Cours de RM1 du mardi 1er décembre reporté :
- il aura lieu demain jeudi 3 décembre de 13 h 30 à 15 h
- faire le cours de MM1 prévu pour le 3 décembre le lundi 7 decembre, de 16 h à 18 h

---

Suites

Déjà vu : définitions.
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{C}$
- pour une suite réelle, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $-\infty$

Pour se simplifier la vie

Théorèmes
- si $u_n \to \ell$, $v_n \to m$, $\lambda \in \mathbb{C}$: $\lambda u_n \to \lambda \ell$, $u_n + v_n \to \ell + m$, $u_n v_n \to \ell m$
- si $\ell \neq 0$, $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{\ell}$

Que se passe-t-il avec des suites qui convergent vers $\pm\infty$ ou vers $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$?

Théorème 1 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle t.q. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

a) alors si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, $\boxed{\lim \frac{1}{u_n} = +\infty}$

b) alors si $u_n < 0$ ———————————, $\boxed{\lim \frac{1}{u_n} = -\infty}$

Exemples
- $u_n = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{u_n} = n \longrightarrow +\infty$
- $v_n = \frac{-1}{n^2}$, $\frac{1}{v_n} = -n^2 \longrightarrow -\infty$

Théorème 2 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle t.q. $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

a) alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0}$

Soit $(v_n)_n$ une autre suite réelle, alors

$u_n + v_n$? $\downarrow$ $+\infty$

b) si v_n est minorée, alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty}$

c) Si $v_n \geqslant \alpha > 0$, alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty}$

d) Si $v_n \leqslant \alpha < 0$, alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty}$

Exemples Supposons $\boxed{u_n = n}$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

a) $\frac{1}{n} \to 0$

b) alors, si $v_n = (-1)^n$, $u_n + v_n = n + (-1)^n \to +\infty$

c) $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2}$, $u_n v_n = n + \frac{(-1)^n}{2} n \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$

$v_n \geq \frac{1}{2} > 0$ et $u_n v_n \to +\infty$

⚠ si $v_n = \frac{1}{n} \geq 0$ mais $u_n v_n = 1 \not\to +\infty$ (cas non couvert par le thm)

Passage à la limite dans les inégalités

Théorème 3 Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\boxed{\ell \geq 0}$

Théorème 4 Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $\boxed{u_n \leq v_n}$ à partir d'un certain rang. Alors

1) Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\lim v_n = +\infty$
2) Si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$
3) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = m$, alors $\boxed{\ell \leq m}$

Théorème 1) Somme de 2 suites réelles (u_n) et (v_n)

$u_n + v_n \to$?	$u_n \to -\infty$	$u_n \to \ell$	$u_n \to +\infty$
$v_n \to -\infty$	$-\infty$	$-\infty$ car (u_n) est majorée	?
$v_n \to m$	$-\infty$	ℓm	$+\infty$ car v_n est minorée
$v_n \to +\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

2) Produit de deux suites réelles. $(u_n v_n)$

$u_n v_n \to$?		$u_n \to -\infty$	$u_n \to \ell$, $\ell < 0$	$u_n \to \ell$, $\ell = 0$	$u_n \to \ell$, $\ell > 0$	$u_n \to +\infty$
$v_n \to -\infty$		$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$v_n \to m$	$m < 0$	$+\infty$	ℓm	ℓm	ℓm	$-\infty$
	$m = 0$	?				?
	$m > 0$	$-\infty$				$+\infty$
$v_n \to +\infty$		$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Exemple $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = n^2$, $u_n v_n = n \to +\infty$

$v_n = \sqrt{n}$, $u_n v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

$v_n = -n$, $u_n v_n = -1 \to -1$

$v_n = (-1)^n n$, $u_n v_n = (-1)^n$ diverge.

Cas ?

Applications **Ex 4** 1. $u_n = 3n^2 - 2n$ $(\to +\infty)$

- déjà traité en partant de la définition.
- avec les théorèmes déjà énoncés :

1ère idée $u_n = a_n + b_n$ $a_n = 3n^2 \to +\infty$

$b_n = -2n \to -\infty$

On ne peut pas conclure

2ème idée $u_n = n(3n-2) = a_n b_n$

$\begin{cases} a_n = n \\ b_n = 3n-2 \end{cases}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Si $n \geq 1$, $b_n = 3n-2 \geq 3-2 = 1 > 0$

$\Downarrow$

$3n \geq 3 \Rightarrow 3n-2 \geq 1$

Donc $a_n b_n \to +\infty$

2. $\boxed{u_n = -2n^3 + n - 3}$ $\to -\infty$?

