \leq 0.$$

La fonction  $t \mapsto \lambda(t)e^{-2Mt}$  est ainsi positive, décroissante et vaut 0 en 0. Elle est donc identiquement nulle. Cela prouve que  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .  $\square$

### 8.2.2 Ensemble de vie d'un champ de vecteur

Soit  $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, \vec{E}^m)$  un champ de vecteur et soit  $x \in \Omega$ . On définit  $\Gamma_x := \{(I, \gamma) / I \text{ est un intervalle ouvert de } \mathbb{R}, 0 \in I, \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \Omega), \gamma(0) = x \text{ et } \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))\}$ .

Si  $(I, \gamma)$  et  $(I', \gamma') \in \Gamma_x$ , par le Lemme d'unicité qui précède, on a  $\gamma = \gamma'$  sur  $I \cap I'$  et on peut donc recoller les deux solutions en une solution  $\gamma''$ , définie sur  $I \cup I'$ . On note  $I_x := \cup_{(I, \gamma) \in \Gamma_x} I$  : c'est l'intervalle de vie de la solution maximale issue de  $x$ .

**Définition 8.1** L'ensemble de vie du flot du champ de vecteur  $x$  est

$$\Delta_X := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega / t \in I_x\}.$$

On note  $\Phi : \Delta_X \rightarrow \Omega$  la solution maximale de l'équation  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = X(\Phi(t, x))$ ,  $\Phi(0, x) = x$ .

*Exercice* — Démontrer que, pour  $\Omega = \mathbb{R}$  et  $X(x) = x^2$ , l'ensemble de vie est  $\Delta_X = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / tx < 0\}$ .

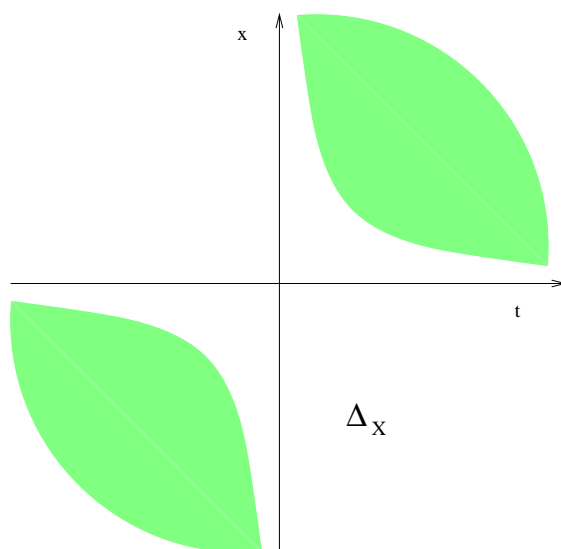


FIGURE 2 – L'ensemble de vie pour  $X(x) = x^2$

**Théorème 8.2** L'ensemble de vie  $\Delta_X$  est ouvert dans  $\mathbb{R} \times \Omega$ . De plus, pour tout  $(t, x) \in \Delta_X$  et  $t' \in \mathbb{R}$  tel que  $(t + t', x) \in \Delta_X$ ,

$$\Phi(t', \Phi(t, x)) = \Phi(t + t', x). \quad (135)$$

**Preuve** Le fait que  $\Delta_X$  soit ouvert est une conséquence du théorème d'existence du paragraphe précédent. L'identité (135) s'obtient en considérant

$$\begin{aligned} \alpha : s &\longmapsto \Phi(t + s, x) \\ \beta : s &\longmapsto \Phi(s, \Phi(t, x)) \end{aligned}$$

et en vérifiant que  $\alpha(0) = \beta(0) = \Phi(t, x)$  et  $\frac{d\alpha}{ds} = X(\alpha)$  et  $\frac{d\beta}{ds} = X(\beta)$ , ce qui entraîne  $\alpha = \beta$  par le Lemme d'unicité.  $\square$

**Proposition 8.1** Soit  $\epsilon > 0$  tel que  $] - \epsilon, \epsilon[ \times \Omega \subset \Delta_X$ . Alors, pour tout  $t \in ] - \epsilon, \epsilon[$  fixé,

$$\Phi(t) : x \longmapsto \Phi(t, x)$$

est un difféomorphisme de  $\Omega$  dans lui-même.

