Feuille de TD 4

Ex 4. Trois paramètres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 3x + 8y - 14z = \beta \\ 2x + 4z = \gamma \end{cases}$

À quelles conditions sur (α, β, γ) le système admet une solution (x, y, z)

Une réponse : échelonner : .. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & \gamma + 2\beta - 8\alpha \end{array}\right)$

CNS de compatibilité $\boxed{-8\alpha + 2\beta + \gamma = 0}$

Preuve
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 3 & 8 & -14 & \beta \\ 2 & 0 & 4 & \gamma \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & 2 & -5 & \beta - 3\alpha \\ 0 & -4 & 10 & \gamma - 2\alpha \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \beta - 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{\boxed{\gamma - 2\alpha + 2\beta - 6\alpha}}_{-8\alpha + 2\beta + \gamma} \end{array}\right) \quad L_3' + 2L_2'$$

Donc si $-8\alpha + 2\beta + \gamma \neq 0$ pas de solution

• si $-8\alpha + 2\beta + \gamma = 0$ infinité de solutions

Toutes les valeurs (α, β, γ) telles que $8\alpha - 2\beta - \gamma = 0$

: $\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 8\alpha - 2\beta - \gamma = 0\}$ (plan vectoriel)

Exercice 5
$$(S) \begin{cases} x + 3y + 4z = 0 & (L_1) \\ 3x + 2y + 4z = 0 & (L_2) \\ x + 2y + 3z = 0 & (L_3) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_1' : L_2 - L_1 \\ L_2' : L_2 - L_3 \\ L_3' : L_1 - L_3 \end{array} \longrightarrow (S') \text{ à déterminer}$$

$$(S) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad (S') \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}}$$

Échelonner (S) :
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - 3L_1 : L_2' \\ L_3 - L_1 : L_3' \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -L_2' + 7L_3' = L_2'' \\ -L_3' = L_3'' \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_3'' - L_2'' \\ L_2'' \end{array}$$

Unique solution : $(0, 0, 0)$

Échelonner (S')
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{(exercice)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Deux variables principales
Une variable secondaire
compatible

Non unicité (les solutions dépendent d'un paramètre)

$(S) \Rightarrow (S')$

$(S) \cancel{\Leftarrow} (S')$

Conclusion $(S) \cancel{\Leftrightarrow} (S')$

Pourquoi $(S) \cancel{\Leftrightarrow} (S')$? on a retranché des lignes (ou des combinaisons linéaires) à une ligne (correct) mais on a remplacé plusieurs lignes à la fois (pas bon)

$$\left.\begin{array}{l} L_1' = L_2 - L_1 \\ L_2' = L_2 - L_3 \end{array} \quad L_3' = L_1 - L_3 \right) \Rightarrow L_2' - L_1' = L_3'$$

Exercice 6 $\begin{cases} ax + by = 0 \text{ ou } \alpha \\ cx + dy = 0 \text{ ou } \beta \end{cases}$ inconnues : (x,y)
paramètres : a,b,c,d, α,β

à faire pour demain.... (éventuellement m'envoyer un scann . pdf).

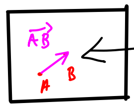
---

géométrie affine (suite).

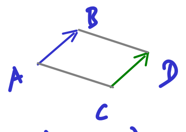
Espaces affines :

$\cdot \leftarrow$ point (dimension = 0)

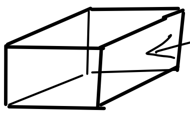
$\leftarrow$ droite (dimension 1)



$\leftarrow$ plan (dimension 2)



$\vec{AB} = \vec{CD}$ (vecteurs)



$\leftarrow$ Espace de dimension 3

Remarque : un vecteur est une classe d'équivalence
dans l'ensemble des paires de points {(A,B)}, :
(A,B) est équivalente à (C,D) si ABDC frome un parallélogramme.

