CORRIGÉ DU DEVOIR MM1 — MIASH GROUPE 1
À rendre sur moodle
mercredi 2 décembre 2020, avant 20 h

EXERCICE 1. Résoudre les inéquations suivantes, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. $x^2 < |x-1|$: discuter suivant les cas, interpréter votre résultat en dessinant les graphes des fonctions $[x \longmapsto x^2]$ et $[x \longmapsto |x-1|]$.
Réponse — Nous distinguons deux cas, suivant le signe de $x-1$:
• si $x \in]-\infty, 1]$, alors $|x-1| = 1-x$ et donc l'inéquation prend la forme $x^2 < 1-x \iff x^2+x-1 < 0$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1+4 = 5$, ses racines sont donc $x_- = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Le polynôme prend des valeurs < 0 ssi $x \in]x_-, x_+[$. L'ensemble des solutions x telle que $x \leq 1$ est donc $]-\infty, 1] \cap \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$. On a clairement $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 < 1$. Vérifions que $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$:
$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1 \iff \sqrt{5} < 2+1 = 3 \iff 5 < 9$$
Donc $]-\infty, 1] \cap \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[= \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

• si $x \in [1, +\infty[$, alors $|x-1| = x-1$ et donc l'inéquation prend la forme $x^2 < x-1 \iff x^2-x+1 < 0$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1-4 = -3$, il n'admet donc pas de racines réelles et est > 0 pour toute valeur de x. L'ensemble des solutions x telle que $x \geq 1$ est donc $[1, +\infty[\cap \emptyset = \emptyset$.

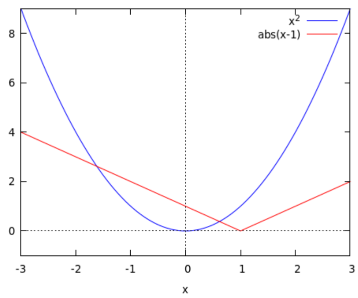

Figure 1: (exercice 1, question 1) l'ensemble cherché correspond aux valeurs de x telles que le graphe de $|x-1|$ (en rouge) soit au dessus du graphe de x^2 (en bleu).

Conclusion : l'ensemble des solutions est :

$$\left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup \emptyset = \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$$

2. $x^2 < |x - \frac{1}{4}|$: discuter suivant les cas, interpréter votre résultat en dessinant les graphes des fonctions $[x \longmapsto x^2]$ et $[x \longmapsto |x - \frac{1}{4}|]$.
Réponse — Nous distinguons deux cas, suivant le signe de $x - \frac{1}{4}$:

• si $x \in]-\infty, \frac{1}{4}]$, alors $|x - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4} - x$ et donc l'inéquation prend la forme $x^2 < \frac{1}{4} - x \Longleftrightarrow x^2 + x - \frac{1}{4} < 0$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1 + 1 = 2$, ses racines sont donc $x_- = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ et $x_+ = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$. Le polynôme prend des valeurs < 0 ssi $x \in]x_-, x_+[$. L'ensemble des solutions x telle que $x \leq \frac{1}{4}$ est donc $]-\infty, \frac{1}{4}] \cap \left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[$. On a clairement $\frac{-1-\sqrt{2}}{2} < 0 < \frac{1}{4}$. Vérifions que $\frac{-1+\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{4}$:

$$\frac{-1+\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{4} \Longleftrightarrow -2 + 2\sqrt{2} < 1 \Longleftrightarrow 2\sqrt{2} < 3 \Longleftrightarrow 8 < 9$$

Donc $]-\infty, \frac{1}{4}] \cap \left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[= \left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[$.

• si $x \in [\frac{1}{4}, +\infty[$, alors $|x - \frac{1}{4}| = x - \frac{1}{4}$ et donc l'inéquation prend la forme $x^2 < x - \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} < 0 \Longleftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 < 0$. Cette dernière inéquation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions x telle que $x \geq \frac{1}{4}$ est donc $[\frac{1}{4}, +\infty[\cap \emptyset = \emptyset$.