Dans le cas où  $\Delta_X = \mathbb{R} \times \Omega$ , le champ de vecteur  $X$  est dit **complet** et l'ensemble  $\{\Phi(t)/t \in \mathbb{R}\}$  muni de la loi de composition des applications est un groupe à un paramètre (c'est à dire isomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$ ) de difféomorphismes de  $\Omega$ .

**Preuve**  $\phi(t)$  est difféomorphisme en vertu du fait que  $\phi(t)$  est  $\mathcal{C}^1$  et du théorème précédent :  $(\Phi(t))^{-1} = \Phi(-t)$ .

La deuxième assertion est alors immédiate.  $\square$ .

### 8.2.3 Image d'un champ de vecteur par un difféomorphisme

Soit  $\Omega$  et  $\tilde{\Omega}$  deux ouverts de  $E^m$  et soit  $\Psi : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ . Pour tout champ de vecteur  $X \in \mathcal{C}^k(\Omega, E^m)$ , on définit le champ de vecteur  $\Psi_*X : \tilde{\Omega} \longrightarrow \tilde{E}^m$  par

$$\forall y \in \tilde{\Omega}, \quad (\Psi_*X)(y) := d\Psi_{\Psi^{-1}(y)}(X(\Psi^{-1}(y))) \quad (136)$$

ou, de manière équivalente, en posant  $y = \Psi(x)$ ,

$$\forall x \in \Omega, \quad (\Psi_*X)(\Psi(x)) := d\Psi_x(X(x)). \quad (137)$$

On peut vérifier sans difficulté que si  $X \in \mathcal{C}^k(\Omega, E^m)$  et  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ , alors  $\Psi_*X \in \mathcal{C}^k(\tilde{\Omega}, \tilde{E}^m)$ .

**Théorème 8.3** Supposons  $k \geq 2$ . Soit  $\Psi : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ . Soit  $\Phi : \Delta_X \longrightarrow \Omega$  le flot maximal de  $X$  et soit  $\tilde{\Phi} : \Delta_{\Psi_*X} \longrightarrow \tilde{\Omega}$  le flot maximal de  $\Psi_*X$ . Notons

$$\Psi_*(\Delta_X) := \{(t, \Psi(x)) \in \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} / (t, x) \in \Delta_X\}.$$

Alors  $\Delta_{\Psi_*X} = \Psi_*(\Delta_X)$  et

$$\forall (t, x) \in \Delta_X, \quad \tilde{\Phi}(t, \Psi(x)) = \Psi(\Phi(t, x)). \quad (138)$$

**Preuve** On considère  $\hat{\Phi}(t, y) := \Psi(\Phi(t, \Psi^{-1}(y)))$ , pour  $(t, y) \in \Psi_*(\Delta_X)$ . Alors

$$\hat{\Phi}(0, y) = \Psi(\Phi(0, \Psi^{-1}(y))) = \Psi \circ \Psi^{-1}(y) = y, \quad \forall y \in \tilde{\Omega}$$

et, notant  $x := \Psi^{-1}(y)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t}(t, y) &= d\Psi_{\Phi(t, x)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) \right) \\ &= d\Psi_{\Phi(t, x)}(X(\Phi(t, x))) \\ &= (\Psi_*X)(\Psi(\Phi(t, x))) \\ &= (\Psi_*X)(\hat{\Phi}(t, y)). \end{aligned}$$