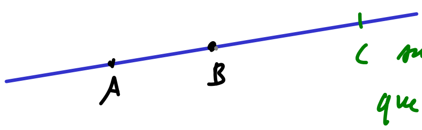
. Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

. $\lambda \in \mathbb{R}$ ("scalaire")

$\lambda \vec{AB}$: vecteur $\vec{AC}$ où (si $A \neq B$ $\Leftrightarrow$ $\vec{AB} \neq \vec{0}$)

$\{$Vecteurs$\}$ de l'espace $= \{ \vec{AB} \ / \ (A,B) \in \mathcal{E}space \}$

est muni de 2 lois



C sur la droite AB tel que $\overline{AC} = \lambda \overline{AB}$

$\underbrace{\overline{AC}}_{\text{longueur algébrique}}$ $\underbrace{\overline{AB}}_{\text{longueur algébrique } (>0)}$

Addition : $(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$

Multiplication par un scalaire : $(\lambda, \vec{u}) \longmapsto \lambda \vec{u}$

Exemple : si $\vec{u} = \vec{0}$, $\lambda \vec{0} = \vec{0}$; si $\lambda = 0$, $0 . \vec{u} = \vec{0}$.

Alors (Vecteurs de l'espace, +, multiplication par un scalaire) = espace vectoriel.

= ensemble muni de ces deux lois, stable

et $\lambda (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$.

Espace affine (dim. 3) $\mathcal{E}$ $\longrightarrow$ $\vec{\mathcal{E}}$ (espace des directions)
$= \{ \vec{AB} \ / \ A, B \in \mathcal{E} \}$ (dimension 3)

Plan affine (dim. 2) $\mathcal{P}$ $\longrightarrow$ $\vec{\mathcal{P}}$ . . — . . (dimension 2)

Droite — (dim. 1) $\mathcal{D}$ $\longrightarrow$ $\vec{\mathcal{D}}$. - - — (— 1)

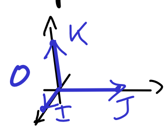
Point — (dim 0) $\{A\}$ $\longrightarrow$ $\vec{0}$ (dimension 0)

Repères de l'espace affine : de dimension 3

comment définir la position d'un point dans l'espace ?

- Un point de repère : l'origine du repère : O
- Trois points supplémentaires I, J, K, tous distincts de O.

tel que les points O, I, J, K ne soient pas coplanaires



Alors $\forall M \in \mathcal{E}$ (espace affine de dim. 3) $\exists ! (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ} + z\,\overrightarrow{OK}} \in \vec{\mathcal{E}}$$

($\vec{\mathcal{E}}$ espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$ ou espace des directions de $\mathcal{E}$)

(x, y, z) : coordonnées cartésiennes

Variante : donnée d'un point $O \in \mathcal{E}$ (l'origine) et de 3 vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ qui sont linéairement indépendants

(remplacer $\overrightarrow{OI}$ par $\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}$ par $\vec{j}$, $\overrightarrow{OK}$ par $\vec{k}$)

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: base de $\vec{\mathcal{E}}$

(autre langage) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

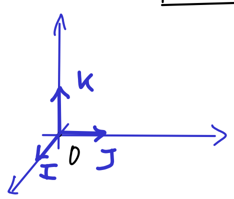
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

$\boxed{\mathbb{R}^3 \text{ peut être vu comme l'espace affine de dimension 3}}$ $\mathbb{R}^3 \simeq \mathcal{E}$

Un point : $x = (x_1, x_2, x_3)$ un autre point $y = (y_1, y_2, y_3)$

Un vecteur : $\boxed{\overrightarrow{xy} = y - x = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)}$ $(\in \mathbb{R}^3)$

Un exemple de repère affine de $\mathbb{R}^3$ (repère canonique)



$O = (0, 0, 0) \longrightarrow$ origine

$I = (1, 0, 0)$
$J = (0, 1, 0)$
$K = (0, 0, 1)$

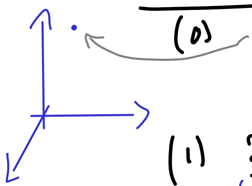
$\Big\}$ vecteurs de base.

Chasles : $\overrightarrow{xy} = y - x$, $\overrightarrow{yz} = z - y \Rightarrow \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = (\cancel{y} - x) + (z - \cancel{y})$
$= z - x = \overrightarrow{xz}$.