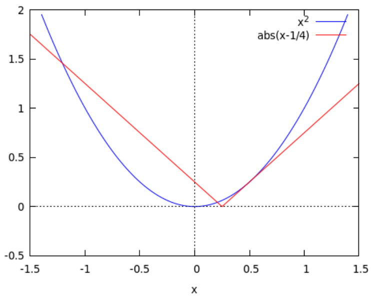

Figure 2: (exercice 1, question 2) l'ensemble cherché correspond aux valeurs de x telles que le graphe de $|x - 1/4|$ (en rouge) soit au dessus du graphe de x^2 (en bleu).

Conclusion : l'ensemble des solutions est :

$$\left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[\cup \emptyset = \left]\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right[$$

3. $|x| + |x+1| < 2$: discuter suivant les cas, interpréter votre résultat en dessinant le graphe de la fonction $[x \longmapsto |x| + |x+1|\,]$.
Réponse — Nous pouvons représenter comment s'exprime $|x| + |x+1|$ en fonction des valeurs de x par un tableau :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$	0	x	$\vert$	x	
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	$\vert$	$-x-1$	0	$x+1$	
$\lvert x\rvert + \lvert x+1\rvert$		$-2x-1$	$\vert$	1	$\vert$	$2x+1$	
$\lvert x\rvert + \lvert x+1\rvert < 2$		$x > -3/2$	$\vert$	vrai	$\vert$	$x < 1/2$	

L'espace des solutions est donc

$$\begin{aligned}(\,]-\infty,-1]\cap]-3/2,+\infty[) \cup [-1,0] \cup (\,[0,+\infty[\cap]-\infty,1/2[\,)\\ = \,]-3/2,-1] \cup [-1,0] \cup [0,1/2[\,=\,]-3/2,1/2[\end{aligned}$$

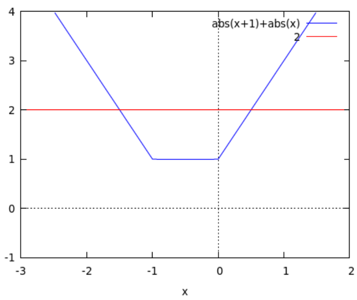

Figure 3: (exercice 1, question 3) l'ensemble cherché correspond aux valeurs de x telles que le graphe de $|x| + |x+1|$ (en bleu) soit en dessous de la droite $y = 2$ (en rouge).

<u>EXERCICE 2.</u> Soient $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < x < \beta$ et $\alpha < y < \beta$. Montrer que $|x - y| < |\beta - \alpha|$. Représenter sur une figure comment les valeurs α, β, x et y sont positionnées sur la droite réelle et interpréter.
Réponse — L'inégalité $\alpha < y < \beta$ est équivalente à $-\alpha > -y > -\beta$, que l'on peut écrire sous la forme $-\beta < -y < -\alpha$. En sommant avec l'autre inégalité comme suit, on obtient

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & < & x & < & \beta \\ -\beta & < & -y & < & -\alpha \\ \hline \alpha-\beta & < & x-y & < & \beta-\alpha \end{array}$$

ce qui équivaut $|x-y|<\beta-\alpha$. On peut interpréter cela en observant que $|x-y|$ est la longueur du segment joignant x à y, tandis que $\beta-\alpha$ est la longueur de l'intervalle $[\alpha,\beta]$. L'inégalité prouvée est donc une conséquence du fait que le segment joignant x à y est contenu dans $[\alpha,\beta]$.

<u>EXERCICE 3.</u> Démontrer à l'aide de la définition de la limite d'une suite que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-2}{n^2+1}=4$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$$

Réponse — • Pour la première limite, on commence par estimer la différence entre $u_n=\frac{4n^2-2}{n^2+1}$ et a :

$$|u_n-4|=\left|\frac{4n^2-2}{n^2+1}-4\right|=\left|\frac{4n^2-2}{n^2+1}-\frac{4n^2+4}{n^2+1}\right|=\frac{6}{n^2+1}$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que, pour tout entier $n\geq n_0$, $\frac{6}{n^2+1}<\varepsilon$. Cette dernière inégalité équivaut à :

$$6<(n^2+1)\varepsilon \quad\iff\quad n^2>\frac{6}{\varepsilon}-1 \quad\iff\quad n>\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}-1}$$