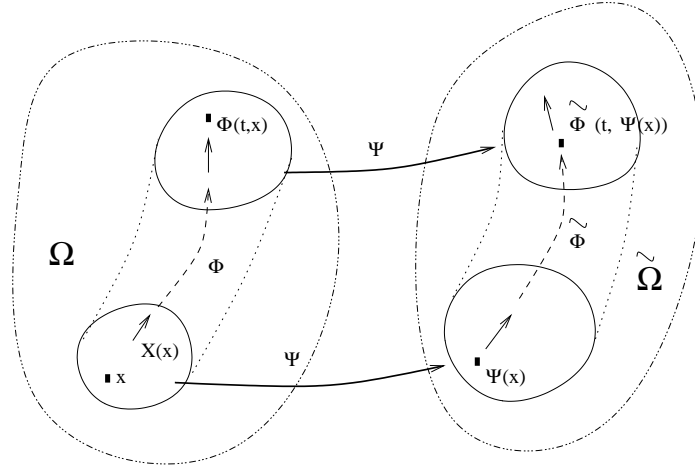


FIGURE 3 – L'image d'un champ de vecteur  $X$  par un difféomorphisme  $\Psi$

Donc  $\hat{\Phi}$  est solution des mêmes équations que  $\tilde{\Phi}$ , ce qui entraîne  $\Psi_*(\Delta_X) \subset \Delta_{\Psi_*X}$  et  $\tilde{\Phi} = \hat{\Phi}$  sur  $\Psi_*(\Delta_X)$ .

En inversant les rôles (passer à  $\Psi^{-1} : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ ) on a l'inclusion inverse :  $\Delta_{\Psi_*X} \subset \Psi_*(\Delta_X)$ . On conclut que  $\Delta_{\Psi_*X} = \Psi_*(\Delta_X)$  et  $\hat{\Phi} = \tilde{\Phi}$ .  $\square$

Une autre propriété, qui sera utile dans le paragraphe suivant est qu'un champ de vecteur est invariant sous l'action de son propre flot :

**Lemme 8.2** Soit  $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^m)$  et soit  $\Phi : \Delta_X \rightarrow \Omega$  le flot de  $X$ . Alors, on a sur  $\Delta_X$

$$\Phi(t)_*X = X.$$

**Preuve** Nous écrivons la conséquence suivante du théorème 8.2 :

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(t, \Phi(s, x))$$

et nous calculons la dérivée de cette expression par rapport à  $s$  en  $s = 0$ . On obtient ainsi

$$X(\Phi(t, x)) = d\Phi(t)_x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial s}(0, x) \right) = d\Phi(t)_x(X(x)) = (\Phi(t)_*X)(\Phi(t, x)).$$

$\square$ .

#### 8.2.4 Dérivée de Lie et paire de champs de vecteur

Pour tout champ de vecteur  $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^m)$ , et toute fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ , on définit la **dérivée de Lie** de  $f$  par rapport à  $X$  comme étant

$$L_X f(x) := df_x(X(x)) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x),$$

où  $(X^i)_{i=1,\dots,m}$  sont les composantes de  $X$  dans la base  $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1,\dots,m}$ . Ainsi  $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Une définition équivalente de la dérivée de Lie est

$$L_X f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Phi(t, x)) - f(x)}{t}. \quad (139)$$

*Exercice* — vérifier.

Examinons à présent ce qui se passe avec deux champs de vecteur.

**Lemme 8.3** *Soit  $X_1 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$  et  $X_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$ , deux champs de vecteur, et soit  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ . Alors,  $\forall x \in \Omega$ ,*

$$L_{X_1}(L_{X_2}f)(x) - L_{X_2}(L_{X_1}f)(x) = L_{[X_1, X_2]}f(x),$$

où

$$[X_1, X_2] := \sum_{i,j=1}^m \left( X_1^i \frac{\partial X_2^j}{\partial x^i} - X_2^i \frac{\partial X_1^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

est le **crochet de Lie** de  $X_1$  et  $X_2$  (c'est un champ de vecteur de classe  $\mathcal{C}^1$ ).

