Corrigé du devoir MM1 — MIASH Groupe 1
À rendre sur moodle
mardi 24 novembre 2020, avant 20 h

EXERCICE 1. Dans $\mathbb{R}^2$ affine, déterminer l'équation paramétrique et l'équation cartésienne de la droite passant par les points A et B dans les cas suivants :

1. $A = (2, 1)$, $B = (-1, 3)$
   Réponse — On choisit comme vecteur directeur $\vec{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et comme origine le point A. On en déduit la représentation paramétrique
   $$\begin{cases} x &= 2 &-3\lambda \\ y &= 1 &+2\lambda \end{cases}$$
   En éliminant λ via l'écriture $\frac{2-x}{3} = \lambda = \frac{-1+y}{2}$, on obtient l'équation cartésienne $2x + 3y = 7$.

2. $B = (1, 2)$, $B = (-2, -4)$
   Réponse — On choisit comme vecteur directeur $\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et comme origine le point A. On en déduit la représentation paramétrique
   $$\begin{cases} x &= &\lambda \\ y &= &2\lambda \end{cases}$$
   En éliminant λ via l'écriture $s = \lambda = \frac{y}{2}$, on obtient l'équation cartésienne $2x - y = 0$.

EXERCICE 2. Dans $\mathbb{R}^2$ affine, déterminer un vecteur directeur de la droite D et en donner une équation paramétrique dans les cas suivants :

1. D est la droite d'équation cartésienne $8x - y = 2$
   Réponse — On obtient un vecteur directeur $\vec{u}$ en prenant une solution non triviale de l'équation linéaire homogène associée $8x - y = 0$, par exemple $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$. On choisit comme origine n'importe quel point dont les coordonnées sont solutions de $8x - y = 2$, par exemple $O = (1, 6)$. On en déduit la représentation paramétrique
   $$\begin{cases} x &= 1 &+\lambda \\ y &= 6 &+8\lambda \end{cases}$$

2. D est la droite d'équation cartésienne $5x + 3y = 0$.
Réponse — On obtient un vecteur directeur $\vec{u}$ en prenant une solution non triviale de l'équation linéaire homogène associée (qui est la même), par exemple $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. On choisit comme origine $O = (0, 0)$. On en déduit la représentation paramétrique

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x & = & 3\lambda \\ y & = & -\,5\lambda \end{array} \right.$$

EXERCICE 3. Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer un repère et une équation paramétrique des plans P_1, P_2 et P_3 définis par :
(1)

1. P_1 est le plan d'équation cartésienne $2x + y = 0$
Réponse — On choisit comme origine $O = (0, 0, 0)$. On obtient deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en prenant des solutions non triviales de l'équation linéaire homogène associée (qui est la même ici), par exemple $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \iff [(\lambda = 0) \wedge (-2\lambda = 0) \wedge (\mu = 0)] \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$. On en déduit la représentation paramétrique

$$\left\{ \begin{array}{lcrr} x & = & \lambda & \\ y & = & -\,2\lambda & \\ z & = & & \mu \end{array} \right.$$

2. P_2 est le plan d'équation cartésienne $x + 3y + 2z = 5$
Réponse — On choisit comme origine $O = (0, 1, 1)$. On choisit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui sont des solutions non triviales de l'équation linéaire homogène associée $x + 3y + 2z = 0$, par exemple $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \iff [(3\lambda = 0) \wedge (-\lambda - 2\mu = 0) \wedge (3\mu = 0)] \Longrightarrow$

$\lambda = \mu = 0$. On en déduit la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x & = & & 3\lambda & \\ y & = & 1 & -\lambda & -2\mu \\ z & = & 1 & & +3\mu \end{array}\right.$$

3. P_3 est le plan d'équation cartésienne $x - y - z = 1$
   Réponse — On choisit comme origine $O = (1, 0, 0)$. On choisit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui sont des solutions non triviales de l'équation linéaire homogène associée $x-y-z = 0$, par exemple $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants : $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ $\Longleftrightarrow [(\lambda + \mu = 0) \wedge (\lambda = 0) \wedge (\mu = 0)] \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$. On en déduit la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x & = & 1 & +\lambda & +\mu \\ y & = & & \lambda & \\ z & = & & & \mu \end{array}\right.$$