Ainsi, $\forall\varepsilon>0$, on choisit $n_0>\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}-1}$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$n\geq n_0 \quad\Longrightarrow\quad n>\sqrt{\frac{6}{\varepsilon}-1} \quad\iff\quad \frac{6}{n^2+1}<\varepsilon \quad\iff\quad |u_n-4|<\varepsilon$$

• Pour la deuxième suite, de terme général $v_n=\frac{\sin n}{n}$, on utilise le fait que $-1\leq\sin n\leq 1\iff|\sin n|\leq 1$. Donc

$$|v_n|=\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leq\frac{1}{n}$$

On montre donc facilement que $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$ par : $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0$ (on prend $n_0>1/\varepsilon$), $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$n\geq n_0 \quad\Longrightarrow\quad n>\frac{1}{\varepsilon}\iff\frac{1}{n}<\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad |v_n|<\varepsilon$$

<u>EXERCICE 4.</u> (petit problème) Soit $A\subset\mathbb{R}$ tel que : $\forall x,y\in A$, si $x\neq y$, alors $|y-x|\geq 1$. On suppose que A est minoré et non vide.

1. expliquer pourquoi A admet une borne inférieure, que l'on notera a.
   Réponse — A est **minoré** et **non vide**, donc, d'après un théorème du cours, il admet une borne inférieure.

2. montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a \leq u_n < a + \frac{1}{n}$.

   [Remarque : l'énoncé était incomplet, il fallait comprendre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit nécessairement prendre ses valeurs dans A.]
   Réponse — D'après la définition de la borne inférieure, on sait que a minore A et que a est le plus grand des minorants de A, c'est à dire :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad x < a + \varepsilon$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut appliquer cette propriété avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On obtient alors qu'il existe $u_n \in A$ tel que $a \leq u_n$ (puisque a minore A) et $u_n < a+\varepsilon$.

3. montrer que, si $n, m > 2$, alors $|u_n - u_m| < 1$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 2 plus haut).
   Réponse — Si $n, m > 2$, on a alors $a \leq u_n < a + \frac{1}{n} < a + \frac{1}{2}$ et $a \leq u_m < a + \frac{1}{m} < a + \frac{1}{2}$. En appliquant le résultat de l'exercice 2, on en déduit que
   $$a \leq u_n < a+\frac{1}{2} \text{ et } a \leq u_m < a+\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |u_n - u_m| < \left(a + \frac{1}{2}\right) - a = \frac{1}{2},$$
   d'où le résultat.

4. en déduire que la suite u_n est constante à partir d'un certain rang n_0; on notera $\ell = u_{n_0}$.
   Réponse — Par hypothèse, on sait (par contraposée) que $\forall x, y \in A$, $|x - y| < 1 \Longrightarrow x = y$. On déduit donc de la question précédente que, si $n, m < 2$, alors $u_n = u_m$. Donc la suite est constante, égale à ℓ, à partir du rang $n = 2$.

5. montrer que $a = \ell$ et en déduire que A admet un plus petit élément.
   Réponse —D'après ce qui précède on a :
   $$\forall n \geq 2, \quad a \leq \ell < a + \frac{1}{n}$$
   On note que, en particulier, $\forall n \geq 2$, $\ell < a + \frac{1}{n}$ entraîne que $\ell \leq a$. Donc $a \leq \ell \leq a$, soit $\ell = a = \inf A$ (on peut aussi conclure à l'aide du théorème des gendarmes à partir de l'encadrement $a \leq u_n < a + \frac{1}{n}$ et en remarquant que les suites de terme général, respectivement, a et $a + \frac{1}{n}$ convergent vers la même limite a). Or, comme par ailleurs, $\ell = u_n$ si $n \geq 2$ et $u_n \in A$, on en déduit que $\ell \in A$. Donc $a \in A$, donc a est aussi le plus petit élément de A.