Il s'agit d'un résultat élémentaire, mais remarquable : le commutateur  $L_{X_1}L_{X_2} - L_{X_2}L_{X_1}$  devrait être a priori un opérateur différentiel du deuxième ordre et pourtant il est du premier ordre et s'exprime à partir d'un troisième champ de vecteur.

**Preuve** c'est un simple calcul qui utilise la propriété que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$ .

Nous allons voir à présent une autre définition du crochet de Lie de deux champs de vecteur, qui fait intervenir le transport d'un des champs par le flot de l'autre. Cette définition procède du point de vue inspiré par la relation (139). Nous noterons respectivement  $\Phi_1 : \Delta_{X_1} \rightarrow \Omega$  et  $\Phi_2 : \Delta_{X_2} \rightarrow \Omega$  les flots de  $X_1$  et  $X_2$ . L'idée est, par exemple, la suivante :

- on part d'un point  $x \in \Omega$ , on le pousse par le flot de  $X_1$  pendant un temps  $t$ , on se retrouve ainsi en  $\Phi_1(t, x)$
- on cueille  $X_2$  en  $\Phi_1(t, x)$  ; on aimerait bien comparer  $X_2(\Phi_1(t, x))$  avec  $X_2(x)$ , mais ces deux vecteurs appartiennent à deux espaces vectoriels différents (pour un géomètre différentiel)...
- on ramène  $X_2(\Phi_1(t, x))$  au point initial  $x$ , en le transportant par le flot de  $X_1$  vers le passé, et l'on obtient le vecteur  $d\Phi_1(-t)_{\Phi_1(t,x)}(X_2(\Phi_1(t, x)))$  que l'on dépose en  $x$
- on réalise que  $d\Phi_1(-t)_{\Phi_1(t,x)}(X_2(\Phi_1(t, x))) = (\Phi_1(-t)_* X_2)(x)$
- on compare  $(\Phi_1(-t)_* X_2)(x)$  avec  $X_2(x)$ , pour  $t$  tendant vers zéro...

on obtient ainsi

$$L_{X_1}X_2(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_1(-t)_* X_2)(x) - X_2(x)}{t}.$$

**Théorème 8.4** Si  $X_1 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$  et  $X_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$ , alors

$$L_{X_1}X_2 = [X_1, X_2].$$

**Preuve** Posons  $y = \Phi_1(t, x)$ . Nous pouvons exploiter le fait que  $\Phi$  est  $\mathcal{C}^1$  pour écrire un développement de Taylor

$$y = x + tX_1(x) + o(t). \quad (140)$$

De même,  $x = \Phi_1(-t, y) = y - tX_1(y) + o(t)$ , ce qui entraîne

$$d\Phi_1(-t)_y = dy - t \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_1}{\partial x^i}(y) dy^i + o(t). \quad (141)$$

En partant des relations (136) ou (137), on a

$$\begin{aligned} (\Phi_1(-t)_*X_2)(x) &= d\Phi_1(-t)_y(X_2(y)) \\ &= X_2(y) - t \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_1}{\partial x^i}(y) X_2^i(y) + o(t) \\ &= X_2(x) + t \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_2}{\partial x^i}(x) X_1^i(x) - t \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_1}{\partial x^i}(x) X_2^i(x) + o(t) \\ &= X_2(x) + t[X_1, X_2](x) + o(t). \end{aligned}$$

On a utilisé (141) à la deuxième ligne et (140) à la troisième ligne. Le résultat se déduit alors directement.  $\square$

Image d'un crochet de Lie par un difféomorphisme

Le résultat suivant sera crucial pour démontrer le Théorème de la fin de ce paragraphe.