Produit par un "scalaire" $\lambda \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{xy} \in \mathbb{R}^3$ (vu comme espace vectoriel)

$$\lambda\,\overrightarrow{xy} = (\lambda(y_1 - x_1), \lambda(y_2 - x_2), \lambda(y_3 - x_3))$$

Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$

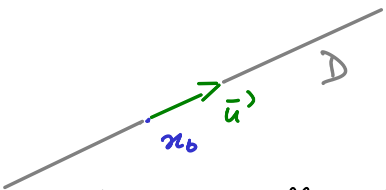


(0) Points := sous-espace affine de dimension 0 dans $\mathbb{R}^3$ = un ensemble que je peux écrire sous la forme $\{x\}$ (où $x \in \mathbb{R}^3$)

(1) Droite affine $D \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\exists x_0 \in \mathbb{R}^3$, $\exists \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

(sous-espace affine de dimension 1)

$$\boxed{x \in D \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{x_0 x} = \lambda \vec{u}}$$



Droite passant par x_0 et de direction $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$D = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{x_0 x} = \lambda \vec{u}\}$

(2) Plan affine $P \subset \mathbb{R}^3$ (sous-espace affine de dimension 2) : ensemble tel que $\exists x_0 \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires entre eux

avec $\boxed{\forall x \in \mathcal{P},\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\quad \overrightarrow{x_0x} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}}$

Plan $\mathcal{P}$ passant par x_0 et de direction engendrée par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\mathcal{P} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \ / \ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{x_0x} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \}.$$

(3) Espace affine $\mathbb{R}^3$: l'unique sous-espace affine de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$.

Espace affine de $\mathbb{R}^3$: l'une des possibilités (0), (1), (2), (3) précédentes

---

Même histoire dans le plan $\mathbb{R}^2 \simeq$ plan affine $= \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$:

(0) $\{x\}$ où $x \in \mathbb{R}^2$: point, sous-espace affine de dimension 0

(1) $D = \{ x \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{x_0x} = \lambda \vec{u} \}$: droite affine de $\mathbb{R}^2$ passant par x_0 et de direction $\vec{u}$, où $x_0 \in \mathbb{R}^2$ (joue le rôle de point "origine") et $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ (vecteur directeur). (dimension 1)

(2) $\mathbb{R}^2$: unique sous-affine de dimension 2 de $\mathbb{R}^2$

D'autres façons de définir, de caractériser une droite du plan $\mathbb{R}^2$?

Rappel $\quad D = \{ x \in \mathbb{R}^2 \ / \ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{x_0x} = \lambda \vec{u} \}$ $\quad \vec{u} \neq \vec{0}$

Propriété Si $\boxed{A = \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a x_1 + b x_2 = c \}}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Alors A est une droite affine de $\mathbb{R}^2$ et réciproquement.

Preuve a) Soit $D = \{ x \in \mathbb{R}^2 \ / \ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{ax} = \lambda \vec{u} \}$ droite passant par a

$\vec{u} = (u_1, u_2) \neq (0,0) \iff [(u_1 \neq 0) \vee (u_2 \neq 0)]$

$a = (a_1, a_2)$

$$x = (x_1, x_2) \in D \iff [\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x - a = \lambda (u_1, u_2)]$$
$$\iff [\exists \lambda \in \mathbb{R},\ (x_1 - a_1, x_2 - a_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2)]$$
$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1 - a_1 = \lambda u_1 \\ x_2 - a_2 = \lambda u_2 \end{cases}$$

"éliminer" λ

Supposons que $u_1 \neq 0$

(si $u_1 = 0$, je dois avoir $u_2 \neq 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 - a_1}{u_1} = \lambda \\ x_2 - a_2 = \dfrac{x_1 - a_1}{u_1} u_2 \end{cases}$$

$$u_1 x_2 - a_2 u_1 = x_1 u_2 - a_1 u_2$$

$$\iff \boxed{u_2 x_1 - u_1 x_2 = a_1 u_2 - a_2 u_1}$$

"$a x_1 + b x_1 = c$"

$\boxed{a = u_2}$, $\boxed{b = -u_1}$ $\quad c = a_1 u_2 - a_2 u_1$

$x = (x_1, x_2)$: solution d'une équation linéaire non homogène.

Si $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$, diviser par u_2 $\longrightarrow$ même equation

$\vec{u} \neq (0,0) \iff (u_2, -u_1) \neq (0,0)$.