(2) Déterminer un repère et une équation paramétrique pour chacun des droites intersection $P_1 \cap P_2$, $P_2 \cap P_3$ et $P_3 \cap P_1$.
Réponse — • Pour $P_1 \cap P_2$, on procède en résolvant le système

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & & = & 0 \\ x & +3y & +2z & = & 5 \end{array}\right.$$

par la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/5 & -1 \\ 0 & 1 & 4/5 & 2 \end{array}\right)$$

On en déduit la représentation paramétrique en introduisant le paramètre $\lambda = z/5$ et donc un repère $(O, \vec{u})$ de $P_2 \cap P_3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x & = & -1 & +2\lambda \\ y & = & 2 & -4\lambda \\ z & = & & 5\lambda \end{array}\right. \qquad \text{donc } O = (-1, 2, 0) \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

• On procède de même pour $P_2 \cap P_3$, la méthode de Gauss donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 2 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1 \end{array}\right)$$

On en déduit la représentation paramétrique en introduisant le paramètre $\lambda = z/4$ et donc un repère $(O, \vec{u})$ de $P_2 \cap P_3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x & = & 2 & +\lambda \\ y & = & 1 & -3\lambda \\ z & = & & 4\lambda \end{array}\right. \quad \text{donc } O = (2,1,0) \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

• On procède de même pour $P_3 \cap P_1$, la méthode de Gauss donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

On en déduit la représentation paramétrique en introduisant le paramètre $\lambda = z/3$ et donc un repère $(O, \vec{u})$ de $P_3 \cap P_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x & = & 1/3 & +\lambda \\ y & = & -2/3 & -2\lambda \\ z & = & & 3\lambda \end{array}\right. \quad \text{donc } O = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0) \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4. Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer l'équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C dans les cas suivants :

1. $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$
   Réponse — Une première méthode (qui s'avère ici la plus simple) consiste à chercher des coefficients $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que les points A, B et C soient contenus dans le plan d'équation $ax + by + cz = d$. Cela donne le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & & & = & d \\ & b & & = & d \\ & & c & = & d \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad a = a = b = c = d$$

   On choisit $d = 1$, on obtient ainsi l'équation $x + y + z = 1$.

   Une autre méthode (plus compliquée ici) consiste à chercher un repère, puis une représentation paramétrique et obtenir l'équation en éliminant les paramètres. On peut choisir l'origine $O = (1,0,0)$ et les vecteurs de base $\vec{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x & = & 1 & -\lambda & -\mu \\ y & = & & \lambda & \\ z & = & & & \mu \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} x & = & 1 - x - z \\ \lambda & = & y \\ \mu & = & z \end{array}\right.$$

   et on retrouve ainsi l'équation $x + y + z = 1$.

2. $A = (2, 1, 0)$, $B = (-1, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$
Réponse — La première méthode (chercher directement des coefficients $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de l'équation $ax + by + cz = d$) conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2a & +b & & = & d \\ -a & +b & +c & = & d \\ -a & & +c & = & d \end{array} \right.$$

que l'on peut résoudre par la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 1 & 0 & d \\ -1 & 1 & 1 & d \\ -1 & 0 & 1 & d \end{array} \right) \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & d/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3d/2 \end{array} \right)$$

On choisit $d = 2$, on obtient ainsi $(a, b, c) = (1, 0, 3)$ et l'équation $x + 3z = 2$.

L'autre méthode consiste à construire un repère et une représentation paramétrique. On choisit l'origine $O = C = (-1, 0, 1)$ et les vecteurs de base $\vec{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où la représentation paramétrique

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} x & = & -1 & -3\lambda & \\ y & = & & & \mu \\ z & = & 1 & +\lambda & \end{array} \right. \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcc} 3\lambda & & = & -1-x \\ & \mu & = & y \\ \lambda & & = & -1+z \end{array} \right.$$

On écrit alors que le dernier système, dans lequel les inconnues sont λ et μ et x, y, z jouent le rôle de paramètres doit être compatible[1] :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -1-x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & -1+z \end{array} \right) \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2-x-3z \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & -1+z \end{array} \right)$$

On trouve que ce système est compatible ssi $2 - x - 3z = 0$ et on retrouve ainsi l'équation $x + 3z = 2$.

[1]*Rappel*: le principe est que le point (x, y, z) est dans le plan P ssi $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que la formule de représentation paramétrique soit satisfaite, c'est à dire, ssi (x, y, z) est tel que le système donné par la représentation paramétrique admette au moins une solution (λ, μ).