**Théorème 8.5** Soit  $X_1 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$  et  $X_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$  deux champs de vecteurs et soit  $\Psi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^3$ . Alors

$$\Psi_*[X_1, X_2] = [\Psi_*X_1, \Psi_*X_2].$$

**Preuve** Il est beaucoup plus simple de démontrer ce résultat en utilisant comme définition du crochet de Lie, celle donnée par le Lemme 8.3. Pour cela nous commençons par remarquer le résultat suivant : si  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ ,  $\Psi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^m)$ , alors

$$L_{\Psi_*X}f = L_X(f \circ \Psi) \circ \Psi^{-1}. \quad (142)$$

En effet, pour tout  $y \in \Omega$ , notant  $y = \Psi(x)$ , on a

$$\begin{aligned} L_{\Psi_*X}f(y) &= df_y(\Psi_*X(y)) \\ &= df_y(d\Psi_x(X(x))) \\ &= df_y \circ d\Psi_x(X(x)) \\ &= L_X(f \circ \Psi)(x). \end{aligned}$$

A présent, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ , on a, en utilisant (142),

$$\begin{aligned}
L_{[\Psi_*X_1, \Psi_*X_2]}f &= L_{\Psi_*X_1}(L_{\Psi_*X_2}f) - L_{\Psi_*X_2}(L_{\Psi_*X_1}f) \\
&= L_{\Psi_*X_1}(L_{X_2}(f \circ \Psi) \circ \Psi^{-1}) - L_{\Psi_*X_2}(L_{X_1}f \circ \Psi) \circ \Psi^{-1}) \\
&= L_{X_1}(L_{X_2}(f \circ \Psi)) \circ \Psi^{-1} - L_{X_2}(L_{X_1}f \circ \Psi) \circ \Psi^{-1} \\
&= L_{[X_1, X_2]}(f \circ \Psi) \circ \Psi^{-1} \\
&= L_{\Psi_*[X_1, X_2]}f.
\end{aligned}$$

□.

**Théorème 8.6** Soient  $X_1 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$  et  $X_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega, E^m)$  deux champs de vecteurs et soient  $\Phi_1 : \Delta_{X_1} \rightarrow \Omega$  et  $\Phi_2 : \Delta_{X_2} \rightarrow \Omega$  leurs flots respectifs. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

- (a)  $[X_1, X_2] = 0$
- (b) si  $(t_1, x), (t_1, \Phi_2(t_2, x)) \in \Delta_{X_1}$  et  $(t_2, x), (t_2, \Phi_1(t_1, x)) \in \Delta_{X_2}$ ,  

$$\Phi_1(t_1, \Phi_2(t_2, x)) = \Phi_2(t_2, \Phi_1(t_1, x)).$$

**Preuve** *Etape 1* Nous montrons que (a) implique (b). Pour cela, une étape intermédiaire consiste à prouver que si (a) est vrai, alors

$$\Phi_1(t)_*X_2 = X_2. \quad (143)$$

Cette relation est évidemment vraie pour  $t = 0$ . Il suffit donc, pour la prouver, de montrer que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_1(t)_*X_2(x)) = 0. \quad (144)$$

Or, par définition de  $L_{X_1}(\Phi_1(t)_*X_2)$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_1(t)_*X_2(x)) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi_1(t+s)_*X_2(x) - \Phi_1(t)_*X_2(x)}{s} = -L_{X_1}(\Phi_1(t)_*X_2)(x).$$

Mais, en utilisant successivement le théorème 8.4, le lemme 8.2 et le théorème 8.5, on obtient

$$\begin{aligned}
L_{X_1}(\Phi_1(t)_*X_2) &= [X_1, \Phi_1(t)_*X_2] \\
&= [\Phi_1(t)_*X_1, \Phi_1(t)_*X_2] \\
&= \Phi_1(t)_*[X_1, X_2] = 0,
\end{aligned}$$

d'où la relation (144).