$u_n = \underbrace{n(-2n^2+1)}_{\to -\infty} - 3$

car $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim(-2n^2) = -\infty \Rightarrow \lim(-2n^2+1) = -\infty \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n(-2n^2+1) = -\infty$

Suite constante $= -3$ est majorée $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n(-2n^2+1) - 3 = -\infty$

3. $\boxed{u_n = \frac{n-1}{n^2+2}}$ Analyse rapide : la plus forte puissance de n est au dénominateur : limite $= 0$. Justification ?

Autre remarque : $n \geq 1 \Rightarrow u_n \geq 0$

$u_n \leq \frac{n}{n^2+2} = \frac{1}{n + \frac{2}{n}}$

$\lim n = +\infty$

$\left(\frac{2}{n}\right)$ est minorée $\Big\}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n + \frac{2}{n} = +\infty$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\frac{2}{n}} = 0}$

3 bis $u_n = \frac{n-1}{n+2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$

$\lim 1 - \frac{1}{n} = 1$

$\lim 1 + \frac{2}{n} = 1$ $\Big\} \Rightarrow \lim u_n = 1$

Exercice (proche de l'exercice 7).

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Je suppose que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0,+\infty[$

[Remarque : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $u_n > 0$, alors $\ell \geq 0$]

Calculer la limite de (u_n) dans les cas suivants.

(i) $\ell \in [0,1[$

(ii) $\ell \in]1,+\infty[$

Cas (i) ?

suite géométrique $\forall n,\ a_n = C\alpha^n$

$\Updownarrow$

$\forall n,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$

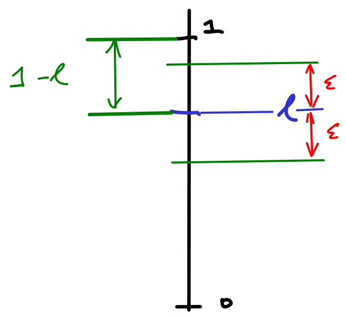
Imaginons $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \iff u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{u_0}{2}, \quad u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{u_0}{4}, \quad u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{u_0}{8}$

$u_n = \frac{u_0}{2^n}$ (récurrence) Donc $u_n \to 0$.

Montrons que $u_n \to 0$.

$\boxed{\ell < 1}$



Je choisis $\varepsilon < 1-\ell$

Par exemple $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \iff$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| < \varepsilon}$$

Je choisis $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$, $\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| < \frac{1-\ell}{2}$

$$\iff -\frac{1-\ell}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell < \frac{1-\ell}{2}$$

$$\iff \frac{3\ell-1}{2} < \boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1+\ell}{2}} < 1 \quad \text{car } \ell < 1$$

Récurrence : $\forall n \geq n_0$, $\boxed{u_n \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}}$

Initialisation $n = n_0$ $\quad u_{n_0} \leq \underbrace{\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^0}_{1} u_{n_0} = u_{n_0}$

Hérédité si $\boxed{u_n \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}}$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{1+\ell}{2} u_n \leq \frac{1+\ell}{2}\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0} = \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n+1-n_0} u_{n_0}$$

Comme $\frac{1+\ell}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \cdot \left[\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{-n_0} u_{n_0}\right] = 0$$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Que se passe-t-il si $\ell > 1$? On aura $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

(même méthode) → exercice

Remarque $\ell = 1$: cas indécidable : tout peut arriver.

exemple . $u_n = n$, $\frac{n+1}{n} \to 1$ et $\lim u_n = +\infty$

. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ et $\lim u_n = 1$

. $u_n = \frac{1}{n}$, $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$ et $\lim u_n = 0$

Retour au cours (lien entre suites monotones, majorées / bornées, convergentes)

Théorème de la limite monotone

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante ($u_{n+1} \geq u_n$). Alors

a) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}}$

b) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $(u_n)_n$ diverge

et $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante

a) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, elle converge et

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}}$

b) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non minorée, alors elle diverge

et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

Application de ce théorème : Exercice 8 (Nombre d'Euler).

$(u_n)_n$ où $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, converge