Pour conclure (b), nous utilisons le Théorème 8.3 avec  $\Psi = \Phi_1(t_1)$ ,  $\Phi = \Phi_2$  et  $t = t_2$ . D'après (143), on a  $\tilde{\Phi} = \Phi_2$  et donc (138) donne exactement (b).

*Etape 2* Nous montrons que (b) implique (a). Nous dérivons d'abord l'identité (b) par rapport à  $t_2$  en  $t_2 = 0$ , pour obtenir

$$d\Phi_1(t_1)_x(X_2(x)) = X_2(\Phi_1(t_1, x)),$$

ce qui équivaut à  $(\Phi_1(t_1)_*X_2)(\Phi_1(t_1, x)) = X_2(\Phi_1(t_1, x))$ . Donc  $\Phi_1(t_1)_*X_2 = X_2$ . En dérivant cette dernière équation par rapport à  $t_1$  en  $t_1 = 0$ , on a finalement  $L_{X_1}X_2 = 0$ , ce qui équivaut à (a). □.

### 8.2.5 Théorème de redressement

**Théorème 8.7** Soit  $X \in \mathcal{C}^k(\Omega, E^m)$  un champ de vecteur et  $a \in \Omega$ . Supposons que  $X(a) \neq 0$ . Alors il existe un ouvert  $U_a$  inclus dans  $\Omega$  contenant  $a$  et il existe un ouvert  $V \subset \mathbb{R}^m$  et un difféomorphisme  $\Psi : V \rightarrow U_a$  tel que

$$X = \Psi_* \epsilon_1,$$

où  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ .

**Preuve** Nous noterons  $(t^1, t^2, \dots, t^m)$  les coordonnées sur  $\mathbb{R}^m$ . Sans perte de généralité, on peut choisir une base  $(e_1, \dots, e_m)$  de  $\vec{E}^m$  telle que  $X(a) = e_1$ . Nous considérons, pour  $r > 0$ , l'application

$$\begin{aligned} \Psi : ]-r, r[ \times B_r^{m-1} &\longrightarrow \Omega \\ (t^1, t^2, \dots, t^m) &\longmapsto \Phi(t^1, a + t^2 e_2 + \dots + t^m e_m), \end{aligned}$$

où  $B_r^{m-1}$  est la boule de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^{m-1}$  et  $\Phi : \Delta_X \rightarrow \Omega$  est le flot de  $X$ . On remarque que  $d\Psi_0 = \text{Id}$  et que  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . On applique le théorème d'inversion locale et on en déduit que si  $r$  est suffisamment petit,  $\Psi$  est un difféomorphisme vers son image.

Enfin un calcul immédiat donne

$$X(\Psi(t^1, t^2, \dots, t^m)) = \frac{\partial \Psi}{\partial t^1}(t^1, t^2, \dots, t^m),$$

et le résultat s'ensuit. □.

### 8.2.6 Champs de vecteur complets

Rappelons qu'un champ de vecteur  $X$  sur  $\Omega$  est dit complet si  $\Delta_X = \mathbb{R} \times \Omega$ . Le résultat suivant permet, entre autre, d'obtenir une condition suffisante sur un champ de vecteur pour qu'il soit complet.

**Théorème 8.8** Soit  $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^m)$  un champ de vecteur et  $a \in \Omega$ . Soit  $I_a$  l'intervalle de la solution maximale issue de  $a$ . Notons  $\gamma(t) := \Phi(t, a)$  la courbe intégrale de  $X$  passant par  $a$  en  $t = 0$ . Alors

- $I_a$  est ouvert et on a donc  $I_a = ]t', t''[$ , où  $t', t'' \in [-\infty, \infty]$
- si  $t''$  est fini, alors, pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe un temps  $T > 0$  tel que  $\gamma(T) \notin K$  (on dit que  $\gamma$  sort de tout compact)
- de même, si  $t'$  est fini, pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe un temps  $T < 0$  tel que  $\gamma(T) \notin K$

Ce résultat entraîne aussitôt ce qui suit.

**Corollaire 8.1** Soit  $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^m)$  un champ de vecteur à support compact, c'est à dire qui s'annule en dehors d'un compact. Alors  $X$  est complet.

**Preuve du Théorème** La première assertion est une conséquence du Théorème d'existence. Nous nous contenterons de montrer la deuxième propriété (la dernière étant identique). Raisonnons par l'absurde et supposons que  $t''$  est fini et qu'il existe un compact  $K \subset \Omega$  tel que  $\forall t \in [0, t''[ \gamma(t) \in K$ . Puisque  $K$  est compact, on peut construire une suite  $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de réels dans  $[0, t''[$  qui converge vers  $t''$  et telle que  $\gamma(t_j)$  converge vers un point  $m \in K$ . Remarquons que, puisque  $K$  est compact,  $X$  est borné sur  $K$  et donc  $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$  est borné. Donc en particulier,  $\gamma$  est lipschitzien sur  $[0, t'']$ . On déduit de tout cela que  $\lim_{t \rightarrow t''} \gamma(t) = m$ . Posons  $\gamma(t'') := m$ . Alors  $\gamma$  est dérivable sur  $[0, t'']$  (car, à nouveau,  $\dot{\gamma} = X \circ \gamma$  est lipschitzien et borné sur  $]0, t''[$  et on peut prolonger cette fonction par continuité en  $t''$ ). Donc on peut, par recollement avec une solution intégrale issue de  $m$  prolonger la solution, ce qui est une contradiction.  $\square$

## Références

- [1] R. Bott, L.W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1982.
- [2] Elie CARTAN, *Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité*, Bulletin de la S.M.F., tome 59 (1931), p. 88–118.
- [3] B. Doubrovine, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Géométrie contemporaine, tome 1*, éditions MIR.
- [4] T. Willmore, *Riemannian geometry*, Oxford

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Les bases du calcul différentiel extérieur</b>	<b>1</b>
1.1	L'algèbre extérieure . . . . .	1
1.1.1	Définition . . . . .	1
1.1.2	Le produit intérieur . . . . .	5
1.1.3	Le produit intérieur est une dérivation (Elie Cartan) . . . . .	6
1.1.4	L'image inverse d'une forme par une application linéaire . . . . .	8
1.1.5	Un lemme de Cartan . . . . .	9
1.1.6	Décomposition d'une 2-forme . . . . .	10
1.2	Formes différentielles et champs de vecteur sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ . . . . .	12
1.2.1	Définitions . . . . .	12
1.2.2	Deux exemples fondamentaux de formes différentielles extérieures . . . . .	12
1.2.3	Les notations $dx^i$ et $\frac{\partial}{\partial x^i}$ . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Les variétés</b>	<b>14</b>
2.1	Variétés, espaces tangents et cotangents . . . . .	15
2.1.1	L'espace tangent . . . . .	15
2.1.2	L'espace cotangent . . . . .	16

2.1.3	Applications différentiables entre variétés . . . . .	17
2.2	Les sous-variétés . . . . .	17
2.2.1	Définitions . . . . .	17
2.2.2	Une tautologie importante . . . . .	19
2.3	Semons les vecteurs et les covecteurs dans les champs . . . . .	19
2.4	Fibrés vectoriels . . . . .	20
2.5	A propos des notations . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Opérations sur les formes différentielles</b>	<b>25</b>
3.1	L'image inverse d'une forme différentielle . . . . .	25
3.2	Restriction d'une forme différentielle à une sous-variété . . . . .	27
3.3	Image directe d'un champ de vecteur . . . . .	28
3.4	La différentielle extérieure . . . . .	29
3.4.1	La différentielle extérieure sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ . . . . .	29
3.4.2	Compatibilité entre la différentielle extérieure et l'image inverse . . . . .	31
3.4.3	La différentielle extérieure sur une variété . . . . .	32
3.4.4	Exemples et exercices . . . . .	33
3.4.5	Les équations de Maxwell . . . . .	33
3.5	Le produit intérieur par un champ de vecteur . . . . .	35
3.5.1	Définitions . . . . .	35
3.5.2	Le flot d'un champ de vecteur et la dérivée de Lie . . . . .	36
3.5.3	Autres propriétés de la dérivée de Lie . . . . .	38
3.5.4	Les belles formules de Cartan . . . . .	40
3.6	Intégrale d'une forme différentielle . . . . .	41
3.6.1	Compléments préliminaires sur les variétés : l'orientation et le bord . . . . .	41
3.6.2	Intégrale d'une forme différentielle . . . . .	42
3.7	La formule d'homotopie et le lemme de Poincaré . . . . .	45
3.7.1	L'homotopie . . . . .	46
3.7.2	La formule d'homotopie . . . . .	46
3.7.3	La preuve du lemme de Poincaré . . . . .	48
3.7.4	Cohomologie de de Rham . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Equations différentielles à une variable</b>	<b>50</b>
4.1	Equations différentielles ordinaires du premier ordre . . . . .	50
4.2	La restriction d'une forme différentielle sur une sous-variété . . . . .	53
4.3	Equations différentielles ordinaires du second ordre . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Equations aux dérivées partielles du premier ordre</b>	<b>55</b>
5.1	Formulation géométrique . . . . .	55
5.2	Fermeture du système . . . . .	57
5.3	Champs de vecteur de Charpit–Lagrange . . . . .	59
5.4	Existence d'un champ de vecteur de Charpit–Lagrange . . . . .	61
5.5	Généralisons notre définition d'une forme de contact . . . . .	61

5.6	Réduction par les caractéristiques . . . . .	63
5.7	Réduction à une variété de contact de codimension 2 et sous-variétés legendriennes . . . . .	67
5.8	La forme normale d'une variété de contact . . . . .	68
5.9	Comment décrire une sous-variété legendrienne quelconque . . . . .	70
5.10	Conclusion . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Systèmes pfaffiens</b>	<b>73</b>
<b>7</b>	<b>La théorie de Cartan–Kähler</b>	<b>73</b>
7.1	Le but recherché . . . . .	73
7.2	Une précaution indispensable : fermer le système . . . . .	74
7.3	L'idée de départ . . . . .	74
7.4	Quelques notions sur les grassmanniennes . . . . .	76
7.5	Une première difficulté . . . . .	77
7.6	Un exemple : les équations de Maxwell . . . . .	78
7.6.1	Ecriture sous forme d'un système différentiel extérieur . . . . .	78
7.6.2	Déroulement de l'algorithme . . . . .	79
7.6.3	Un décompte des degrés de liberté : généralités . . . . .	81
7.6.4	Un décompte des degrés de liberté : les équations de Maxwell . . . . .	81
7.7	Un système idiot d'équations à deux variables . . . . .	85
7.7.1	Les solutions du système (118) . . . . .	85
7.7.2	Formulation géométrique . . . . .	86
7.7.3	Déroulement de l'algorithme . . . . .	86
7.7.4	Etude des éléments intégraux . . . . .	88
7.7.5	Le remède du Docteur Cartan . . . . .	89
<b>8</b>	<b>Annexe</b>	<b>91</b>
8.1	Un système de notation non standard . . . . .	91
8.2	Résultats sur le flot d'un champ de vecteur . . . . .	92
8.2.1	Résultat d'existence locale . . . . .	92
8.2.2	Ensemble de vie d'un champ de vecteur . . . . .	94
8.2.3	Image d'un champ de vecteur par un difféomorphisme . . . . .	96
8.2.4	Dérivée de Lie et paire de champs de vecteur . . . . .	97
8.2.5	Théorème de redressement . . . . .	101
8.2.6	Champs de vecteur complets . . . . .	101